О КОНТАКТНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, КВАДРАТИЧНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В.В. Шурыгин (мл.)

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет
vadimjr@ksu.ru

Аннотация

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия эквивалентности обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, квадратичных по второй производной, относительно действия псевдогруппы контактных преобразований. Эти условия сформулированы в терминах интегралов некоторых одномерных распределений.

2010 MSC: 53A55, 34C14.
Ключевые слова: контактные преобразования, точечные преобразования, дифференциальные инварианты, ОДУ.

1 Введение

В настоящей работе мы решаем задачу эквивалентности обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$y''^2 + A(x,y,y')y'' + B(x,y,y') = 0 \tag{1.1}$$

относительно действия псевдогруппы контактных преобразований пространства $\mathbb{R}^3(x,y,p)$, где $p = y'$. При решении этой задачи мы используем результаты задачи нахождения относительных дифференциальных инвариантов обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка вида

$$y'' = f(x,y,y') \tag{1.2}$$

относительно действия псевдогруппы точечных преобразований пространства $\mathbb{R}^2(x,y)$.

Напомним, что С. Ли показал, что любые два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка вида (1.2) эквивалентны относительно действия псевдогруппы контактных преобразований пространства $\mathbb{R}^3(x,y,p)$. Вопрос точечной эквивалентности таких уравнений рассматривался во многих работах. С. Ли показал, что для того, чтобы уравнение (1.2) приводилось к линейному уравнению $y'' = 0$ точечной заменой переменных, оно должно быть кубическим относительно первой производной, т.е., иметь вид $y'' = a_3(x,y)y'^3 + a_2(x,y)y'^2 + a_1(x,y)y' + a_0(x,y)$. Класс таких уравнений замкнут относительно действия псевдогруппы точечных преобразований. Кроме того, он сформулировал достаточный критерий линеаризуемости (см. [5]). В работе Р. Лиувилля [6] были найдены точные условия линеаризуемости. А. Трессе [8] первым привел полный набор относительных дифференциальных инвариантов уравнений второго порядка (1.2) относительно действия псевдогруппы точечных преобразований. В работе Б. Кругликова [4] результаты Трессе были сформулированы на более современном языке и, кроме того, были полностью перечислены абсолютные дифференциальные инварианты и решена проблема точечной эквивалентности двух таких уравнений. Класс уравнений, кубических относительно первой производной, рассматривался в работе А. Трессе [7], в которой были также вычислены относительные инварианты этого действия. Проблеме эквивалентности таких уравнений и нахождению препятствия к линеаризуемости посвящены работы В. Юмагужина [9, 10]. Кроме того, в связи с этими вопросами следует отметить монографию Н. Ибрагимова [2] и статью Н. Ибрагимова и Ф. Магри [3].

2 Основные определения и необходимые сведения

Напомним основные понятия, используемые в настоящей работе.

Пусть π — некоторое векторное расслоение и G — псевдогруппа диффеоморфизмов, действующая на нем. Действие псевдогруппы G естественным образом продолжается до действия на пространстве $J^k\pi$ k-джетов сечений расслоения π. Функция $I \in C^\infty(J^k\pi)$ называется *(абсолютным) скалярным дифференциальным инвариантом k-го порядка*, если она постоянна вдоль орбит продолжения действия G на $J^k\pi$. Множество всех инвариантов образует алгебру относительно стандартных алгебраических операций.

Функция F, заданная на $J^k\pi$ и гладкая в области своего определения, называется *относительным скалярным дифференциальным инвариантом k-го порядка*, если для каждого $g \in G$ имеет место равенство $g^*F = \mu(g)\cdot F$, где $\mu : G \to C^\infty(J^k\pi)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям $\mu(g\cdot h) = h^*\mu(g)\cdot\mu(h)$, $\mu(e) = 1$. Иными словами, уравнение $F = 0$ инвариантно относительно действия псевдогруппы G. Функция μ называется *весом*. Пусть $\mathcal{M} = \{\mu\}$ — группа всех допускаемых весов. Обозначим символом $\mathcal{R}^\mu$ пространство относительных дифференциальных инвариантов веса μ. Тогда $\mathcal{R} = \bigcup\limits_{\mu\in\mathcal{M}} \mathcal{R}^\mu$ есть $\mathcal{M}$-градуированный модуль над алгеброй абсолютных скалярных дифференциальных инвариантов.

