

DOI: 10.3969/j.issn.1007-5461. 2012.03.011

与库相互作用的非耦合两比特系统量子失协动力学

王小云, 丁邦福, 赵鹤平

(吉首大学物理与机电工程学院, 湖南 吉首 416000)

摘 要: 推导出一个关于 X 结构密度矩阵的量子失协表达式。在单一激发下, 给出两个非耦合的量子比特分别与库相互作用构成系统的动力学的精确解, 用非马尔科夫主方程方法精确求解了这个系统的耗散动力学。在失谐光谱密度下, 讨论和比较不同耦合区域内系统的量子失协动力学特征。结果表明: 量子失协表达式适用于任意有 X 型密度矩阵的物理系统, 在失谐光谱密度下, 证实两类主方程分别适用于不同的耦合区域。这将为以后更加简便地计算量子失协, 以及在不同的耦合区域运用哪一类主方程提供一定的参考依据。

关键词: 量子光学; 量子失协; 非马尔科夫主方程; 关联函数

中图分类号: O431.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-5461(2012)02-0323-07

Quantum discord dynamics of non-coupled two-qubit system interacting with reservoirs

WANG Xiao-yun, DING Bang-fu, ZHAO He-ping

(College of Physics and Mechanical & Electrical Engineering, Jishou University, Jishou 416000, China)

Abstract: A general expression of quantum discord for X structure density matrix was derived. The dissipative dynamics of non-coupled two qubits independently interacting with their reservoir was solved by the non-Markovian master equation in a single excitation state. Under the detuning spectral density, the quantum discord dynamics was discussed and compared in different coupling regime. The results showed that this expression was employed to any physical system having X structure density matrix, and the two variants of master equations were exploited in different coupled regimes in the description of quantum correlation dynamics. It is convenient to calculate the quantum discord for later study and provide certain reference about what kind of master equation used in different coupling areas.

Key words: quantum optics; quantum discord; non-Markovian master equation; correlation function

1 引 言

纠缠是量子关联的一种度量, 没有经典对应的量。在量子信息和通信理论^[1,2], 量子隐形传态^[3], 量子密码^[4,5]和通用计算理论^[6]中起着重要作用, 但除了纠缠之外还有重要的非经典关联^[3~8]。为了鉴别所有的非经典关联, Ollivier 和 Zurek 提出了量子失协的概念^[6], 它能显示出两个经典态的基本特征。

基金项目: 湖南省自然科学基金 (09JJ6011)、湖南省教育厅资助项目 (10A100, 07C528)

作者简介: 王小云 (1975 -), 女, 土家族, 湖南吉首人, 副教授, 硕士生导师, 主要从事纳米量子光学相关的实验研究。

E-mail: wxyun@163.com

收稿日期: 2011-4-25; **修改日期:** 2011-5-19

尽管过去几十年里, 学者们热衷于对纠缠的研究^[9~12], 但现在的工作主要是对量子失协的调查^[13,14], 它是两种经典互信息量子推广所呈现出的不同点。研究者通过对量子失协的研究发现它比纠缠更能现实地描述关联动力学^[8,9], 另外量子失协可用来提高量子卡诺机的效率^[15], 并能深入理解量子相位转变^[16] 和 Grover search 过程^[17]。近年来对马尔科夫环境下, 系统的耗散动力学^[18] 的研究显示出量子失协比纠缠更加普遍, 然而对于非马尔科夫环境这个特性是不适合的^[19,20], 因为非马尔科夫环境具有记忆效应并且影响到耦合系统的关联动力学特征, 所以在非马尔科夫环境下研究量子失协动力学引起了极大的兴趣。

