第12卷第11期 航 空 学 报 Vol. 12No. 11
1991年11月 ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA Nov. 1991

航线收益管理的边际分析方法

北京航空航天大学 官建成

A STUDY ON THE MARGINAL ANALYSIS METHOD FOR THE AIRLINE YIELD MANAGEMENT

Beijing University of Aeronautics and Astronautics Guan Jiancheng

摘 要 本文首先综述了航线运输收益管理中两票价等级的最优运营方法的历史与现状，指出了各个经典公式的限制条件和公式推导的不严密性。然后，利用边际分析方法详细推导了一个新的最优座位安排的通用公式，对该领域的传统公式作了重要更正。最后，通过实例分析、计算并与传统公式相比，表明新公式在理论上较为完善，在工程上也实用、简便。

关键词 航线收益管理，座位存贮控制，边际分析

Abstract The current situation and the history of two-fare-class seat inventory control problem for the airline yield management in air transportation of the passengers are first overviewed. Then a new marginal analytical method determining the optimal allotment for two-class problem is presented, with an emphasis on the theoretical aspects of the problem as compared with the traditional formulae. Based on the fact that the passengers' demand number is a discrete random variable the formula deduction is demonstrated in detail. The formula obtained in this paper which shows that the optimal seat allotment relates to the distributions of both high-fare demand and low-fare one has made the important corrections for the traditional formulae in this field. Contrasting the formula deduced in the paper with the traditional formulae it can be shown by the results of the computational example with the new formula that the method is more accurate and practical.

Key words airline yield management, seat inventory control, marginal analysis

一、问题的背景

座位存贮控制是航线收益管理领域研究的主要内容，也是航空公司制订航线计划以及实施航线计划所需研究的一个子问题[1]。航线收益管理问题的实质是如何控制各种等级的座位数，使得既基本满足旅客以及货物的随机需求，又使得航空公司运营的经济效益尽可能的好，这实际上是一个如何将飞机的容量与（预测的）旅客的需求正确匹配的问题[2]。

显然，当某个等级的座位数多于该等级顾客数的需求时，将产生过量损失。而当某个等级的座位数小于该等级旅客的需求量时，则将产生不足损失。因此，上述问题又可归结于如何选择合适的座位数等级划分及票价政策，以使得机会损失之和尽可能的小。

1990年8月25日收到，1991年1月10日收到修改稿

1972年，K. Littlewood给出了一个优化公式[3]

$$f_1 \geqslant \bar{P}_2(\bar{S}_2^*) f_2 \tag{1}$$

其中f_1、f_2分别为该次航班飞行的低、高等级的平均票价。$\bar{P}_2(\bar{S}_2^*)$ 是高等级旅客数大于等于$\bar{S}_2^*$的概率，即逆向累积分布（the inverted cumulative distribution），$\bar{S}_2^*$即为高票价等级的最优座位划分。公式(1)若成立，则低票价等级的旅客就可接受。由于该公式的推导过程并未给出，所以，尽管该公式能够较为粗糙地进行座位等级划分，但并不被广泛接受。

随后，在假设旅客需求量是连续型随机变量的前提下，人们建立了以下公式

$$\frac{f_1}{f_2} = \int_{c-\bar{S}_1^*}^{\infty} g_2(y)\,dy \tag{2}$$

其中 c 是飞机可容纳旅客的总容量；f_1、f_2 如上述；$\bar{S}_1^*$ 是低票价等级的最优座位划分；g_2是高票价等级旅客需求量的概率密度函数。实质上，式(2)仅是式(1)的一个变种。

1982年汉莎航空公司（Lufthansa）的研究员 H. Richter 推出了一个差分收入方法[4]，其假设前提是附加一个座位给低票价等级所产生的高票价等级的收入损失与低票价等级的附加收益恰好相等。在此前提下，Richter得出座位划分的最优性条件为

$$\frac{f_1}{f_2} = \bar{P}_2(c - \bar{S}_1^* + 1) \tag{3}$$

式(1)～式(3)共同的特点是低票价等级的旅客需求概率分布居然对座位的最优划分没有影响。由于H. Richter给出了式(3)的推导过程，所以(3)式已被较广泛地接受，并一直沿用至今。继H. Richter之后，在假设旅客需求量是连续可微的随机变量的前提下，采用偏微分的方法，可得出最优性条件为