Сформулируем результаты классификации А. Трессе и Б. Кругликова, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ может пониматься как сечение расслоения $J^0\mathbb{R}^3(x, y, p) = \mathbb{R}^4(x, y, p, q)$, где мы обозначили через $p = y'$, $q = y''$ соответствующие координаты в расслоении джетов. В это расслоение стандартным образом поднимается действие превдогруппы точечных преобразований. Обозначим символами $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}_y$, $\mathcal{D}_p$ операторы полной производной по x, y и p соответственно. Кроме того, обозначим $\hat{\mathcal{D}}_x = \mathcal{D}_x + p\,\mathcal{D}_y$. Пусть $q^k_{lm} := \hat{\mathcal{D}}^l_x\mathcal{D}^m_y\mathcal{D}^k_p(q)$.

Веса образуют двумерную решетку, а алгебра относительных инвариантов действия псевдогруппы точечных преобразований распадается в прямую сумму $\mathcal{R} = \bigoplus_{r,s\in\mathbb{Z}} \mathcal{R}^{r,s}$ (подробности см. в [4]). Первые относительные инварианты (они имеют порядок 4), равны

$$\begin{aligned} I = q^4_{00}, \qquad H = {}& q^2_{20} - 4q^1_{11} + 6q^0_{02} + q(2q^3_{10} - 3q^2_{01}) - \\ & - q^1_{00}(q^2_{10} - 4q^1_{01}) + q^3_{00}q^0_{10} - 3q^2_{00}q^0_{01} + q\cdot q\cdot q^4_{00}, \quad (2.1) \end{aligned}$$

а инвариантные дифференциальные операторы (операторы, перестановочные с действием псевдогруппы точечных преобразований) имеют вид

$$\begin{aligned}
\Delta_p = &\quad \mathcal{D}_p + (r-s)\frac{q^5_{00}}{5q^4_{00}} : \mathcal{R}^{r,s} \to \mathcal{R}^{r-1,s+1}, \\
\Delta_x = &\quad \mathcal{D}_x + p\mathcal{D}_y + q\mathcal{D}_p + r\left(3q^1_{00} + 2\frac{q^5_{00}q + q^4_{10}}{q^4_{00}}\right) + \\
&+ s\left(2q^1_{00} + \frac{q^5_{00}q + q^4_{10}}{q^4_{00}}\right) : \mathcal{R}^{r,s} \to \mathcal{R}^{r+1,s}, \\
\Delta_y = &\quad \frac{q^5_{00}}{5q^4_{00}}\mathcal{D}_x + \left(1 + p\frac{q^5_{00}}{5q^4_{00}}\right)\mathcal{D}_y + \left(2q^1_{00} + \frac{5q^4_{10} + 6q^5_{00}q}{q^4_{00}}\right)\mathcal{D}_p + \\
&+ r\left(\frac{3q^2_{00}}{8} + \frac{q^4_{01}}{4q^4_{00}} + \frac{19q^1_{00}q^5_{00}}{10q^4_{00}} + \frac{21(q^5_{00}q + q^4_{01})q^5_{00}}{20q^4_{00}q^4_{00}}\right) + \\
&+ s\left(\frac{q^2_{00}}{4} + \frac{q^4_{01}}{2q^4_{00}} + \frac{3q^1_{00}q^5_{00}}{5q^4_{00}} + \frac{3(q^5_{00}q + q^4_{01})q^5_{00}}{10q^4_{00}q^4_{00}}\right) : \mathcal{R}^{r,s} \to \mathcal{R}^{r,s+1}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Будем называть уравнение $y'' = f(x, y, y')$ *уравнением общего положения*, если для него $IH \neq 0$.

Теорема 1. [4] *Алгебра относительных дифференциальных инвариантов уравнения общего положения $y'' = f(x, y, y')$ порождается инвариантом H и инвариантными дифференциальными операторами Δ_x, Δ_y, Δ_p.*

Приведем также теорему, показывающую, когда два уравнения общего положения эквивалентны.