在非马尔科夫库中, 相互作用的系统的动力学求解经常使用两种投影算符技术, 即 Nakajima-Zwanzig (NZ)^[21,22] 和 time-convolutionless (TCL)^[23] 主方程。NZ 主方程是一个积分微分演化方程, 它的时间演化依赖于过去的时间, 而 TCL 主方程是一个广义的定域主方程^[24,25]。对于原子的布局数和纠缠动力学, 已经研究了上面两种方法的有效性^[26,27], 但都局限于在共振的洛伦兹光谱密度下。我们主要研究在失谐光谱密度下, 非马尔可夫主方程对量子失协动力学的有效性, 发现了一些新现象。

我们给出一类 X 型密度矩阵的量子失协的一般表达式, 它适用于任意有 X 结构密度矩阵的物理系统, 由它可以很容易地计算出系统的量子失协动力学。对于非耦合的两量子比特系统, 我们给出了系统动力学的精确解。考虑在单一激发态下, 失谐光谱密度以及不同的耦合区域用非马尔科夫方法求解这个系统的耗散动力学, 讨论和分析非马尔科夫方法对描述量子失协动力学的有效性。

2 量子失协

在信息理论里^[1], 量子互信息写成 $I(A : B) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho)$, 式中 $S(\rho)$ 是 von Neumann 熵, $\rho^A(\rho^B)$ 是约化密度算符。在经典概率理论里, 由条件概率可以得到经典互信息的一个等价的表达式。将这个定义推广到量子区域, 对系统 B 经过 n 次测量之后, 系统的态变为 $\rho_n = \frac{1}{P_n}(I \otimes B_n)\rho(I \otimes B_n)$, 这里 $P_n = \text{Tr}\{(I \otimes B_n)\rho(I \otimes B_n)\}$ 表示第 n 次测量后的概率, I 是对系统 A 的单位算符并且 $\{B_n\}$ 是投影算符。上式给出的密度算符得到了量子条件熵的定义 $S(\rho|\{B_n\}) = \sum_n p_n S(\rho_n)$, 量子互信息可以表示为 $J(\rho|\{B_n\}) = S(\rho^A) - S(\rho|\{B_n\})$ 。由于系统 A 和 B 之间的经典关联必须最大化即 $C(\rho) = \max_{\{B_n\}} J(\rho|\{B_n\})$ ^[6,7], 所以量子失协被定义为 $Q(\rho) = I(\rho_A, \rho_B) - C(\rho)$ 。

对于一类 X 型密度矩阵的表达式, 它具有下面的形式^[27]

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & w \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z^* & c & 0 \\ w^* & 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \quad (1)$$

对角元素是实数而非复数, 由 (1) 式很容易计算出熵 $S(\rho^A)$ 和 $S(\rho^B)$ 。为计算量子失协, 我们最大化经典关联 $J(\rho|\{B_n\})$ 。一般来说, 一个量子比特的投影可以写成两个角度的函数^[20], 假定先对 B 测量。通过计算得到量子失协的表达式为

$$Q_B(\rho) = \min\{Q_1(\rho), Q_2(\rho)\}, \quad (2)$$

式中

$$Q_1(\rho) = S(\rho^B) - S(\rho^{AB}) - \frac{a+c}{2} \left\{ \left(1 + \frac{|a-c|}{a+c}\right) \log_2 \left[\frac{a+c+|a-c|}{2(a+c)} \right] + \left(1 - \frac{|a-c|}{a+c}\right) \log_2 \left[\frac{a+c-|a-c|}{2(a+c)} \right] \right\} - \frac{b+d}{2} \left\{ \left(1 + \frac{|b-d|}{b+d}\right) \log_2 \left[\frac{b+d+|b-d|}{2(b+d)} \right] + \left(1 - \frac{|b-d|}{b+d}\right) \log_2 \left[\frac{b+d-|b-d|}{2(b+d)} \right] \right\},$$

$$Q_2(\rho) = S(\rho^B) - S(\rho^{AB}) - \frac{1+A}{2} \log_2 \left(\frac{|1+A|}{2} \right) - \frac{1-A}{2} \log_2 \left(\frac{1-A}{2} \right),$$

