第 19 卷　第 7 期(增)　　航　空　学　报　　Vol. 19 No. 7(S)
1998 年　12 月　ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA　Dec.　1998

有限对象集合的同时镇定与分组设计

贾英民
(北京航空航天大学第 7 研究室, 北京, 100083)

SIMULTANEOUS STABILIZATION AND DESIGN IN GROUPS OF A FINITE SET OF PLANTS

Jia Yingmin
(The 7th Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100083)

摘　要　研究了有限对象集合同时镇定的基本理论问题。证明了 4 个对象可同时镇定的充要条件是存在 4 个稳定的多项式同时满足 2 个多项式方程。如果找到的多项式仅能满足其中一个方程, 那么一定存在 2 个具有公分母或公分子的控制器使得它们分别同时镇定其中的 2 个对象。讨论了问题的可解性条件, 进而给出了 3 个对象的分组与同时设计算法。

关键词　同时镇定　鲁棒控制　系统设计
中图分类号　V249

Abstract　This paper studies theoretically some basic aspects of simultaneous stabilization of a finite set of plants. It is proved that four given plants are simultaneously stabilizable if and only if there exist four stable polynomials simultaneously satisfying two polynomial equations. If the obtained four polynomials satisfy only one of the polynomial equations, then there must exist two controllers having a common denominator or numerator such that each controller can simultaneously stabilize two of the four given plants. Further, the solvability of the polynomial equations is discussed and a design procedure of simultaneous stabilization of three plants is provided.

Key words　simultaneous stabilization, robust control, system design

有限对象集合的同时镇定问题是设计一个单自由度控制器能够镇定集合中的每一个对象[1~3]。自从 1982 年 Saeks 等人[4] 第一次研究该问题以来, 已引起了人们的关注并取得了许多重要的结果。例如, 基于多项式方法, 文献[5] 研究了 3 个对象的同时镇定问题并证明了该问题等价于求解多项式方程

$$E_1H_1 + E_2H_2 + E_3H_3 = 0$$

的稳定解 $H_i, i = 1, 2, 3$ 。其中 E_i 由给定对象构造。文中引入了 3 个对象的强交叉性质从而保证了上述方程有稳定的多项式解 H_1 和 H_2 , 以及没有正实根的多项式解 H_3 。换句话说, 给定对象 $p_1(s)$, $p_2(s)$ 和 $p_3(s)$ 存在一个控制器能同时镇定 $p_1(s)$ 和 $p_2(s)$ 且保证闭环系统 $p_3(s)$ 没有实的正特征根的充要条件是 3 个给定对象具有强交叉性。虽然这个结果未能最后解 3 个对象的同时镇定问题, 但其所用方法对这一问题的理解有着深刻的启示。类似地, 本文考虑了 4 个对象的情况并证明了给定对象 $p_i(s)$, $i= 1, 2, 3, 4$ 可同时镇定的充要条件是存

1998-07-15 收到, 1998-09-28 收到修改稿
国家自然科学基金资助课题(No. 69625506)

在 4 个稳定的多项式 H_i, $i=1,2,3,4$ 同时满足 2 个多项式方程

$$F_1H_1+F_2H_2+F_3H_3+F_4H_4=0, \quad F_1'H_1+F_2'H_2+F_3'H_3+F_4'H_4=0$$

同理, F_i, F_i', $i=1,2,3,4$ 由给定对象构造。有趣的是: 如果找到的 4 个稳定的多项式 H_i, $i=1,2,3,4$ 仅能满足其中第 1 个(第 2 个)方程, 则一定存在 2 个具有公分母(公分子)的控制器 $c_1(s)$ 和 $c_2(s)$ 使得 $c_1(s)$ 同时镇定 $p_1(s)$ 和 $p_3(s)$, $c_2(s)$ 同时镇定 $p_2(s)$ 和 $p_4(s)$。本文称这种问题为分组同时镇定, 其相应的算法称为分组设计。