Базис инвариантов порядка 5 составляют функции

$$H_{10} = \Delta_x H, \quad H_{01} = \Delta_y H, \quad K = \Delta_p H.$$

Из 11 базисных инвариантов порядка 6 в формулировке этой теоремы участвуют 8, а именно:

$$H_{20} = \Delta_x^2 H, \quad H_{11} = \Delta_x\Delta_y H, \quad H_{02} = \Delta_y^2 H, \quad K_{10} = \Delta_x K, \quad K_{01} = \Delta_y K,$$
$$\Omega^6 = q^6_{00} - \frac{6}{5}\cdot\frac{q^5_{00}\cdot q^5_{00}}{q^4_{00}}, \quad \Omega^5_{10} = \frac{5I}{24H}([\Delta_p, \Delta_x]H - \Delta_y H), \quad \Omega^4_{20} = \Delta_p^2 H - \frac{\Omega^6}{5I}H.$$

Введем в рассмотрение два инварианта:

$$J_1 = I^{-1/8}H^{3/8} \in \mathcal{R}^{1,0}, \quad J_2 = I^{1/4}H^{1/4} \in \mathcal{R}^{0,1}.$$

Построим с их помощью следующий набор инвариантов

$$\begin{aligned}
&\bar{H}_{10} = H_{10}/(J_1^3 J_2), \quad \bar{H}_{01} = H_{01}/(J_1^2 J_2^2), \quad \bar{K} = K/(J_1 J_2^2), \\
&\bar{H}_{20} = H_{20}/(J_1^4 J_2), \quad \bar{H}_{11} = H_{11}/(J_1^3 J_2^2), \quad \bar{H}_{02} = H_{02}/(J_1^2 J_2^3), \\
&\bar{K}_{10} = K_{10}/(J_1^2 J_2^2), \quad \bar{K}_{01} = K_{01}/(J_1 J_2^3), \\
&\bar{\Omega}^6 = \Omega^6/(J_1^{-4} J_2^5), \quad \bar{\Omega}^5_{10} = \Omega^5_{10}/(J_1^{-2} J_2^4), \quad \bar{\Omega}^4_{20} = \Omega^4_{20}/(J_2^3).
\end{aligned}$$

Поскольку уравнение второго порядка $\mathcal{E}$ может рассматриваться как сечение $\mathfrak{s}_\mathcal{E}$ расслоения $J^0\mathbb{R}^3(x, y, p)$, всякий дифференциальный инвариант I порядка k можно ограничить на уравнение $\mathcal{E}$, взяв обратный образ k-го продолжения сечения $\mathfrak{s}_\mathcal{E}$:

$$I^\mathcal{E} := (\mathfrak{s}_\mathcal{E}^{(k)})^*(I).$$

Рассмотрим уравнение второго порядка общего положения $\mathcal{E}$ такое, что $\bar{H}_{10}^{\mathcal{E}}$, $\bar{H}_{01}^{\mathcal{E}}$, $\bar{K}^{\mathcal{E}}$ можно выбрать в качестве локальных координат на $\mathbb{R}^3(x,y,p)$. Тогда остальные дифференциальные инварианты можно выразить как функции от этих трех:

$$\bar{H}_{ij}^{\mathcal{E}} = \Phi_{ij}^{\mathcal{E}}(\bar{H}_{10}^{\mathcal{E}}, \bar{H}_{01}^{\mathcal{E}}, \bar{K}^{\mathcal{E}}), \quad \bar{K}_{ij}^{\mathcal{E}} = \Psi_{ij}^{\mathcal{E}}(\bar{H}_{10}^{\mathcal{E}}, \bar{H}_{01}^{\mathcal{E}}, \bar{K}^{\mathcal{E}}), \quad \bar{\Omega}_{ij}^{k\mathcal{E}} = \Upsilon_{ij}^{k\mathcal{E}}(\bar{H}_{10}^{\mathcal{E}}, \bar{H}_{01}^{\mathcal{E}}, \bar{K}^{\mathcal{E}}).$$

Теорема 2. [4] *Два уравнения второго порядка общего положения $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ точечно эквивалентны тогда и только тогда, когда наборы функций*

$$\Phi_{20}^{\mathcal{E}}, \Phi_{11}^{\mathcal{E}}, \Phi_{02}^{\mathcal{E}}, \Psi_{10}^{\mathcal{E}}, \Psi_{01}^{\mathcal{E}}, \Upsilon^{6\mathcal{E}}, \Upsilon_{10}^{5\mathcal{E}}, \Upsilon_{20}^{4\mathcal{E}}$$

для них совпадают.