其中 $A = \sqrt{(a+b-c-d)^2 + 4(|w|+|z|)^2}$ 。如果对 A 测量并运用相同的方法, 量子失协的表达式为

$$Q_A(\rho) = \min \{ Q_3(\rho), Q_4(\rho) \}, \tag{3}$$

式中

$$Q_3(\rho) = S(\rho^A) - S(\rho^{AB}) - \frac{a+b}{2} \left\{ \left(1 + \frac{|a-b|}{a+b}\right) \log_2 \left[\frac{a+b+|a-b|}{2(a+b)} \right] + \left(1 - \frac{|a-b|}{a+b}\right) \log_2 \left[\frac{a+b-|a-b|}{2(a+b)} \right] \right\} - \frac{c+d}{2} \left\{ \left(1 + \frac{|c-d|}{c+d}\right) \log_2 \left[\frac{c+d+|c-d|}{2(c+d)} \right] + \left(1 - \frac{|c-d|}{c+d}\right) \log_2 \left[\frac{c+d-|c-d|}{2(c+d)} \right] \right\},$$

$$Q_4(\rho) = S(\rho^A) - S(\rho^{AB}) - \frac{1+\Gamma}{2} \log_2 \left(\frac{1+\Gamma}{2} \right) - \frac{1-\Gamma}{2} \log_2 \left(\frac{1-\Gamma}{2} \right),$$

其中 $\Gamma = \sqrt{(a-b+c-d)^2 + 4(|w|+|z|)^2}$ 。对 B 和 A 测量时, 得到的结果不相同。由于对于一个两比特量子态, 包含的经典和量子关联一定, 无论对系统 B 或者 A 测量, 得到的经典和量子关联的结果应该一样, 所以对具体的任意态 (X 型密度矩阵), 我们取 $Q_B(\rho)$ 和 $Q_A(\rho)$ 相等的情况。对于特殊情形 $a = d$ 或者 $b = c$, (2) 式和 (3) 式相等。因此, 我们推广了以前的研究到任意 X 型密度矩阵, 并且 X 型密度矩阵推广到包含七个参数。若有密度矩阵 $\rho = \frac{x}{6}|\varphi^+\rangle\langle\varphi^+| + \frac{3-x}{6}|11\rangle\langle 11| + \frac{2-x}{6}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{6}|10\rangle\langle 10|$, 这里 $|\varphi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$ 是贝尔态。由 (2) 式和 (3) 式通过数值计算, 得到量子失协和纠缠 [5] 的计算如图 1 所示。从图中可看出, 对 B 和 A 的测量之后得到的量子失协在大部分区域相同, 即在 x 的取值在 $[0, 0.6782]$ 这段区间时完全重合, 根据上面的结果, 我们取前面重合的取值部分。而纠缠随变量 x 的增加却保持不变。由此我们可知量子失协和纠缠是两种不同的度量量子关联的手段。

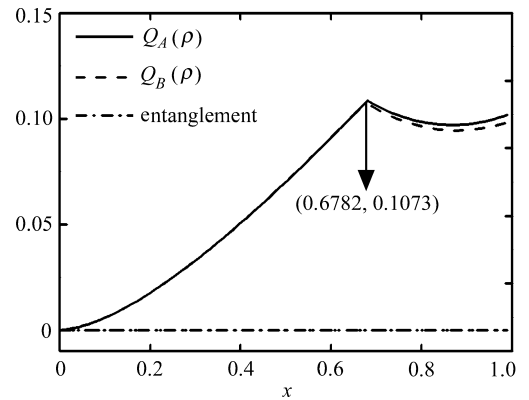


Fig.1 The evolution behavior of quantum discord and entanglement changes with variable x for the above initial state