1 镇定准则

本文约定: 1 个控制系统的稳定性是指其闭环特征根都位于开的左半平面, 简言之, 闭环系统没有 C^+ 根。

定义 1[5] 给定 3 个对象 $p_i(s)=n_i(s)/d_i(s)$, $i=1,2,3$。令

$$E_1=n_1d_2-n_2d_1, \quad E_2=n_2d_3-n_3d_2, \quad E_3=n_3d_1-n_1d_3$$

记 $A_{\{i\}}$, $B_{\{i\}}$ 和 $C_{\{i\}}$ 分别是 E_1, E_2 和 E_3 的 C^+ 实根。如果存在 $E_j=+1$ 或 -1, $j=1,2,3$ 使得

$$E_1E_2E_1(C_{\{i\}})E_2(C_{\{i\}})<0, \quad E_1E_3E_1(B_{\{i\}})E_3(B_{\{i\}})<0, \quad E_2E_3E_2(A_{\{i\}})E_3(A_{\{i\}})<0$$

则称对象 $p_i(s)$ 或 E_i, $i=1,2,3$ 具有强交叉性质。

定义 2 1 个控制器 $c(s)=n_c(s)/d_c(s)$ R^+ 镇定对象 $p(s)=n(s)/d(s)$ 是指其相应的闭环特征多项式 $n(s)n_c(s)+d(s)d_c(s)$ 没有 C^+ 实根。

定理 1 给定 $p_i(s)=n_i(s)/d_i(s)$, $i=1,2,3,4$。定义

$$F_1(s)=n_3(d_2n_4-d_4n_2), \quad F_1'(s)=d_3(d_2n_4-d_4n_2)$$

$$F_2(s)=n_4(d_3n_1-d_1n_3), \quad F_2'(s)=d_4(d_3n_1-d_1n_3)$$

$$F_3(s)=n_1(d_4n_2-d_2n_4), \quad F_3'(s)=d_1(d_4n_2-d_2n_4)$$

$$F_4(s)=n_2(d_1n_3-d_3n_1), \quad F_4'(s)=d_2(d_1n_3-d_3n_1)$$

且 F_i 和 F_{i+1}, $i=1,2,3,4$ 及其 F_i' 和 F_{i+1}', $i=1,2,3,4$ 都是 C^+ 互质的(这里 $F_5=F_1$, $F_5'=F_1'$)。则有:

¹ $p_i(s)$, $i=1,2,3,4$ 是同时可镇定的当且仅当存在 4 个稳定的多项式 H_i, $i=1,2,3,4$ 满足下面的 2 个多项式方程

$$F_1H_1+F_2H_2+F_3H_3+F_4H_4=0 \tag{1}$$

$$F_1'H_1+F_2'H_2+F_3'H_3+F_4'H_4=0 \tag{2}$$

特别, 同时镇定控制器可取为

$$c(s)=\frac{d_2H_4-d_4H_2}{n_4H_2-n_2H_4}=\frac{d_3H_1-d_1H_3}{n_1H_3-n_3H_1} \tag{3}$$

且与 $p_i(s)$ 相应的闭环特征多项式是 $H_i(s)$;

º 如果 4 个稳定的多项式 H_i, $i=1,2,3,4$ 仅满足方程式(1), 那么存在 2 个具有公分母的控制器 $c_1(s)$ 和 $c_2(s)$ 使得 $c_1(s)$ 同时镇定 $p_1(s)$ 和 $p_3(s)$, $c_2(s)$ 同时镇定 $p_2(s)$ 和 $p_4(s)$, 且与 $p_i(s)$ 相应的闭环特征多项式是 H_i;

» 如果 4 个稳定的多项式 H_i, $i=1,2,3,4$ 仅满足方程式(2), 那么存在 2 个具有公分子的控制器 $c_1(s)$ 和 $c_2(s)$ 使得 $c_1(s)$ 同时镇定 $p_1(s)$ 和 $p_3(s)$, $c_2(s)$ 同时镇定 $p_2(s)$ 和 $p_4(s)$, 且与 $p_i(s)$ 相应的闭环特征多项式是 H_i。

证　明　由于陈述º 和» 能够从陈述¹ 的充分性证明中容易获得且陈述¹ 的必要性是直接的, 故这里仅给出陈述¹ 的充分性证明。设存在 4 个稳定的多项式 H_i, $i=1,2,3,4$ 使得式(1)和式(2)成立, 下面将用 3 步证明 $p_i(s)$, $i=1,2,3,4$ 是同时可镇定的。

