

复变函数与数值法相结合计算复合 材料层合板的应力场

南京航空学院 王林江 林佳铿

STRESS CALCULATION IN A COMPOSITE PLATE BY COMPLEX FUNCTION AND NUMERICAL METHOD

Nanjing Aeronautical Institute Wang Linjiang and Lin Jiakeng

摘要 在各向异性数学弹性理论的基础上,把复应力函数 $\phi_1(z_1)$ 和 $\phi_2(z_2)$ 分别在 z_1 和 z_2 平面的域内展开成复Taylor级数,并用边界配点最小二乘法确定级数系数,从而计算受面内载荷作用单连通复合材料层合板的应力场。文中进行了算例分析,给出了应力随级数项数和边界所配点数的变化曲线。结果表明,本方法具有形式简单、原始数据准备工作量小、计算精度高、所需计算机容量小和计算时间短等特点。

关键词 应力分析,复合材料板,配点法,解析法

Abstract On the basis of anisotropic mathematical and elastic theory, the complex stress functions $\phi_1(z_1)$ and $\phi_2(z_2)$ are respectively expanded into Taylor series in the regions of z_1 and z_2 planes. The boundary collocation method is used to determine the coefficients of the series. Then, the stress field of a single-connected composite plate loaded by inplane loads can be calculated. Two examples are given, the effects of the number of stress function terms and the boundary points on calculating results are discussed. It is shown that this method is very convenient and precise to handle single-connected linear-elastic plane problems.

Key words stress analysis, composite plate, boundary collocation, analytic method

一、引言

计算各种形状复合材料层合板的应力场,已成为当前迫切需要解决的问题之一。我们已研究了含有多个椭圆孔的无限大和有限大小复合材料层合板的应力场计算^[1,2],还研究了含有一个椭圆刚性加强框的有限大小复合材料层合板的应力计算^[3]。本文研究单连通复合材料板的应力场计算。

二、分析方法

如图1所示为一单连通复合材料板,边界上作用有任意分布的面内平衡载荷 P_x 。假设各铺

1990年7月13日收到,1990年12月10日收到修改稿

层在同一坐标点上应变相同，因此建立起宏观均匀各向异性板模型。用应力函数 $U_{x,y}$ 表示的板的基本方程为^[4]

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

其中 $a_{ij} (i, j=1, 2, 6)$ 为板的弹性柔量。

方程(1)的特征方程为

$$a_{22} \mu^4 - 2a_{26} \mu^3 + (2a_{12} + a_{66}) \mu^2 - 2a_{16} \mu + a_{11} = 0 \quad (2)$$

对于所有理想弹性体，方程(2)只存在两对共轭复根 $\mu_1, \bar{\mu}_1$ 和 $\mu_2, \bar{\mu}_2$ 。

方程(1)的通解形式为

$$U = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \overline{F_1(z_1)} + \overline{F_2(z_2)} \quad (3)$$

其中 $z_1 = x + \mu_1 y, z_2 = x + \mu_2 y$ 。

令 $\varphi_1(z_1) = \frac{dF_1}{dz_1}$ 和 $\varphi_2(z_2) = \frac{dF_2}{dz_2}$

则可得板内应力表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\text{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \mu_j^2 \varphi_j'(z_j) \right] \\ \sigma_y &= 2\text{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \varphi_j'(z_j) \right] \\ \tau_{xy} &= -2\text{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \mu_j \varphi_j'(z_j) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

板的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos(N, x) + \tau_{xy} \cos(N, y) &= P_x \\ \tau_{xy} \cos(N, x) + \sigma_y \cos(N, y) &= P_y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 $\cos(N, x)$ 和 $\cos(N, y)$ 为边界点外法线的方向余弦。 P_x 和 P_y 为 \vec{P}_s 在 x 和 y 方向的投影。

因 $\varphi_1(z_1)$ 和 $\varphi_2(z_2)$ 为板内的解析函数，并连续到边界上，故在 z 平面的板内任取一点 z_0 ，变换到 $z_j (j=1, 2)$ 平面上为 z_{0j} ，以 z_{0j} 为中心，把 $\varphi_j(z_j)$ 展开成复Taylor级数得

$$\varphi_j(z_j) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{jn} (z_j - z_{0j})^n \quad (j=1, 2) \quad (6)$$

把(6)式中的 $\varphi_j(z_j)$ 对 z_j 求一次导数并代入(4)式得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\text{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \mu_j^2 \sum_{n=1}^{\infty} C_{jn} n (z_j - z_{0j})^{n-1} \right] \\ \sigma_y &= 2\text{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} C_{jn} n (z_j - z_{0j})^{n-1} \right] \\ \tau_{xy} &= -2\text{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \mu_j \sum_{n=1}^{\infty} C_{jn} n (z_j - z_{0j})^{n-1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