3 模型

考虑两个非耦合的二能级量子比特系统, 每一个比特独立耦合外部的玻色子场 [25]。在旋波近似下, 整个系统的哈密顿量写成

$$H = \sum_{j=1,2} \frac{\omega_0}{2} \sigma_+^{(j)} \sigma_-^{(j)} + \sum_{j=1,2} \sum_k \omega_k^{(j)} a_k^{(j)+} a_k^{(j)} + \sum_{j=1,2} \left(\sigma_+^{(j)} \sum_k g_k^{(j)} a_k^{(j)} + \sigma_-^{(j)} \sum_k g_k^{(j)*} a_k^{(j)+} \right), \tag{4}$$

ω_0 是两个二能级系统的转换频率。 $\sigma_+^{(j)}(\sigma_-^{(j)}, j = 1, 2)$ 是第 j 个比特的上升(下降)算符, 两个独立的库分别以合适的频率 $\omega_k^{(j)}$ 描述。 $a_k^{(j)+}$ 和 $a_k^{(j)}$ 分别是第 j 个库中第 k 个模的产生和湮灭算符。方程(4)中的哈密顿量可以用来描述许多不同的物理系统。

假定两个比特开始处在单一激发态的叠加, 两个库分别处在真空态。在单一激发下, $t(t > 0)$ 时刻整个系统的态写成

$$|\psi(t)\rangle = [A(t)|10\rangle + B(t)|01\rangle] |0_k^{(1)}0_k^{(2)}\rangle + |00\rangle \left[\sum_k C_k^{(1)}(t) |1_k^{(1)}0_k^{(2)}\rangle + \sum_k C_k^{(2)}(t) |0_k^{(1)}1_k^{(2)}\rangle \right]. \quad (5)$$

首先将相互作用哈密顿量从薛定谔表象转换到相互作用表象, 然后将(5)式代入相互作用表象中的薛定谔方程, 得到两个积分微分方程

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = - \int_0^t A(s)g_1(t-s)ds \\ \dot{B}(t) = - \int_0^t B(s)g_2(t-s)ds \end{cases}, \quad (6)$$

积分表达式 $g_j(t-s)$ 是相干函数, 在连续谱的情况下写成^[24]

$$g_j(t-s) = \int d\omega J_j(\omega) e^{i(\omega_0 - \omega)(t-s)}, \quad (7)$$

$J_j(\omega)$ 是第 j 个库的光谱密度。

我们还可以用投影算符技术来求解^[24] 上述模型, 运用二阶 NZ 主方程可得到

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_s(t)}{dt} = & - \sum_{j=1,2} \int_0^t ds \left\{ G_j(t-s) \text{Tr}_R(a_k a_k^+ \rho_B) [\sigma_+^j, \sigma_-^j \rho_s(t)] - G_j(t-s) \text{Tr}_R(a_k^+ a_k \rho_B) [\sigma_+^j, \rho_s(t) \sigma_-^j] + \right. \\ & \left. G_j^*(t-s) \text{Tr}_R(a_k^+ a_k \rho_B) [\sigma_-^j, \sigma_+^j \rho_s(t)] - G_j^*(t-s) \text{Tr}_R(a_k a_k^+ \rho_B) [\sigma_-^j, \rho_s(t) \sigma_+^j] \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

这里 $G_j(t-s)$ 是相关函数, 在库的温度 $T = 0$ K 时与 $g_j(t-s)$ 是相同的, ρ_B 是库的密度算符。由初始条件, 方程(8)简化为

$$\frac{d\rho_s(t)}{dt} = \sum_{j=1,2} \int_0^t ds \left\{ \begin{array}{l} g_j(t-s) [\sigma_-^j \rho_s(s), \sigma_+^j] \\ + g_j^*(t-s) [\sigma_-^j, \rho_s(s) \sigma_+^j] \end{array} \right\}, \quad (9)$$

同样, 二阶 TCL 主方程也能得到, 即将(9)式右边的 $\rho_s(s)$ 用 $\rho_s(t)$ 代替。给定光谱密度和初始条件, 就很容易求解两比特系统的动力学特征。