Критерий эквивалентности уравнений необщего положения см. в [4].

3 Различные постановки задачи

Мы будем рассматривать трехмерное контактное многообразие M с контактной структурой, определяемой распределением $\mathcal{C}$. Канонические координаты в этом многообразии будем обозначать (x,y,p); тогда распределение $\mathcal{C}$ задается контактной формой $\omega = dy - p\,dx$.

Рассмотрим класс уравнений (1.1). Будем называть такое уравнение *уравнением гиперболического типа* в случае, если $D = A^2 - 4B > 0$, и *уравнением эллиптического типа*, если $D < 0$. Мы ограничимся рассмотрением уравнений гиперболического типа. При этом будем обозначать корни такого уравнения, как квадратного относительно y'', через

$$y'' = \lambda_1(x,y,y') \qquad \text{и} \qquad y'' = \lambda_2(x,y,y') \tag{3.1}$$

и будем искать инварианты действия псевдогруппы контактных преобразований на множестве таких уравнений. Отметим, что D есть относительный инвариант этого действия на множестве уравнений (1.1).

Геометрически каждое из уравнений $y'' = \lambda_i(x,y,y')$ задает одномерное распределение $\mathcal{F}_i$ в трехмерном контактном многообразии $\mathbb{R}^3(x,y,p) = J^0\mathbb{R}^2(x,y)$. Это распределение лежит в распределении Картана и задается векторным полем

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y} + \lambda_i(x,y,p)\frac{\partial}{\partial p}. \tag{3.2}$$

Поскольку контактное распределение не является вполне интегрируемым, коммутатор $[X_1, X_2]$ не лежит в нем.

Определение. Будем говорить, что два одномерных распределения на трехмерном многообразии *находятся в общем положении*, если выполнены два условия:

1) векторные поля X, Y, задающие эти распределения, линейно независимы в каждой точке;

2) коммутатор $[X,Y]$ линейно независим с полями X, Y.

Отметим, что если такая ситуация реализуется на некотором трехмерном многообразии M, то двумерное распределение, являющееся прямой суммой двух одномерных, задает контактную структуру на этом многообразии.

Теорема 3. *Задание уравнения* (1.1) *гиперболического типа равносильно заданию двух одномерных распределений на $\mathbb{R}^3(x,y,p)$ в общем положении.*

Доказательство. Необходимость следует из сказанного выше.

Покажем, что, наоборот, два одномерных распределения на $\mathbb{R}^3(x,y,p)$ в общем положении задают некоторое уравнение вида (1.1). Пусть X, Y — векторные поля, задающие эти распределения. Обозначим буквой $\mathcal{F}$ распределение, порождаемое полями X и Y. Покажем, что условие 2) определения не зависит от выбора базиса в распределении $\mathcal{F}$. Для любых двух функций f и g имеем

$$[fX, gY] = fg\cdot[X,Y] + f\cdot Xg\cdot Y - g\cdot Yf\cdot X = fg\cdot[X,Y] \bmod \mathcal{F}.$$

Отсюда следует, что для другого базиса $X' = \alpha X + \beta Y$, $Y' = \gamma X + \delta Y$ имеет место $[X', Y'] = (\alpha\delta - \beta\gamma)\cdot[X,Y] \neq 0 \bmod \mathcal{F}$, поскольку $[X,Y] \neq 0 \bmod \mathcal{F}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Пусть a, b — независимые интегралы поля X, а f, g — независимые интегралы поля Y. Поскольку векторные поля X и Y независимы, любые три из этих функций независимы (функционально), а четвертая может быть выражена через них. Пусть, например, $g = h(a,b,f)$. Выберем функции a, b, f в качестве координат. В этих координатах поля X, Y с точностью до множителей имеют вид

$$X = \frac{\partial}{\partial f}, \quad Y = h_b\frac{\partial}{\partial a} - h_a\frac{\partial}{\partial b},$$

где здесь и в дальнейшем нижние индексы a, b,… обозначают частные производные по a, b и т.д. Заметим, что $h_a \neq 0$, $h_b \neq 0$, так как иначе какие-то три функции из четырех были бы зависимы.

