

## 二维激波斜壁问题的数值研究

西北工业大学 毛根旺

### NUMERICAL SIMULATION OF 2-D OBLIQUE SHOCK-WAVE REFLECTIONS

Northwestern Polytechnical University Mao Genwang

**关键词** 网格生成, 数值流动显示, 激波, 非定常流。

**Abstract** In order to analyse the transport phenomena of oblique shock-wave, 2-D nonstationary oblique shock-wave reflections over compressive wedges in perfect air are investigated by using numerical simulation techniques in this paper. The operator splitting method, the MacCormack scheme, the FCT modification (instead of the FCT method with the control volume) and the adaptive grid generation techniques are used in the numerical simulation. The four composed cases in which the shock-wave Mach number ( $Ma_s$ ) are 1.027 and 4.0, and the oblique wall angles ( $\theta_w$ ) are  $10^\circ$  and  $30^\circ$ , are calculated. The results show that the three reflection shapes the regular reflection (RR), the simple Mach reflection (SMR) and composite Mach reflection (CMR), obtained by the classical pseudostationary theoretical analysis are in good agreement with the experimental results in references.

**Key words** grid generation, numerical simulation, shock-wave, unstead flow.

#### 1. 前言

在数值模拟激波构造时, 通常将流体看作理想流体, 即对 Euler 方程用有限差分法求解。有限差分法的优点是通用性强, 但将其用于计算激波问题时, 会在不连续波面附近产生数值衰减、过冲或欠冲, 难以进行精确计算。FCT (Flux-Corrected Transport Method) 法是 Boris 等<sup>(1)</sup> 开发的一种新的计算方法, 它能充分发挥有限差分法的长处, 可有效地计算激波问题。但是, 能对二维复杂形状的绕流进行数值研究还是在 Thompson 等开发了一般坐标变换和网格生成技术<sup>(2)</sup> 之后才开始的。现对使用控制体的 FCT 法进行改进, 并对非定常二维激波通过斜壁的反射形态进行数值模拟。计算结果与观测激波沿斜壁反射形态的实验吻合良好。

#### 2. 数理模型

激波以一定激波 Mach 数  $Ma_s$  向右传播(图 1), 遇到斜壁将产生复杂流动现象<sup>(3, 4)</sup>。为数值模拟上述流动, 假设流体为无粘理想流体, 因此流动可用 Euler 方程描述。无量纲 Euler 方程的形式如下

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

1990年5月10日收到, 1990年11月23日收到修改稿

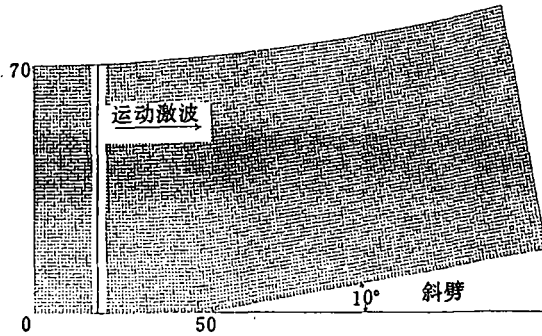


图1 计算网格

其中

$$\begin{aligned} \hat{U} &= [\rho, \rho u, \rho v, E]^T & \hat{F} &= [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (E+p)u]^T \\ \hat{G} &= [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (E+p)v]^T, & E &= [\rho / (\gamma - 1)] + \rho(u^2 + v^2) / 2 \quad (2) \\ & & p &= \rho T / \gamma Ma^2 \quad (3) \end{aligned}$$

流体介质为二原子分子理想气体, 比热比  $\gamma = 1.4$ 。

### 3. 数值计算

(1) 坐标变换与网格生成 取坐标变换函数  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ , 这时控制方程变为

$$\partial U / \partial t + \partial F / \partial \xi + \partial G / \partial \eta = 0 \quad (4)$$

其中  $U = J\hat{U}$ ,  $F = y_\eta \hat{F} - x_\eta \hat{G}$ ,  $G = -y_\xi \hat{F} + x_\xi \hat{G}$ ,  $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$

利用 Thompson 自适应网格生成技术<sup>(2)</sup>, 将物理平面上的网格在一定边界条件下, 根据求解 Poisson 方程进行分裂, 得到图 1 所示的计算网格。

(2) 演算子分裂法<sup>(5)</sup> 前述方程适合于解初值问题, 为了简化计算, 在通常条件下, 可将方程 (4) 作空间分裂, 即

$$L_\xi: (\partial U / \partial t) + (\partial F / \partial \xi) = 0 \quad (5)$$

$$L_\eta: (\partial U / \partial t) + (\partial G / \partial \eta) = 0 \quad (6)$$