4 量子失协动力学

由前面的结果, 我们接着研究两比特系统量子失协的时间演化行为, 来测试主方程方法的有效性。首先假定库的密度为失谐的洛伦兹光谱密度^[24]

$$J_1(\omega) = J_2(\omega) = J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma_0 \lambda^2}{(\omega_0 - \omega - \Delta)^2 + \lambda^2}, \quad (10)$$

式中 λ 是光谱耦合宽度参数, 它与库的相干时间成反比。 γ_0 是在马尔科夫频谱极限下两个比特的激发态的衰变速率, Δ 表示失谐量。其次假定两原子初始处在贝尔态 $\sqrt{\frac{1}{2}}|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|01\rangle$, 为最大纠缠态。运用

(10) 式和初始条件, 可以得到两比特系统的动力学演化规律, 图 2~4 描绘了量子失协动力学的精确解和近似解的比较结果。

图 2 描绘了在大失谐的情况下 $\Delta = 20\lambda$, 弱的非马尔科夫区域系统的量子失协随时间的演化行为。从图中可清晰地看到, 两类主方程的解与精确解完全符合。由于库的耗散作用, 两比特系统的量子失协随时间增加逐渐减小, 同时因为在弱的非马尔科夫区域, 此时的库具有短的记忆时间, 所以量子失协呈现出时大时小的现象, 变大意味着两个库把信息返回给各自的量子比特, 最后两比特失协为零而成为分离态。虽然在大失谐时, 这两种主方程的解在任何耦合区域都与精确解完全一致, 但是 TCL 方法更可取, 因为 TCL 方法不包含对过去时间的积分, 它的求解过程比 NZ 方法的求解过程更容易。

图 3 描绘了在小失谐 $\Delta = 0.1\lambda$, 马尔科夫区域两比特系统的量子失协随时间的演化规律。在马尔科夫区域, 由于库的相干时间很短, 库没有记忆效应, 所以系统的量子失协不会出现恢复现象, 图中显示了两比特系统的量子失协很快被库耗散为零。在长和短的时间内, TCL 解和 NZ 解均与精确解完全相同, 并且两比特系统始终把信息传给库, 直至信息完全被库耗散到外界环境中。从图 3 插入的小图可以看到, 在中间一小段时间内, 三种解的结果出现小差异, 这种不同在马尔科夫区域可以忽略, 因为在这个区域, 库的耗散作用很大, 在强耗散马尔科夫库中这种差异可以不计。

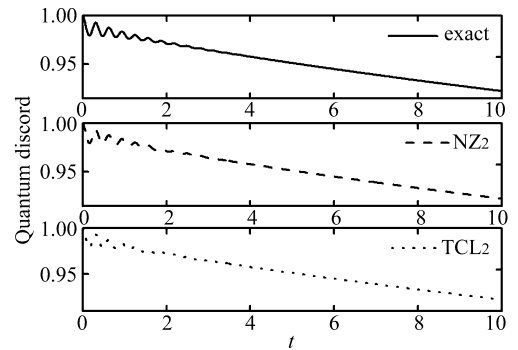


Fig.2 In the detuning spectral density $\lambda = \gamma$ and $\Delta = 20\lambda$, the dynamical behavior of quantum discord of system evolves time for two qubits in the initial Bell state $\sqrt{\frac{1}{2}}|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|01\rangle$ and reservoirs in the vacuum state

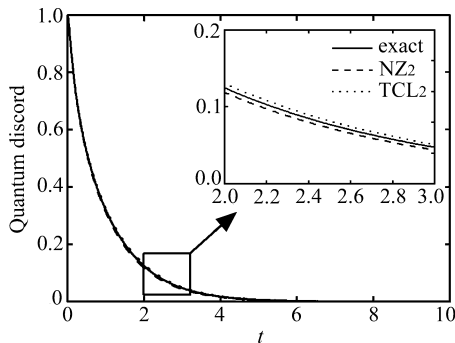


Fig.3 In the detuning spectral density $\lambda = 20\gamma$ and $\Delta = 0.1\lambda$, the evolution behavior of quantum discord of system changes with time for two qubits in the initial Bell state $\sqrt{\frac{1}{2}}|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|01\rangle$