Обозначим $c = -h_a/h_b$. Покажем, что функции a, b и c независимы, и, следовательно, их также можно выбрать в качестве координат. Действительно, поскольку коммутатор

$$[X,Y] = h_{bf}\frac{\partial}{\partial a} - h_{af}\frac{\partial}{\partial b}$$

не лежит в распределении, порожденном полями X и Y, то

$$h_a h_{bf} - h_b h_{af} \neq 0.$$

Последнее неравенство эквивалентно тому, что $(h_a/h_b)_f \neq 0$, следовательно, a, b, c действительно можно взять в качестве координат на $\mathbb{R}^3$.

В этих координатах поля X, Y с точностью до множителей примут вид

$$X = \frac{\partial}{\partial c}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial a} + c\frac{\partial}{\partial b} - \frac{\mathrm{Flex}(h)}{h_b^3}\frac{\partial}{\partial c},$$

где

$$\mathrm{Flex}(h) = h_{aa}h_b^2 - 2h_a h_b h_{ab} + h_{bb}h_a^2.$$

Нетрудно проверить, что распределение $\mathcal{F}$ задается дифференциальной 1-формой $\omega = db - c\,da$ и определяет контактную структуру на $\mathbb{R}^3$.

Заметим, что если векторное поле Z лежит в $\mathcal{F}$ и не пропорционально X, то оно с точностью до множителя имеет вид (3.2). Рассмотрим контактное преобразование, удовлетворяющее следующим условиям: оно сохраняет некоторую точку в трехмерном многообразии $\mathbb{R}^3$, его дифференциал достаточно близок к единице, а направление поля X не является собственным. Такое преобразование переводит поля X и Y в поля, не пропорциональные X. Полученные векторные поля с точностью до множителей будут иметь необходимый нам вид (3.2), и, таким образом, определят два уравнения вида (3.1). □

Теперь мы будем рассматривать ситуацию, когда на трехмерном многообразии M заданы два распределения в общем положении. Покажем, что уравнение (1.1) также можно трактовать, как две пары функций на M, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям.

Дифференциальное уравнение $y'' = \lambda_1(x, y, y')$ локально имеет пару первых интегралов (a, b) таких, что $da \wedge db \neq 0$, которые также являются интегралами поля X_1. Поскольку X_1 лежит в ядре форм ω, da и db, то $\omega = \alpha\, da + \beta\, db$ для некоторых функций α, β.

Уравнение (1.1) гиперболического типа, таким образом, задает две пары функций (a, b) и (f, g) таких, что любые три из них независимы. Поскольку $da(X_1) = X_1 a$, то формы $(X_1 g)\, da - (X_1 f)\, db$ и $(X_2 b)\, df - (X_2 a)\, dg$ пропорциональны ω. Как известно, контактная форма задается условием $\omega \wedge d\omega \neq 0$. Ясно, что это условие не меняется от умножения контактной формы на не обращающуюся в нуль функцию.

Рассмотрим два одномерных распределения на M в общем положении. Пусть одно из них задается векторным полем X с интегралами a, b, а другое — векторным полем Y с интегралами f, g. Понятно, что эти распределения находятся в общем положении тогда и только тогда, когда формы $(Xg)\, da - (Xf)\, db$ и $(Yb)\, df - (Ya)\, dg$ являются контактными.

Определение. Пусть заданы две пары функций (a, b) и (f, g) на M. Будем говорить, что эти пары функций *находятся в общем положении*, если выполнены следующие условия:

1) любые три из них независимы;

2) каждая из форм $(Xg)\, da - (Xf)\, db$ и $(Yb)\, df - (Ya)\, dg$ является контактной.

Предложение 1. *Пусть две пары функций (a, b) и (f, g) на M находятся в общем положении. Пусть $a' = a'(a, b)$, $b' = b'(a, b)$ — две независимые функции, и $f' = f'(f, g)$ и $g' = g'(f, g)$ — две независимые функции. Тогда пары (a', b') и (f', g') также находятся в общем положении.*

Доказательство. Следует из того, что новые пары функций задают те же самые распределения, что и старые. □

Из сказанного выше следует

Теорема 4. *Задание уравнения* (1.1) *гиперболического типа равносильно заданию двух пар функций (a, b), (f, g) на M в общем положении.*