对每一时间步可写成

$$U^{n+1} = L_\xi(\Delta t)L_\eta(\Delta t)L_\eta(\Delta t)L_\xi(\Delta t)U^n \quad (7)$$

演算子  $L_\xi$  和  $L_\eta$  利用后面介绍的 MacCormack 和 FCT 法计算。  $\Delta t$  根据 CFL 条件选取

$$\Delta t = \min \left\{ 0.2\Delta\xi_i / (|u_i| + \sqrt{\gamma T_i}), 0.2\Delta\eta_j / (|v_j| + \sqrt{\gamma T_j}) \right\} \quad (8)$$

这里,  $u_i$  和  $v_j$  分别为  $\xi$  和  $\eta$  方向的速度,  $T$  为温度。

(3) MacCormack 法<sup>(6)</sup> 对于非定常问题, 必须确立有效的非定常数值解法, 上述演算子  $L_\xi$  和  $L_\eta$  的 MacCormack 差分格式如下。

$$L_\xi: U_i^{(1)} = U_i - (\Delta t / \Delta\xi)(F_i - F_{i-1}) \quad (9)$$

$$U_i^{(2)} = \{U_i + U_i^{(1)} - (\Delta t / \Delta\xi)(F_{i+1}^{(1)} - F_i)\} / 2 \quad (10)$$

$$L_\eta: U_j^{(1)} = U_j - (\Delta t / \Delta\eta)(G_j - G_{j-1}) \quad (11)$$

$$U_j^{(2)} = \{U_j + U_j^{(1)} - (\Delta t / \Delta\eta)(G_{j+1}^{(1)} - G_j)\} / 2 \quad (12)$$

其中  $F_i^{(1)} = F_i(U_i^{(1)})$ ,  $(G_j^{(1)} = G_j(U_j^{(1)}))$

(4) FCT法<sup>[1]</sup> 用有限差分法计算存在激波的流动时, 单纯差分近似, 二阶精度格式会在不连续面处产生扰动, 引起不稳定而导致发散。通常人们采用加入人工耗散来缓和这种不连续性, 但这样就使激波失去本来的不连续性。为此, 我们采用 FCT 法, 其基本想法是在必要的时间步和空间位置上自动加入适当的扩散量。首先, 为从整体上保证稳定性在各处加入人工扩散; 其次, 为去除过量的人工扩散引入反扩散。反扩散量的大小可根据需要进行调整以确保稳定性为目标。这样, 既不破坏稳定性, 又可抑制不连续面的平滑化, 而且可在不连续面以外的区域维持原差分格式的精度。

以算子  $L_\xi$  为例, 对 (10) 式做扩散流量修正后变为

$$\bar{U}_i^{(2)} = U_i^{(2)} + \left\{ \alpha_{i+\frac{1}{2}} [(U_{i+1}/J_{i+1}) - (U_i/J_i)] - \alpha_{i-\frac{1}{2}} [(U_i/J_i) - (U_{i-1}/J_{i-1})] \right\} J_i \quad (13)$$

反扩散流量定义为

$$B_{i+\frac{1}{2}} = \beta_{i+\frac{1}{2}} [(U_{i+1}^{(2)}/J_{i+1}) - (U_i^{(2)}/J_i)] \quad (14)$$

于是, 最终解的形式为

$$U_i^{(2)} = \bar{U}_i^{(2)} - (B_{i+\frac{1}{2}} - B_{i-\frac{1}{2}}) J_i \quad (15)$$

这里  $\alpha_{i+\frac{1}{2}}$  和  $\beta_{i+\frac{1}{2}}$  分别是扩散和反扩散系数, 定义如下:

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} (\varepsilon_{i+\frac{1}{2}})^2, \quad \beta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} (\varepsilon_{i+\frac{1}{2}})^2, \quad \varepsilon_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Delta t u_{i+\frac{1}{2}} \quad (16)$$