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\bar{P}_1(\bar{S}_1^*)}{\bar{P}_2(\bar{S}_2^*)} \tag{4}$$

式(4)表明，低票价等级的逆向概率累积分布$\bar{P}_1(\bar{S}_1^*)$ 亦对最优划分有影响，这显然较前几个公式更为合理。然而，由于假设了旅客需求是连续型随机变量与实际不符，特别是对中、小型客机，由于圆整所产生的计算误差就可能太大，甚至不能接受。因此，有必要从根本上解决最优性公式不精确的问题。

二、用于二座位等级最优划分问题的边际分析方法

设r_1、r_2分别为低、高票价等级旅客的需求量，不失一般性；设 r_1、r_2 均为离散型随机变量，其概率分布律分别为$P_1(r_1)$、$P_2(r_2)$。S_1、S_2 分别为低、高票价等级的座位划分，显然：

$$S_1 + S_2 = c \quad 或 \quad S_2 = c - S_1$$

严格地推导总收入函数以及最优性条件。当$r_1 \leqslant S_1$，则低票价等级的旅客的部分期望收入为

$$\sum_{r_1=0}^{S_1} f_1 r_1 P_1(r_1)$$

当$r_1>S_1$，则部分期望收入为

$$\sum_{r_1=S_1+1}^{\infty} f_1 S_1 P_1(r_1)$$

即，低票级的期望收入为

$$f_1\left[\sum_{r_1=0}^{S_1} r_1 P_1(r_1)+S_1\sum_{r_1=S_1+1}^{\infty} P_1(r_1)\right]$$

当$r_2\leqslant S_2=c-S_1$，则高票价等级旅客的部分期望收入为

$$\sum_{r_1=0}^{c-S_1} f_2 r_2 P_2(r_2)$$

当$r_2>c-S_1$，则部分期望收入为

$$\sum_{r_2=c-S_1+1}^{\infty} f_2(c-S_1)P_2(r_2)$$

即，高票价等级的期望收入为

$$f_2\left[\sum_{r_2=0}^{c-S_1} r_2 P_2(r_2)+(c-S_1)\sum_{r_2=c-S_1+1}^{\infty} P_2(r_2)\right]$$

因此，可得出作为S_1函数的总收入表达式为

$$R(S_1)=f_1\left[\sum_{r_1=0}^{S_1} r_1 P_1(r_1)+S_1\sum_{r_1=S_1+1}^{\infty} P_1(r_1)\right]+f_2\left[\sum_{r_2=0}^{c-S_1} r_2 P_2(r_2)+(c-S_1)\sum_{r_2=c-S_1+1}^{\infty} P_2(r_2)\right] \quad (5)$$

为求出$S_1^*=c-S_2^*$，以使$R(S_1^*)$最大。

显然，若S_1^*是低票价等级座位的最优划分，则边际分析公式

$$R(S_1^*)\geqslant R(S_1^*+1) \quad (6)$$

$$R(S_1^*)\geqslant R(S_1^*-1) \quad (7)$$

把式(5)代入式(6)，并注意到

$$f_1\sum_{r_1=0}^{S_1^*} r_1 P_1(r_1)-f_1\sum_{r_1=0}^{S_1^*+1} r_1 P_1(r_1)=-f_1(S_1^*+1)P_1(S_1^*+1)$$

$$f_1 S_1^*\sum_{r_1=S_1^*+1}^{\infty} P_1(r_1)-f_1(S_1^*+1)\sum_{r_1=S_1^*+2}^{\infty} P_1(r_1)$$

$$=f_1 S_1^* P_1(S_1^*+1)-f_1\sum_{r_1=S_1^*+2}^{\infty} P_1(r_1)$$

$$f_2\sum_{r_2=0}^{c-S_1^*} r_2 P_2(r)_2-f_2\sum_{r_2=0}^{c-S_1^*-1} r_2 P_2(r_2)$$