第 1 步　首先证明 $p_2(s)$ 和 $p_4(s)$ 是同时可镇定的。注意到 $F_i(s)$ 的定义, 直接的计算可得下式

$$F_1d_1+F_2d_2+F_3d_3+F_4d_4=0 \tag{4}$$

$$F_1n_1+F_3n_3=0 \tag{5}$$

$$F_2n_2+F_4n_4=0 \tag{6}$$

注意到 $F_1H_1+F_2H_2+F_3H_3+F_4H_4=0$ 并计算式(1) $\times n_3-$ 式(5) $\times H_3$ 有

$$F_1(n_3H_1-n_1H_3)+F_2n_3H_2+F_4n_3H_4=0 \tag{7}$$

再计算式(7) $\times n_4-$ 式(6) $\times n_3H_4$ 得

$$F_1(n_3H_1-n_1H_3)n_4(s)=F_2(n_2H_4-n_4H_2)n_3 \tag{8}$$

因为 F_1 和 F_2 是 C^+ 互质的, 则存在多项式 d_c 满足

$$(n_3H_1-n_1H_3)n_4(s)=-F_2d_c \tag{9}$$

$$(n_2H_4-n_4H_2)n_3(s)=-F_1d_c \tag{10}$$

类似地, 下面的计算可得到 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 之间的另 1 个关系。

首先, 计算式(1) $\times d_4-$ 式(4) $\times H_4$ 得

$$F_1(d_4H_1-d_1H_4)+F_2(d_4H_2-d_2H_4)+F_3(d_4H_3-d_3H_4)=0 \tag{11}$$

然后计算式(11) $\times n_3-$ 式(5) $\times(d_4H_3-d_3H_4)$ 有

$$F_1(n_3d_4H_1-n_3d_1H_4-n_1d_4H_3+n_1d_3H_4)=F_2(d_2H_4-d_4H_2)n_3 \tag{12}$$

再一次利用 F_1 和 F_2 的 C^+ 互质性知存在多项式 n_c 满足

$$(d_2H_4-d_4H_2)n_3(s)=F_1n_c \tag{13}$$

$$n_3d_4H_1+(n_1d_3-n_3d_1)H_4(s)-n_1d_4H_3=F_2n_c \tag{14}$$

利用式(13) $\times n_4-$ 式(10) $\times d_4$ 和式(13) $\times n_2-$ 式(10) $\times d_2$, 可获得 2 个期望的表达式

$$d_4d_c+n_4n_c=H_4,\qquad d_2d_c+n_2n_c=H_2 \tag{15}$$

这表明控制器 $n_c(s)/d_c(s)$ 同时镇定 $p_2(s)$ 和 $p_4(s)$。

第 2 步　现在证明 $p_1(s)$ 和 $p_3(s)$ 是同时可镇定的。计算式(1) $\times n_1-$ 式(5) $\times H_1$ 产生

$$F_2n_1H_2+F_3(n_1H_3-n_3H_1)+F_4n_1H_4=0 \tag{16}$$

再计算式(16) $\times n_4-$ 式(6) $\times n_1H_4$ 得

$$F_2(n_2H_4-n_4H_2)n_1=F_3(n_1H_3-n_3H_1)n_4$$

因为 F_2 和 F_3 是 C^+ 互质的, 存在多项式 d_c' 满足

$$(n_1H_3-n_3H_1)n_4(s)=F_2d_c' \tag{17}$$

$$(n_2H_4-n_4H_2)n_1(s)=F_3d_c' \tag{18}$$

为了得到 $F_2(s)$ 和 $F_3(s)$ 之间的另 1 个关系, 计算式(1) $\times d_1-$ 式(4) $\times H_1$ 产生

$$F_2(d_1H_2-d_2H_1)+F_3(d_1H_3-d_3H_1)+F_4(d_1H_4-d_4H_1)=0 \tag{19}$$

然后计算式(19) $\times n_4-$ 式(6) $\times(d_1H_4-d_4H_1)$ 得

$$F_2(n_4d_1H_2+n_2d_4H_1-d_2n_4H_1-n_2d_1H_4)=F_3(d_3H_1-d_1H_3)n_4$$

再一次利用 F_2 和 F_3 的 C^+ 互质性，存在多项式 n_c' 满足

$$(d_3H_1 - d_1H_3)n_4(s) = F_2n_c' \tag{20}$$

$$n_4d_1H_2 + n_2d_4H_1 - n_4d_2H_1 - n_2d_1H_4 = F_3n_c' \tag{21}$$

通过计算式(20) × n_1 + 式(17) × d_1 和 式(20) × n_3 + 式(17) × d_3 可得另 2 个期望的公式

$$d_1d_c' + n_1n_c' = H_1;\quad d_3d_c' + n_3n_c' = H_3 \tag{22}$$

这表明控制器 $n_c'(s)/d_c'(s)$ 同时镇定 $p_1(s)$ 和 $p_3(s)$。

第 3 步　余下的仅需证明 $d_c = d_c'$ 和 $n_c = n_c'$。从式(9)和式(17) $d_c = d_c'$ 是显然的。由式(13)和式(20)，可知 $n_c = n_c'$ 意味着

$$n_3n_4(n_4d_2 - n_2d_4)(d_3H_1 - d_1H_3) = n_3n_4(n_1d_3 - n_3d_1)(d_2H_4 - d_4H_2) \tag{23}$$