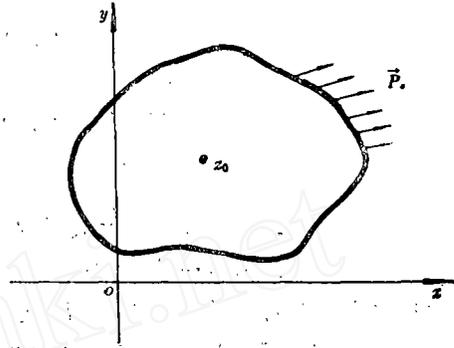


图1 受面内载荷作用的单连通复合材料板

$$\tau_{xy} = -2\text{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \mu_j \sum_{n=1}^{\infty} C_{jn} n (z_j - z_{0j})^{n-1} \right]$$

把(7)式代入边界条件(5)式, 整理后得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} (A_{xjn} C_{jn} + \overline{A_{xjn} C_{jn}}) &= P_x \\ \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} (A_{yjn} C_{jn} + \overline{A_{yjn} C_{jn}}) &= P_y \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中

$$A_{xjn} = n\mu_j [\mu_j \cos(N, x) - \cos(N, y)] (z_j - z_{0j})^{n-1}$$

$$A_{yjn} = -A_{xjn} / \mu_j$$

这样边界上的每一点就可对应得到(8)式中的两个无限复系数线性方程。实际计算时级数取有限项 N 。另外边界上所配点的总数设为 M , 则可得到一个由下列矩阵表示的复系数线性方程组

$$[A]\{C\} = \{P\} \quad (9)$$

其中 $[A]$ 为由 A_{xjn} , A_{yjn} 和它们的共轭所组成的 $2M \times 4N$ 阶矩阵, $\{C\}$ 为由 C_{jn} 和 $\overline{C_{jn}}$ 组成的列阵, $\{P\}$ 为由 P_x 和 P_y 组成的列阵。

通常 $2M > 4N$, 故(9)式是一个矛盾线性方程组, 由 $[A]^H$ 左乘(9)式两边得下列相容线性方程组

$$[A]^H[A]\{C\} = [A]^H\{P\} \quad (10)$$

从中解得的 $\{C\}$ 即为(9)式的最小二乘解。

确定了级数系数 a_n 和 b_n 后, 可用(7)式计算板内和边界上任一点的应力。根据同一坐标点应变一致的假定, 能计算各铺层的应力, 进而计算层合板的强度。

三、算例分析

例1 如图2所示的矩形板, 板的铺层为 $[45/-45]_s$, 材料为碳/环氧复合材料; 板的弹

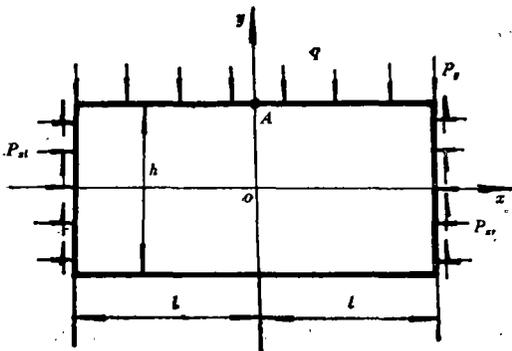


图2 受面内载作用的矩形板

性柔量为 $a_{11} = a_{22} = 56.90(\text{TPa})^{-1}$, $a_{12} = -39.62(\text{TPa})^{-1}$, $a_{66} = 39.10(\text{TPa})^{-1}$, $a_{16} = a_{26} = 0$ 。两个复参数为 $\mu_1 = 0.8205 + 0.5717i$, $\mu_2 = -0.8205 + 0.5717i$, 板的上边作用有均布压力 q , 板的左右两边作用有与 q 相平衡的切向分布载荷

$$P_y = 6q \frac{l}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

另外, 右边还作用有法向分布载荷

$$P_{xr} = -q \frac{2a_{12} + a_{66}}{2a_{11}} \frac{y}{h} \left(\frac{4y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right)$$

左边法向载荷为 $P_{xl} = -P_{xr}$ 。板内应力的精确表达式为^[5]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{6q}{h^3}(l^2-x^2)y - q \frac{2a_{12}+a_{66}}{2a_{11}} \left(\frac{4y^3}{h^3} - \frac{3y}{5h} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \left(1 + \frac{2y}{h} \right)^2 \\ \tau_{xy} &= \frac{6q}{h^3} x \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

计算时取 $h = 2l = 10\text{m}$, $q = 1\text{MPa}$, z_0 取在原点, 每边均匀配置 10 个点。表 1 给出

表 1 A点应力与级数项数N的关系

N	1	2	3	4	10	精确解
σ_x (MPa)	0.0000	0.0214	0.0214	-0.6807	-0.6807	-0.6807
σ_y (MPa)	0.5000	-0.8923	-0.8923	-1.0000	-1.0000	-1.0000
σ_{xy} (MPa)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

了板上A点3个应力分量随级数项数的变化情况, 从中可以看出, 当级数取4项时已与精确解相等。在板内和边界上任取一些点, 计算结果和精确解完全吻合。移动 z_0 的位置可得同样的结果。实际上从(11)式可以看出, 应力为坐标的3次表达式。而级数取4项时, (7)式中的应力也为坐标的3次表达式, 所以两者结果完全一致。