$$=f_2(c-S_1^*)P_2(c-S_1^*)$$

$$f_2(c-S_1^*)\sum_{r_2=c-S_1^*+1}^{\infty} P_2(r_2)-f_2(c-S_1^*-1)\sum_{r_2=c-S_1^*}^{\infty} P_2(r_2)$$

$$=-f_2(c-S_1^*)P_2(c-S_1^*)+f_2\sum_{r_2=c-S_1^*}^{\infty} P_2(r_2)$$

所以有

$$R(S_1^*)-R(S_1^*+1)=-f_1\sum_{r_1=S_1^*+1}^{\infty}P_1(r_1)+f_2\sum_{r_2=c-S_1^*}^{\infty}P_2(r_2)\geqslant 0 \tag{8}$$

仍令$\bar{P}_i(S_i^*)$为逆向概率累积分布，于是有

$$-f_1\bar{P}_1(S_1^*+1)+f_2\bar{P}_2(c-S_1^*)\geqslant 0$$

或

$$\frac{f_2}{f_1}\geqslant\frac{\bar{P}_1(S_1^*+1)}{\bar{P}_2(c-S_1^*)} \tag{9}$$

同理，由式(5)～式(7)，类似上述推导可得

$$\frac{f_2}{f_1}\leqslant\frac{\bar{P}_1(S_1^*)}{\bar{P}_2(c-S_1^*+1)} \tag{10}$$

结合式(9)与式(10)，最优划分的最优性条件为

$$\frac{\bar{P}_1(S_1^*+1)}{\bar{P}_2(c-S_1^*)}\leqslant\frac{f_2}{f_1}\leqslant\frac{\bar{P}_1(S_1^*)}{\bar{P}_2(c-S_1^*+1)} \tag{11}$$

或

$$\frac{\bar{P}_1(S_1^*+1)}{\bar{P}_2(S_2^*)}\leqslant\frac{f_2}{f_1}\leqslant\frac{\bar{P}_1(S_1^*)}{\bar{P}_2(S_2^*+1)} \tag{12}$$

三、实 例 分 析

某航线Y型机容量$c=36$，已知$f_1=130$元，$f_2=200$元，统计数据表明[5]，旅客需求量可用泊松分布拟合其经验分布。已知低、高票价等级的旅客分布服从参数分别为$\lambda_1=15$、$\lambda_2=13$的泊松分布，即

$$P_1(r_1=n)=e^{-15}\frac{15^n}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$P_1(r_2=n)=e^{-13}\frac{13^n}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots$$

其分布分别如下表所示，其中表中符号

$$F_i(n)=P(r_i\leqslant n)$$
$$\bar{P}_i(n)=P(r_i\geqslant n)\qquad i=1,2$$
$$P_i(n)=P(r_i=n)$$

对$\lambda_1=15$：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1(n)$	0	0	0	0	0.001	0.003	0.008	0.018	0.037	0.07	0.118
$\bar{P}_1(n)$	1	1	1	1	1	0.999	0.997	0.992	0.982	0.963	0.93
$P_1(n)$	0	0	0	0	0.001	0.002	0.005	0.01	0.019	0.033	0.048

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$F_1(n)$	0.185	0.268	0.363	0.466	0.568	0.664	0.749	0.819	0.875	0.917
$\bar{P}_1(n)$	0.882	0.815	0.732	0.637	0.534	0.432	0.336	0.251	0.181	0.125
$P_1(n)$	0.067	0.083	0.095	0.103	0.102	0.096	0.085	0.07	0.056	0.042

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$F_1(n)$	0.947	0.967	0.981	0.989	0.994	0.997	0.998	0.999	1.0	1.0
$\bar{P}_1(n)$	0.083	0.053	0.033	0.019	0.011	0.006	0.003	0.002	0.001	0
$P_1(n)$	0.03	0.02	0.014	0.008	0.005	0.003	0.001	0.001	0.001	0