在上式两端删去 n_3n_4 且注意到 F_i', $i = 1, 2, 3, 4$ 的定义和式(2)，故方程式(23)成立。注意到控制器 $c(s)$ 能够分别从式(10)和式(13)，式(17)和式(20)中获得且系统的闭环特征多项式可由式(15)和式(22)来描述，结论得证。

2　多项式方程的解

引理 1　给定对象 $p_i(s) = n_i(s)/d_i(s)$，$i = 1, 2, 3$，并令 A_i, B_i 和 C_i 分别表示 E_1，E_2 和 E_3 的 C^+ 实根。如果 $p_i(s)$，$i = 1, 2, 3$ 具有强交叉性，那么：¹ 存在 E_1，$E_2 = 1$ 或 -1 使得对所有 C_i, $E_1E_2n_1(C_i)n_3(C_i) \geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 C_i 是 $n_1(s)$ 和 $n_3(s)$ 的公共根；º 存在 E_3, $E_4 = 1$ 或 -1 使得对所有 B_i, $E_3E_4n_2(B_i)n_3(B_i) \geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 B_i 是 $n_2(s)$ 和 $n_3(s)$ 的公共根；» 存在 E_5, $E_6 = 1$ 或 -1 使得对所有 A_i, $E_5E_6n_1(A_i)n_2(A_i) \geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 A_i 是 $n_1(s)$ 和 $n_2(s)$ 的公共根。

证明：这里仅给出陈述¹ 的证明，陈述º 和» 可类似地处理。

情况 1　$d_2(C_i) = 0$。显然，$E_1(C_i) = -n_2(C_i)d_1(C_i)$，$E_2(C_i) = n_2(C_i)d_3(C_i)$。因为每对 $(n_i(s), d_i(s))$ 是互质的，故 $n_2(C_i) \neq 0$。注意到 $p_1(s)$, $p_2(s)$ 和 $p_3(s)$ 具有强交叉性，因此存在 E_1, $E_2 = 1$ 或 -1 满足 $E_1E_2E_1(C_i)E_2(C_i) = -E_1E_2n_2^2(C_i)d_1(C_i)d_3(C_i) < 0$。等价地，$E_1E_2d_1(C_i)d_3(C_i) > 0$。因为 C_i 是 E_3 的正实根，显然有 $n_3(C_i)d_1(C_i) = n_1(C_i)d_3(C_i)$。这就暗示 $n_1(C_i)n_3(C_i)d_1(C_i)d_3(C_i) \geqslant 0$，即 $E_1^2E_2^2n_1(C_i)n_3(C_i)d_1(C_i)d_3(C_i) = (E_1E_2n_1(C_i)n_3(C_i))(E_1E_2d_1(C_i)d_3(C_i)) \geqslant 0$。由此可得 $E_1E_2n_1(C_i)n_3(C_i) \geqslant 0$ 且 $E_1E_2n_1(C_i)n_3(C_i) = 0$ 当且仅当 $n_1(C_i) = 0$ 或 $n_3(C_i) = 0$。注意到 $d_1(C_i) \neq 0$, $d_3(C_i) \neq 0$ 和 $n_3(C_i)d_1(C_i) = n_1(C_i)d_3(C_i)$，可得 $n_1(C_i) = 0$ 当且仅当 $n_3(C_i) = 0$。故 $E_1E_2n_1(C_i)n_3(C_i) \geqslant 0$ 中等号成立当且仅当 C_i 是 $n_1(s)$ 和 $n_3(s)$ 的公共 C^+ 实根。

情况 2　$d_2(C_i) \neq 0$。考虑

$$E_1E_2 = (n_1d_2 - n_2d_1)(n_2d_3 - n_3d_2) = n_1n_2d_2d_3 - n_2^2d_1d_3 - n_1n_3d_2^2 + n_2n_3d_1d_2$$