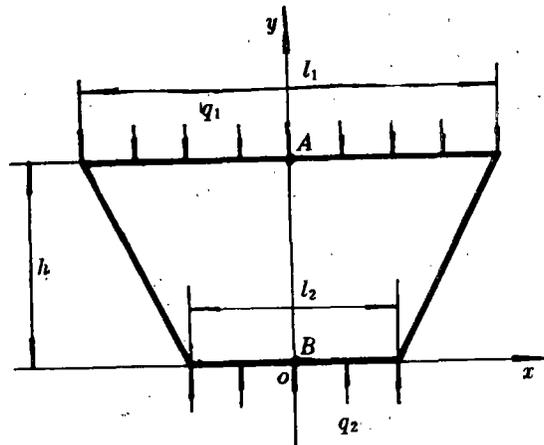
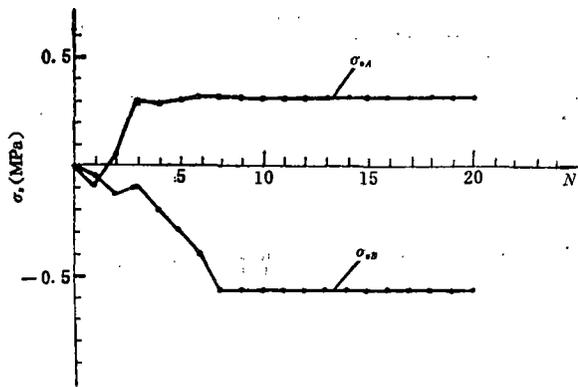
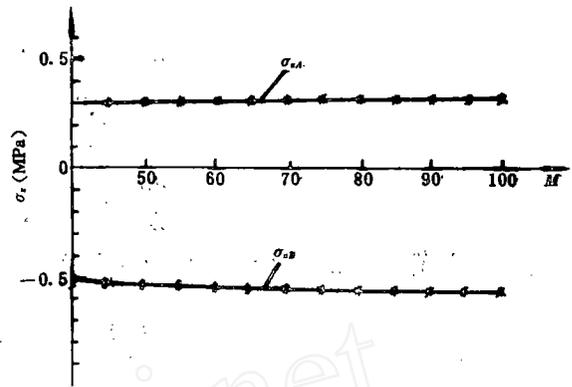


图 3 受面内载荷作用的对称梯形板

例 2 如图 3 所示的对称梯形板, 材料参数同上例, 上边和下边分别作用有相平衡的均布压力 q_1 和 q_2 , 计算时取 $l_1 = h = 2l_2 = 10\text{m}$, $z_0 = 5i$, $q_2 = 2q_1 = 2\text{MPa}$ 。图 4 给出了边界上均匀配置 100 个节点时上下边中点 x 方向的应力 σ_{xA} , σ_{xB} 随级数项数的变化情况, 从中可以看出 7 项以内曲线变化较大, 而 10 项以后曲线很平直。图 5 给出了级数取 18 项时 σ_{xA} , σ_{xB} 和边界所配点数的对应关系, 从中可以看出, 50 点以后结果很稳定。

从上述算例可以看出, 对于不同的几何外形和载荷形式, 级数的收敛状况是不一样的

图4 σ_{xA} , σ_{xB} 与级数项数 N 的对应关系图5 σ_{xA} , σ_{xB} 与边界所配点数 M 的对应关系

的。几何外形和载荷形式越复杂,达到一定的精度时,边界所配点数和级数所取项数就越多。

四、结 论

从上述分析可以看出,本文把经典的各向异性数学弹性理论中的复变函数方法与现代数值方法相结合,计算单连通各向异性弹性平面应力问题,充分发挥解析法和数值法各自的优点,具有简便、省力、省时,且计算精度高的优点,因此对于处理单连通各向异性弹性平面问题有它独特的方便之处。稍加推广,引入位移表达式后,能计算位移边界条件和混合边界条件下单连通复合材料板的应力场和位移场。

参 考 文 献

- 1 Charles E S Ueng, Jia-Keng Lin. Stress Concentration in Composite Laminates. *J of Engineering Mechanics* 1987; 113; (8) 1181~1193
- 2 Lin Jiakeng, Wang Linjiang. Stress Concentration in a Finite Width Laminate Containing Several Elliptical Holes. *Proceedings of 5th International Conference on Composite Structures, Scotland, July 1989*; 689~700
- 3 Wang Linjiang, Lin Jiakeng. Stresses in a Composite plate Containing an Elliptical Rigid Ring. *Second World Congress on Computational Mechanics, Germany, August 1990*
- 4 列赫尼茨基.胡海昌译.各向异性板.科学出版社, 1955; 14~36
- 5 李家宝.解析与数值结合法的理论及其应用.第一届全国解析与数值结合法会议论文集,湖南大学出版社,长沙1990; 1~5