对$\lambda_2=13$：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_2(n)$	0	0	0	0.001	0.004	0.011	0.026	0.054	0.100	0.166	0.252
$\bar{P}_2(n)$	1	1	1	1	0.999	0.996	0.989	0.974	0.946	0.900	0.834
$P_2(n)$	0	0	0	0.001	0.003	0.007	0.015	0.028	0.046	0.066	0.086

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$F_2(n)$	0.353	0.463	0.573	0.675	0.764	0.835	0.890	0.930	0.957
$\bar{P}_2(n)$	0.748	0.647	0.537	0.427	0.525	0.236	0.165	0.110	0.070
$P_2(n)$	0.101	0.110	0.110	0.102	0.089	0.071	0.055	0.040	0.027

n	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$F_2(n)$	0.975	0.986	0.992	0.996	0.998	0.999	0.999	1.0	1.0
$\bar{P}_2(n)$	0.043	0.025	0.014	0.008	0.004	0.002	0.001	0.001	0
$P_2(n)$	0.018	0.011	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0	0

由$f_2/f_1=1.5385$，由式(11)或式(12)从上表可解得当$S_1=19$、$S_2=17$时，有

$$\bar{P}_1(S_1+1)=\bar{P}_1(20)=0.125 \qquad \bar{P}_1(S_1)=\bar{P}_1(19)=0.181$$

$$\bar{P}_2(S_2)=\bar{P}_2(17)=0.165 \qquad \bar{P}_2(S_2+1)=\bar{P}_2(18)=0.110$$

由于

$$\frac{\bar{P}_1(20)}{\bar{P}_2(17)}=0.758<f_2/f_1=1.5385, \qquad \frac{\bar{P}_1(19)}{\bar{P}_2(18)}=1.645>\frac{f_2}{f_1}$$

所以，最优划分为

$$S_1^*=19、S_2^*=17$$

此时，由式(5)计算得最大总收入为

$$R(S_1^*)=4450.99\text{元}$$

若采用传统式(3)计算，则由

$$\frac{f_1}{f_2}=0.65=\bar{P}_2(c-S_1+1), \quad \bar{P}_2(12)<0.65<\bar{P}_2(11)$$

解得

$$c-S_1+1=12 \quad 或 \quad c-S_1+1=11$$

即

$$S_1=25 \quad 或 \quad S_1=24$$

此时，由式（5）得

$$R(25)=4025.51\text{元}，R(24)=4153.48\text{元}$$

即由传统公式（3）得出的最优划分为 $\bar{S}_1^*=24$，$\bar{S}_2^*=12$，但此时的总收入却比本文导出的式(11)或式(12)的计算结果要少7%以上。

对各型客机以及各种票价、各种分布的情形作了计算。尽管传统公式（3）与式(11)或式(12)的差值不尽相同，但结果表明，无论哪种情形，新公式均是优于传统公式的。

四、结 束 语

式(11)或式(12)可适于任意容量的飞机的两票价等级的最优划分问题。最优性条件是一组不等式，最优划分既取决于票价，还同时取决于两种座位等级的旅客概率分布，这显然与我们的直观认识与实践相吻合。

在已知票价的情况下可采用式(11)或式(12)对座位数进行最优划分。若已给定了座位划分，亦可采用式(11)、式(12)决定票价政策。

式(11)与式(12)比较起迄今为止的任一公式都更为精确，理论上也更为完善，还可避免“圆整化”带来的任意大小的误差，这是由于本公式的推导没有附加任何假设条件。

参 考 文 献

1 Guan Jiancheng. An Overview of Fleet Planning Problems. Semi. Symp. fuer Luftver. und Trans. Uni. Karls. BRD, 1989; 17～26

2 Belobaba P P. Airline Yield Management, An Overview of Seat Inventory Control. Trans. Sci. 1987; 21: (2)63～73

3 Littlewood K. Forecasting and Control of Passengers Bookings. AGIFORS Symp. Proc. 12, 1972; 95～117

4 Richter H. The Differential Revenue Method to Determine Optimal Seat Allotments by Fare Type. AGIFORS Symp. Proc. 22, 1982; 339～362

5 Steenge R, Tilanus E W. Yield Management and Operation Research. AGIFORS Symp. Proc. 27, 1987; 228～238