在上式中加减 $n_2n_3d_1d_2$ 项，得 $E_1E_2 = n_2d_2(n_1d_3 - n_3d_1) - n_2^2d_1d_3 - n_1n_3d_2^2 + 2n_2n_3d_1d_2$。因此

$$(n_1d_2 - n_2d_1)(n_2d_3 - n_3d_2) \overset{s=C_i}{=} E_1E_2 \overset{s=C_i}{=} (-n_2^2d_1d_3 - n_1n_3d_2^2 + 2n_2n_3d_1d_2) \overset{s=C_i}{=}$$

$$(n_2n_3d_1d_2 - n_2^2d_1d_3 + n_2n_3d_1d_2 - n_1n_3d_2^2) \overset{s=C_i}{=}$$

$$n_2d_1(n_3d_2 - n_2d_3) + n_3d_2(n_2d_1 - n_1d_2)$$

进一步化简得 $n_1d_2(n_2d_3 - n_3d_2)\big|_{s=C_i} = n_3d_2(n_2d_1 - n_1d_2)\big|_{s=C_i}$。注意到 $d_2(C_i) \neq 0$, $n_3(n_2d_1 - n_1d_2)\big|_{s=C_i} = n_1(n_2d_3 - n_3d_2)\big|_{s=C_i}$，即

$$-n_3(C_i)E_1(C_i) = n_1(C_i)E_2(C_i),\quad n_1(C_i)n_3(C_i)E_1(C_i)E_2(C_i) \leqslant 0 \tag{24}$$

因为 $p_1(s)$, $p_2(s)$ 和 $p_3(s)$ 具有强交叉性, 则存在 $E_1, E_2 = 1$ 或 -1 使得 $E_1(G) \neq 0$, $E_2(G) \neq 0$ 和 $E_1 E_2 n_1(G) n_3(G) \geqslant 0$。显然, 上式中等号成立当且仅当 $n_1(G) = 0$ 或 $n_3(G) = 0$。从式(24)知, $n_1(G) = 0$ 当且仅当 $n_3(G) = 0$。因此, 上式中等号成立当且仅当 G 是 $n_1(s)$ 和 $n_3(s)$ 的公共 C^+ 实根。

引理 2　给定对象 $p_i(s) = n_i(s)/d_i(s)$, $i = 1, 2, 3, 4$. 如果: ① $p_i(s)$, $i = 1, 2, 3$ 具有强交叉性且 E_1, E_2 和 E_3 是 C^+ 互质的; ② $p_i(s)$, $i = 1, 2, 3, 4$ 满足定理 1 中的互质条件. 那么, 存在 1 个有理函数 $5(s)$

$$5(s) = E_1 F_1^+ h_1 \Big\backslash (E_2 F_2^+ h_2 + E_3 F_3^+ h_3)$$

满足: ① $5(s)$ 的相对阶是零; ② 所有 $h_i(s)$, $i = 1, 2, 3$ 都是正系数的稳定多项式; ③ 所有 F_1 的 C^+ 零点恰是 $5(s)$ 的零点; ④ 所有 E_3 的 C^+ 零点都是 $1 - 5(s)$ 的零点(重数包括)。

证明: 略。

引理 3　设 $F(s)$ 是 1 个实多项式且 s_i, $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ 是正实数但不是 $F(s)$ 的根。那么一定存在 1 个实多项式 $\hat{F}(s)$ 使得对所有 s_i, $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ 有 $\hat{F}(s_i)F(s_i) > 0$ 或 $\hat{F}(s_i)F(s_i) < 0$。

证明: 略。

定理 2　给定对象 $p_i(s) = n_i(s)/d_i(s)$, $i = 1, 2, 3, 4$ 没有任何公共 C^+ 实零点且满足引理 2 中条件① 和②, 则存在 2 个具有公分母(公分子)的控制器 $c_1(s)$ 和 $c_2(s)$ 使得 $c_1(s)$ 同时镇定 $p_1(s)$ 和 $p_3(s)$, $c_2(s)$ 镇定 $p_2(s)$ 且 R^+ 镇定 $p_4(s)$。