4 Основной результат

Вернемся к уравнениям $y'' = \lambda_i(x, y, y')$ и определяемым ими векторным полям X_i, $i = 1, 2$. Выберем два независимых интеграла a и b поля X_1 и два независимых интеграла f и g поля X_2; пусть $g = h(a, b, f)$. Введем новые координаты a, b, $c = -h_a/h_b$. Пусть $G_2(a, b, c) = -\mathrm{Flex}(h)/h_b^3$. Тогда поля X_1 и X_2 с точностью до множителей примут вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial c} \quad \text{и} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial a} + c\frac{\partial}{\partial b} + G_2(a, b, c)\frac{\partial}{\partial c},$$

соответственно. Систему координат (a, b, c) будем называть *канонической*. Будем говорить, что дифференциальное уравнение

$$b'' = G_2(a, b, b'), \quad b = b(a),$$

определяемое полем X_2, *ассоциировано* с уравнением (1.1).

Рассмотрим контактное преобразование φ, переводящее уравнение вида (1.1) в другое такое уравнение. Пусть оно переводит векторное поле X_1 на многообразии M_3 в поле $\widetilde{X}_1 = \varphi^* X_1$ на $\widetilde{M}_3$. Покажем, что φ действует на ассоциированных уравнениях как точечное преобразование.

Профакторизуем M_3 по траекториям поля X_1, пусть $M_3/X_1 = M_2$ (локально это можно сделать). Обозначим каноническую проекцию символом $\pi : M_3 \to M_2$. Аналогично, пусть $\widetilde{\pi} : \widetilde{M}_3 \to \widetilde{M}_2 = \widetilde{M}_3/\widetilde{X}_1$. Моделью для расслоения π служит расслоение $\pi_0 : J^1 N \to J^0 N$ для некоторого одномерного многообразия N.

Пусть в ограничении на $J^1 N$ контактный диффеоморфизм φ есть $\varphi_0 : J^1 N \to J^1 \widetilde{N}$. Диффеоморфизм φ преобразует интегралы a и b распределения, задаваемого полем X_1, в некоторые интегралы $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ распределения, задаваемого полем $\widetilde{X}_1$, то есть, в функции от a и b. Поэтому он индуцирует диффеоморфизм $\psi_0 : J^0 N \to J^0 \widetilde{N}$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} J^1 N \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "\pi_0"] & J^1 \widetilde{N} \arrow[d, "\widetilde{\pi}_0"'] \\ J^0 N \arrow[r, "\psi_0"] & J^0 \widetilde{N}. \end{tikzcd}$$

Функции a и b можно взять в качестве координат на $J^0 N$, поэтому ψ_0 суть точечное преобразование. Наоборот, произвольный диффеоморфизм $\psi_0 : J^0 N \to J^0 \widetilde{N}$ поднимается до контактного диффеоморфизма $\varphi_0 : J^1 N \to J^1 \widetilde{N}$. Поэтому каноническая система координат существенна с точностью до замены координат (a, b) на две независимые функции от a и b.

В приведенной выше конструкции мы приводили к виду $\dfrac{\partial}{\partial c}$ поле X_1. Если поменять X_1 и X_2 местами, то мы придем к другому уравнению $b'' = G_1(a, b, b')$, ассоциированному с исходным уравнением (1.1). Будем говорить, что эти два ассоциированных уравнения *дуальны* друг другу (см. [1], с. 54–56.)

Из сказанного выше следует

Теорема 5. *Два уравнения* (1.1) *гиперболического типа контактно эквивалентны тогда и только тогда, когда уравнение, ассоциированное с одним из них, точечно эквивалентно хотя бы одному из двух дуальных уравнений, ассоциированных с другим из них.*

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y''^2 - y'' = 0. \tag{4.1}$$

Для него $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$. В качестве первых интегралов соответствующих векторных полей (3.2) выберем функции $a = p - x$, $b = x^2/2 - px + y$, $f = p$, $g = y - px$. Тогда $g = b - (a - f)^2/2$, что дает $G_2 = 1$. С другой стороны, если выразить $b = g + \frac{1}{2}(a - f)^2$, то мы получим $G_1 = -1$. Таким образом, пара уравнений, ассоциированных с уравнением (4.1), есть $b'' = 1$ и $b'' = -1$. Ясно, что они точечно эквивалентны.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$(y'' - y)(y'' - y') = 0,$$