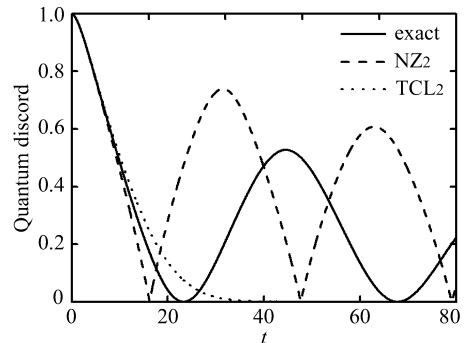


Fig.4 In the detuning spectral density $\lambda = 0.01\gamma$ and $\Delta = 0.1\lambda$, the quantum discord of system evolves with time for two qubits in the initial Bell state $\sqrt{\frac{1}{2}}|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|01\rangle$

图 4 描绘了在小失谐即近共振时, 在强的非马尔科夫区域系统的量子失协的演化行为。从图中可看出在短时间内, 两种解都能精确地描写系统的量子失协动力学。但是长时间内 TCL 解是不合适的, 因为它不能描写精确解所呈现的量子失协的振荡行为, 也就是量子失协的恢复和死亡现象。原因主要是这里的库具有长的相干时间与强的记忆效应, 使得两比特系统的量子失协从初始减小变化为稍后有增加, 但是每次增加的最大值比上一次的最大值小, 因为被传到库里面的信息有一部分耗散了。NZ 解虽然呈现出振荡行为并且在某些时间点量子失协为零, 但曲线不光滑。因此在这个耦合区域, 这两种方法都不能准确地描述

两比特系统的动力学特征。

由以上可知,在失谐的光谱密度下, TCL 方法和 NZ 方法都表现出精确解所呈现的行为,这与共振洛伦兹光谱密度下相比,呈现出不同的特征^[26]。由于 NZ 解包含对过去时间的积分,在解法上比 TCL 复杂,因此在非马尔科夫区域,对于不同的光谱密度应采取不同的投影算符方法。

5 结 论

在失谐的光谱密度下,用不同的非马尔科夫方法求解和比较与库独立相互作用的两个非耦合量子比特系统的量子失协动力学,进一步使用这个模型来证实 NZ 方法和 TCL 方法应用于不同的耦合区域。一般说来,在研究量子失协动力学时, NZ 方法和 TCL 方法要合适运用到不同的耦合区域。由于考虑的是失谐的光谱密度,所以我们包含和推广了过去对洛伦兹光谱密度的研究^[27]。最后我们注意的是这个模型是两个非耦合量子比特,在实际应用中非常普遍,如两个非耦合量子点。对于两个耦合的量子比特^[26],我们也可以这个模型的求解方法来比较,得到的结果是相似的。

参考文献:

- [1] Nielsen M A, Chuang II. *Quantum Computation and Quantum Information* [M]. England: Cambridge University Press, 2006: 500-522.
- [2] Ma Ganglong, Zha Xinwei. Probabilistic teleportation of four particles W state [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2010, 27(3): 308-313 (in Chinese).
- [3] Wang Qiong, Liao Jieqiao, Zeng Haosheng. Quantum thermal discord in a two-spin-1/2 XXZ model [J]. *Chin. Phys. B*, 2010, 19(10): 100311.
- [4] Pan Guixia. Quantum information splitting of arbitrary two-particle state using two GHZ states [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2010, 27(5): 573-579 (in Chinese).
- [5] Zhang Caihua, Sachuerfu, Gerele. Quantum entanglement in a system of squeezed coherent state light field interacting with two entanglement atoms [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2010, 27(1): 57-62 (in Chinese).
- [6] Ollivier H, Zurek W H. Quantum discord: A measure of the quantumness of correlation [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, 88(1): 017901.
- [7] Ji Yinghua, Xu Lin. Entanglement decoherence of coupled superconductor qubits entangled states in non-Markovian environment [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2011, 28(1): 58-64 (in Chinese).
- [8] Luo Shunlong. Quantum discord for two-qubit systems [J]. *Phys. Rev. A*, 2008, 77(4): 042303.
- [9] Jin Xianmin, Röch Jürgen, Yin Juan, *et al.* Experimental non-local generation of entanglement from independent sources [J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2009, 26(7): 070302.
- [10] Song Shijie. Maximal violation of Bell inequality and for Werner state [J]. *Journal of University of Jinan* (济南大学学报), 2011, 25(1): 0094-0099 (in Chinese).
- [11] Werlang T, Souza S, Fanchini F F, *et al.* Robustness of quantum discord to sudden death [J]. *Phys. Rev. A*, 2009, 80(2): 024103.
- [12] Zhang Jian, Shao Bin, Zou Jian. Entanglement of two atoms in two-mode Roman coupled model with intrinsic decoherence [J]. *Chin. Phys. B*, 2009, 18(12): 5179-5189.

- [13] Wang Lincheng, Shen jian, Yi Xuexi. Discord under the influence of a quantum phase transition [J]. *Chin. Phys. B*, 2011, 20(5): 050306.
- [14] Modi K, Paterek T, Son W, *et al.* Unified view of quantum and classical correlations [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 104(8): 080501.
- [15] Dillenschneider R, Lutz E. Energetics of quantum correlation [J]. *Europe Phys. Lett.*, 2009, 88(5): 50003.
- [16] Satandy M S. Classical correlation and quantum discord in critical systems [J]. *Phys. Rev. A*, 2009, 80(2): 022108.
- [17] Cui J, Fan H. Correlation in the Grover search [J]. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2009, 43(4): 045305.
- [18] Werlang T, Souza S, Fanchin F F, *et al.* Robustness of quantum discord to sudden death [J]. *Phys. Rev. A*, 2009, 80(2): 024103.
- [19] Wang B, Xu Z Y, Chen Z Q, *et al.* Non-Markovian effect on the quantum discord [J]. *Phys. Rev. A*, 2010, 81(1): 014101.
- [20] Fanchini F F, Werlang T, Brasil C A, *et al.* Non-Markovian dynamics of quantum discord [J]. *Phys. Rev. A*, 2010, 81(5): 052107.
- [21] Nakajima S. On quantum theory of transport phenomena [J]. *Prog. Theor. Phys.*, 1958, 20(6): 948-959.
- [22] Zwanzig R. Ensemble method in the theory of irreversibility [J]. *J. Chem. Phys.*, 1960, 33(5): 1338-1341.
- [23] Chaturvedi S, Shibata F. Time-convolutionless projection operator formalism for elimination of fast variable application to Brownian motion[J]. *Z. Phys.*, 1979, 35(3): 297-308.
- [24] Breuer H P, Petruccione F. *Theory of Open Quantum Systems* [M]. Oxford University Press, 2002: 466-468.
- [25] Zhou Ling, Yi Xuexi, Song Heshan, *et al.* Thermal entanglement in 1D optical lattice chains with nonlinear coupling [J]. *Chin. Phys. B*, 2005, 14(6): 1168-1174.
- [26] Ferraro E, Scala M, Miquiore R, *et al.* Non-Markovian dissipative dynamics of two coupled qubits in independent reservoirs: comparison between exact solutions and master equation approaches [J]. *Phys. Rev. A*, 2009, 80(4): 042112.
- [27] Ferraro E, Scala M, Migliore R, *et al.* On the validity of non-Markovian master equation approaches for the entanglement dynamics of two-qubit systems [J]. *Phys. Scr.*, 2010, T140: 014042.