证明: 为方便, 设 $p_i(s)$, $i = 1, 2, 3$ 具有强交叉性并记 $n_i(s)$ 的 C^+ 实根为 $A_{ir(t)}$, $t = 1, 2, \cdots, T_i$; $i = 1, 2, 3, 4$, $n_1(s)d_3(s) - n_3(s)d_1(s)$ 的 C^+ 实根为 $B_{\{1r(t)\}}$, $t = 1, 2, \cdots, T_5$, $n_2(s)d_4(s) - n_4(s)d_2(s)$ 的 C^+ 实根为 $B_{2r(t)}$, $t = 1, 2, \cdots, T_6$。从引理(2), 可设计有理函数

$$5_0(s) = \frac{E_1 F_1^+ h_1'(s)}{E_2 F_2^+ h_2'(s) + E_3 F_3^+ h_3'(s)}$$

满足: ① $5_0(s)$ 具有零相对阶; ② h_i, $i = 1, 2, 3$ 都是正系数稳定多项式; ③ 所有 $F_1(s)$ 的 C^+ 实根恰是 $5_0(s)$ 的零点; ④ 所有 $F_4(s)$ 的 C^+ 实根都是 $1 - 5_0(s)$ 的零点(重数包括)。记

$$M_1 = n_1^+ n_2^+ (d_3 n_1 - d_1 n_3)^+ (d_2 n_4 - d_4 n_2)^+, \qquad M_2 = n_2^+ n_3^+ n_4^+ (d_3 n_1 - d_1 n_3)^+$$

从引理 3, 存在多项式 $\overset{d}{M}_1(s)$ 和 $\overset{d}{M}_2(s)$ 使得对所有 $s_t \in \{A_{3r(t)}, A_{4r(t)}, i = 1, 2, \cdots, T_i, i = 3, 4\}$, $\overset{d}{M}_1(s_t)M_1(s_t) > 0$ 以及对所有 $s_t \in \{A_{1r(t)}, B_{2r(t)}, i = 1, 2, \cdots, T_i, i = 1, 6\}$, $\overset{d}{M}_2(s_t)M_2(s_t) > 0$。令

$$5_1(s) = \overset{d}{M}_1 M_1 \Big\backslash g_1;\quad 5_2(s) = \overset{d}{M}_2 M_2 \Big\backslash g_2;\quad 5_3(s) = (E_2 E_3 n_2^+ (n_3^+)^2 n_4^+ M_1) \Big\backslash g_3$$

其中: $g_i(s)$, $i = 1, 2, 3$ 是使 5_i, $i = 1, 2, 3$ 具有零相对阶的正系数多项式。定义

$$5(s) = 5_0(s)(1 - k_1 5_1(s) - k_2 5_2(s) - k_3 5_3(s))^{\{n\}} = 5_0(s) 5_4^n(s)$$

其中: $k_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ 选得足够小满足: ① $0 < 5_4(\infty) \neq 1$; ② $5_4(s)$ 是 1 个稳定的最小相位有理函数. 从文献[5] 可知仅需证明当 n 充分大时, 所有 F_4 的 C^+ 实根恰是 $1 - 5_0(s)$ 的零点. 为此须考虑下述 7 种情况并对每种情况证明存在 1 个正的实区间和 1 个正整数使得当 s 在此区间取值且 n 大于此整数时 $|<(s)| \neq 1$。具体说这 7 种情况是: ① $s = A_{3r(t)}$ 或 $B_{2r(t)}$ 即 $F_1(s)$ 的 C^+ 实零点; ② $s = A_{2r(t)}$ 或 $B_{1r(t)}$ 即 $F_4(s)$ 的 C^+ 实零点; ③ $s = A_{4r(t)}$, 也是 $F_2(s)$ 的 C^+ 实零点; ④ $s = A_{r(t)}$, 也是 $F_3(s)$ 的 C^+ 实零点; ⑤ $s = s_i^*$ 即 $E_2 F_2^+(s)h_2(s) + E_3 F_3^+(s)h_3(s) = 0$ 的

C^+ 实零点; ¾ $s=s_i^{**}$ 即 $k_1 \Phi_1(s)+k_2\Phi_2(s)+k_3\Phi_3(s)=0$ $(\Phi_4(s_i^{**})=1)$ 的 C^+ 实零点; ¿ 上述获得区间以外的所有正实轴上的点。由此类似于文献[5]可完成本定理的证明。