для которого $\lambda_1 = y$, $\lambda_2 = p$. В качестве первых интегралов выберем функции $a = p^2 - x^2$, $b = x - \ln(p+y)$, $f = y - p$, $g = pe^{-x}$. В этом случае получаем пару ассоциированных уравнений

$$b'' = -\frac{b'(2 + ab')}{a} \qquad \text{и} \qquad b'' = \frac{b'}{a}.$$

Оба этих уравнения эквивалентны уравнению $b'' = 0$.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$(y'' + x)(y'' - 1) = 0,$$

для которого $\lambda_1 = -x$, $\lambda_2 = 1$. В качестве первых интегралов выберем функции $a = x^2/2 + p$, $b = x^3/3 - px + y$, $f = p - x$, $g = x^2/2 - px + y$. Тогда пара ассоциированных уравнений имеет вид

$$b'' = \frac{1}{b' - 1} \qquad \text{и} \qquad b'' = \frac{-1 - 4b'^2 + 2\sqrt{b'^2 + 4b'^4}}{(1 + 8b'^2 - 4\sqrt{b'^2 + 4b'^4})^{3/2}}.$$

Оба этих уравнения допускают одну и ту же двумерную алгебру Ли, следовательно, точечно эквивалентны.

Пример 4. Приведем пример двух пар функций в общем положении, для которых ассоциированные уравнения не эквивалентны друг другу. Пусть функции (a, b) и (f, g) связаны соотношением $a^2 - 2ab + f^2 + 2bf - g^2 + b^2 = 1$, причем $g \geq 0$, $b - a + f \geq 0$. Тогда

$$g = h(a, b, f) = \sqrt{a^2 - 2ab + f^2 + 2bf + b^2 - 1},$$

и первое ассоциированное уравнение имеет вид

$$b'' = \frac{b'}{a - b} - \frac{2b'^2}{a - b} + \frac{b'^3}{a - b}.$$

Это уравнение точечно эквивалентно уравнению $b'' = 0$.

С другой стороны,

$$b = h(f, g, a) = a - f + \sqrt{1 - 2af + g^2},$$

и второе ассоциированное уравнение не является кубическим относительно первой производной, следовательно, не эквивалентно первому.

В заключение приведем формулы, необходимые для вычисления инвариантов, используемых в теореме Трессе-Кругликова. Обозначим векторные поля $\dfrac{\partial}{\partial a}$, $\dfrac{\partial}{\partial b}$ и $\dfrac{\partial}{\partial c}$ через ∇_a, ∇_b и ∇_c. В исходных координатах (x, y, p) они принимают вид

$$\nabla_a = \frac{1}{\Delta}\Big((b_y f_p - b_p f_y)\frac{\partial}{\partial x} + (b_p f_x - b_x f_p)\frac{\partial}{\partial y} + (b_x f_y - f_x b_y)\frac{\partial}{\partial p}\Big),$$
$$\nabla_b = \frac{1}{\Delta}\Big((a_p f_y - a_y f_p)\frac{\partial}{\partial x} + (a_x f_p - a_p f_x)\frac{\partial}{\partial y} + (a_y f_x - a_x f_y)\frac{\partial}{\partial p}\Big),$$
$$\nabla_c = \frac{1}{\Delta}\Big((a_y b_p - a_p b_y)\frac{\partial}{\partial x} + (a_p b_x - a_x b_p)\frac{\partial}{\partial y} + (a_x b_y - a_y b_x)\frac{\partial}{\partial p}\Big),$$

где
$$\Delta = a_p b_x f_y - a_p b_y f_x - a_y p_x f_p + a_y b_p f_x + a_x b_y f_p - a_x b_p f_y,$$
а частные производные функции f по x, y и p понимаются как производные сложной функции.

Инвариант H принимает вид

$$\begin{aligned}\widetilde{H} = {} & \nabla_c^2\nabla_a^2 F - 2\cdot\frac{h_a}{h_b}\cdot\nabla_c^2\nabla_a\nabla_b F + \left(\frac{h_a}{h_b}\right)^2\cdot\nabla_c^2\nabla_b^2 F - 4\nabla_c\nabla_a\nabla_b F + \\ & + 4\cdot\frac{h_a}{h_b}\cdot\nabla_c\nabla_b^2 F + 6\nabla_b^2 F + F\left(2\nabla_c^3\nabla_a F - 2\cdot\frac{h_a}{h_b}\cdot\nabla_c^3\nabla_b F - 3\nabla_c^2\nabla_b F\right) - \\ & - \nabla_c F\left(\nabla_c^2\nabla_a F - \frac{h_a}{h_b}\cdot\nabla_c^2\nabla_b F - 4\nabla_c\nabla_b F\right) + \nabla_c^3 F\left(\nabla_a F - \frac{h_a}{h_b}\cdot\nabla_b F\right) - \\ & \qquad - 3\nabla_c^2 F\cdot\nabla_b F + F^2\cdot\nabla_c^4 F,\end{aligned}$$

где $F = -\mathrm{Flex}(h)/h_b^3$.