(5) 边界条件 上游边界: 取来流参数; 下游边界: 用外插法; 壁面条件: 镜像法确定; 上方边界: 流动参数的  $\eta$  方向梯度为零。

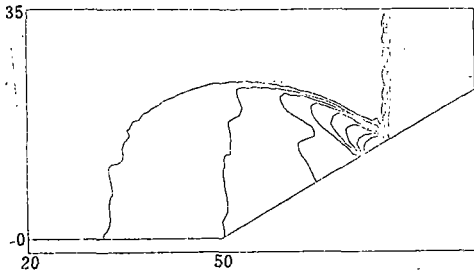
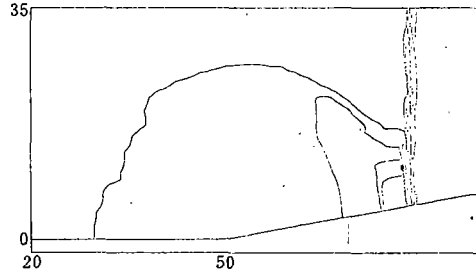
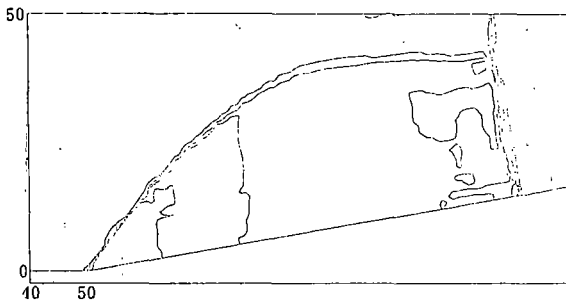
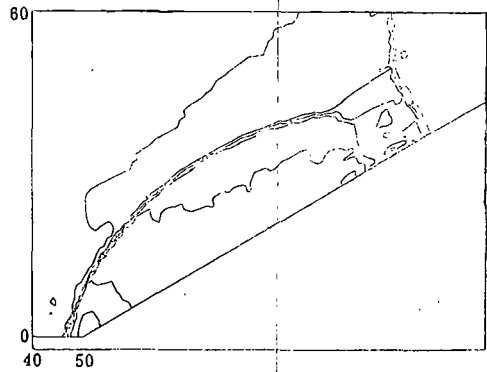
#### 4. 计算结果

图 2 至图 5 给出了计算结果, 其中  $t$  为无量纲时间; 横轴和纵轴分别表示  $x$  和  $y$  向的网格数。现将计算结果与理论分析的几种反射形态<sup>[3]</sup> 加以比较。

图 2 是  $\theta_w = 30^\circ$ ,  $Ma_s = 1.027$  时的等压线。可看出这种情况属正常反射 (Regular reflection)。其中有些反射波看样子具有 Mach 反射特征, 但随时间变化, 这种反射波形态没有发展, 所以还不能认为是 Mach 波。在这种情况下, 本来波面应当非常薄, 由于数值计算中存在数值粘性使波面加厚, 导致出现上述现象。

图 3 是  $\theta_w = 10^\circ$ ,  $Ma_s = 1.027$  时的等压线。这种情况属单纯 Mach 反射 (Simple Mach reflection)。从计算中得知随时间推移 Mach 波不断发展。图 4 是  $\theta_w = 10^\circ$ ,  $Ma_s = 4.0$  时的等压线, 也属单纯 Mach 反射形态, 而且 Mach 波形随时间的发展比图 3 更为明显。

图 5 给出  $\theta_w = 30^\circ$ ,  $Ma_s = 4.0$  时的等压线。其中反射波上的拐点清晰可见, 属复合 Mach 反射 (Complex Mach reflection)。

图2 等压线( $\theta_w = 30^\circ$ ,  $Ma_s = 1.027$ )图3 等压线( $\theta_w = 10^\circ$ ,  $Ma_s = 1.027$ )图4 等压线( $\theta_w = 10^\circ$ ,  $Ma_s = 4.0$ )图5 等压线( $\theta_w = 30^\circ$ ,  $Ma_s = 4.0$ )

从以上四种组合的计算结果可以确认,所采用的方法能有效地捕捉激波反射形态的概貌;与非定常二维激波斜壁问题的理论分析<sup>(3)</sup>和实验研究结果<sup>(4)</sup>一致性良好。另外,只要在计算方法中加入振动能量项,便可对CO<sub>2</sub>等其它气体进行同样计算,因而其结果可与CO<sub>2</sub>气体中二维激波斜壁问题的实验结果进行比较。

### 参 考 文 献

1. Boris J P. Flux-Corrected Transport Medules for Solving Generalized Continuity Equations. NRL Memorandum Report 3327,1976.
2. Thompson J F, Warsi Z U A, Mastin C W. Numerical Grid Generation. North-Holland, 1985:136~169
3. Glass I I. Some Aspects of Shock-Wave Reserch. AIAA J 1987; 25:(2)214~229
4. Fujise K, Honma H, Yoshida H. Reflection of Weak Shock-Waves in Carbon Dioxide Theoretical and Applied Mechanics, 1988; 38:113~120
5. Hiroki H, Akira T. Numenical Analyses of Weak Blast Wave in Air. Theoretical and Applied Mechanics, 1986; 36:121~127
6. McCormack R W, Warming R F. A Numerical Method for Solving the Equation of Compressible Viscous Flow. AIAA Paper 81~110R