3 应用示例

本节将讨论怎样用定理 2 来处理 3 个对象的设计问题。给定 3 个对象 $p_i(s)$, $i=1,2,3$ 没有任何公共 C^+ 实零点且具有强交叉性, 那么可以构造 1 个辅助对象 $p_4(s)$ 使得 $p_i(s)$, $i=1,2,3,4$ 满足定理 2 的所有条件。因此, 2 个控制器 $c_1(s)$ 和 $c_2(s)$ 能被设计使得 $c_1(s)$ 同时地镇定 $p_1(s)$ 和 $p_3(s)$, $c_2(s)$ 镇定 $p_2(s)$。记 $p_i(s)=n_i(s)/d_i(s)$, $i=1,2,3$, $c_1(s)=n_c^1(s)/d_c(s)$, $c_2(s)=n_c^2(s)/d_c(s)$, 则有, $n_1n_c^1+d_1d_c=H_1$, $n_2n_c^2+d_2d_c=H_2$, $n_3n_c^1+d_3d_c=H_3$。取 K, $L\in[0,1]$ 且考虑

$$c_{1K}(s)=[Kn_c^2+(1-K)n_c^1]\backslash d_c \quad 和 \quad c_{\{2L\}}(s)=[Ln_c^1+(1-L)n_c^2]\backslash d_c$$

显然, 由于 $c_{10}(s)$ 同时地镇定 $p_1(s)$ 和 $p_3(s)$, 则总是存在 K 的最大值 K^* 使得只要 $K\in[0,K^*]$, c_{1K} 同时镇定 $p_1(s)$ 和 $p_3(s)$。类似地, 由于 $c_{20}(s)$ 镇定 p_2, 一定存在 L 的最大值 L^* 使得只要 $L\in[0,L^*]$, c_{2L} 能镇定 $p_2(s)$。如果 $1-L^*\leqslant K^*$ $(1-K^*\leqslant L^*)$, 那么对任何 $K\in[1-L^*, K^*]$ $(L\in[1-K^*, L^*])$, $c_{1K}(s)$ $(c_{2L}(s))$ 能同时镇定 $p_1(s)$, $p_2(s)$ 和 $p_3(s)$。

举 例 试对下面 3 个对象找 1 个同时镇定控制器

$$p_1(s)=\frac{2s-9}{s-8.8}, \quad p_2(s)=\frac{s+2}{s-6}, \quad p_3(s)=\frac{2s+6}{s-8}$$

显然, 给定的对象不能用 1 个比例控制器来镇定。按照定理 2, 其辅助对象可选为 $-(s+2)/(s+10.6)$。简单验证可知 E_1, E_2 和 E_3 具有强交叉性且 $F_1=(s+3)(2s+1)$, $F_2=(s-7)(s-9)$, $F_3=-(2s-9)(2s+1)$, $F_4=-(s-7)(s-9)$。通过直接而冗长的计算可得定理 2 中的 $c_1=n_c'/d_c$ 和 $c_2=n_c/d_c$。其中: $d_c(s)=5.812s^3+42.428s^2+101.710s+80.205$; $n_c(s)=-27.252s^3-158.876s^2-264.571s-99.636$; $n_c'(s)=-2.906s^3-25.160s^2-67.823s-58.255$。计算可得 $K^*=\min\{K_1^*, K_2^*\}=\min\{0.135, 1\}=0.135$, $L^*=0.88$ 显然, $1-K^*=0.865<L^*=0.88$. 取 $K=0.13$ $(L=0.87)$, 可得 1 个同时镇定控制器

$$c(s)=-\frac{6.071s^3+42.543s^2+93.400s+63.634}{5.812s^3+42.428s^2+1.01710s+80.206}$$

参 考 文 献

1 Blondel V. Simultaneous Stabilization of Linear Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. No. 191, London: Springe-Verlag, 1993

2 Vidyasagar M. Control System synthesis: A factorization approach. Cambridge, MA: MIT Press, 1985

3 贾英民, 高为炳, 程勉. 多输入多输出系统的同时镇定. 自动化学报, 1991, 17(6): 683～688

4 Saeks R, Murray J. Fractional representation, algebraic geometry and the simultaneous stabilization problem. IEEE Trans Autmat. Contr, 1982, 27(4): 889～903

5 Wei K H. The solution of a transcendental problem and its applications in simultaneous stabilization problems. IEEE Trans Automat Contr, 1992, 37(9): 1305～1315

6 Youla D C, Bongiorno J J Jr, Lu C N. Single-loop feedback stabilization of linear multivariable plants. Automatica, 1974, 10(2): 159～173