Инвариантные дифференциальные операторы имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta_c = {} & \widetilde{\mathcal{D}}_c + (r-s)\frac{\nabla_c^5 F}{5\nabla_c^4 F}, \\ \Delta_a = {} & \widetilde{\mathcal{D}}_a - \frac{h_a}{h_b}\cdot\widetilde{\mathcal{D}}_b + F\widetilde{\mathcal{D}}_c + (3r+2s)\nabla_c F + \\ & + (2r+s)\left(\frac{F\cdot\nabla_c^5 F + \nabla_c^4\nabla_a F - \dfrac{h_a}{h_b}\cdot\nabla_c^4\nabla_b F}{\nabla_c^4 F}\right), \\ \Delta_b = {} & \frac{\nabla_c^5 F}{5\nabla_c^4 F}\cdot\widetilde{\mathcal{D}}_a + \left(1 - \frac{h_a}{h_b}\cdot\frac{\nabla_c^5 F}{5\nabla_c^4 F}\right)\widetilde{\mathcal{D}}_b + \\ & + \left(2\nabla_c F + \frac{6F\cdot\nabla_c^5 F + 5\nabla_c^4\nabla_a F - 5\cdot\dfrac{h_a}{h_b}\cdot\nabla_c^4\nabla_b F}{\nabla_c^4 F}\right) + (3r+2s)\frac{\nabla_c^2 F}{8} + \\ & + (r+2s)\frac{\nabla_c^4\nabla_b F}{4\nabla_c^4 F} + (19r+6s)\frac{\nabla_c^5 F\cdot\nabla_c F}{10\nabla_c^4 F} + \\ & + (21r+6s)\frac{\nabla_c^5 F(F\cdot\nabla_c^5 F + \nabla_c^4\nabla_b F)}{20\nabla_c^4 F\cdot\nabla_c^4 F},\end{aligned}$$

где $\widetilde{\mathcal{D}}_a$, $\widetilde{\mathcal{D}}_b$, $\widetilde{\mathcal{D}}_c$ — операторы полной производной, соответствующие операторам ∇_a, ∇_b, ∇_c.

Благодарность. Автор выражает благодарность В.В. Лычагину за постановку задачи, ценные замечания и внимание к работе.

Список литературы

[1] В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М., Наука, 1978, 304 с.

[2] N. Ibragimov, *A practical course in differential equations and mathematical modelling. Classical and new methods, nonlinear mathematical models, symmetry and invariance principles*, Higher Education Press, Beijing (P.R. China) and World Scientific (Singapore), 2009, 348 p.

[3] N. Ibragimov, F. Magri, *Geometric proof of Lie's linearization theorem*, Nonlinear Dynamics, vol. 36, 41–46 (2004).

[4] B. Kruglikov, *Point classification of 2nd order ODEs: Tresse classification revisited and beyond.* `arXiv:0809.4653` (2008).

[5] S. Lie, *Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten, III*, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab 8 (Kristiania, 1883), 371–458; Gesam. Abh. Bd., vol. 5 (1924), paper XIV, 362–427.

[6] R. Liouville, *Sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications*, Journal de l'École Polytechnique, vol. 59 (1889), 7–76.

[7] A. Tresse, *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations*, Acta Math., vol. 18 (1894), 1–88.

[8] A. Tresse, *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre* $y'' = \omega(x, y, y')$, Leipzig (1896).

[9] V. Yumaguzhin, *On the obstruction to linearizability of 2-order ordinary differential equations*, Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 83, No. 1–2, 2004, pp. 133–148. `arXiv:0804.0306`.

[10] V. Yumaguzhin, *Differential invariants of 2-order ODEs, I*, `arXiv:0804.0674v1` (2008).