

# GPS 双基线载体姿态测量研究

廖向前 黄顺吉 张晓玲

(电子科技大学电子工程系, 成都, 610054)

ATTITUDE DETERMINATION WITH TWO BASELINES BASED ON GPS

Liao Xiangqian, Huang Shunji, Zhang Xiaoling

(Department of Electronic Engineering, University of Electronic  
Science and Technology of China, Chengdu, 610054)

**摘 要** 研究了采用双基线方案测量载体的姿态, 利用 GPS 双差相位测量基线矢量, 双差伪距观测值辅助解相位整周模糊, 双频时引入空间变换缩小置信空间搜索次数, 通过实例分析得出了正确解算相位模糊与观测次数、伪距测量精度的关系, 并利用误差传播定律对姿态测量精度进行分析, 结合卫星星历数据计算表明, 在卫星运行周期内航向角和俯仰角平均测量精度在一定条件下优于 2mrad。

**关键词** GPS 姿态测量 相位整周模糊 空间变换

**中图分类号** V249.3

**Abstract** The rigid body's attitude determination is discussed using two baselines based on GPS; baseline vector coordinates are calculated with GPS double difference phases, and phase integer ambiguities are calculated with the aid of double difference pseudorange observables. By space transformation, the searching time of the integer ambiguity candidates in the confidence ellipsoid space can be reduced when dual frequency observables are available. Correctly resolving the integer ambiguities depends on the observed time and the observed pseudorange accuracy. Attitude precision is analyzed based on error propagation laws. Calculations with one periodic ephemerides data show that head or pitch precision level can reach about 2 mrad under certain conditions.

**Key words** GPS, attitude determination, phase integer ambiguity, space transformation

GPS 作为新一代卫星导航系统, 不仅可以实现高精度的导航定位, 而且可实现对飞机、舰船等刚性载体的指向或姿态测量。GPS 信号本身存在诸如钟差、轨道误差、电离层、对流层、SA、测量噪声等误差源, 相位干涉则由于天线间的相位差分作用消除了空间相关误差源, 使相位测量精度大大提高, 从而实现载体的高精度指向或姿态测量。本文研究采用双基线的相位干涉方法实现载体的姿态(航向角、俯仰角、横滚角)测量, 利用伪距观测值辅助解算相位模糊, 引入空间变换缩小了置信空间搜索次数, 并对载体姿态测量的精度进行分析, 得出了一些有用的结论。

## 1 双基线姿态测量

沿载体(飞机或舰船)纵向和横向双基线天线配置如图 1 示, 天线 1 和天线 3 构成基线向量  $b_1$ , 可对载体航向角和俯仰角进行测量, 天线 2 和天线 3 构成基线向量  $b_2$  垂直于基线

$b_1$ , 与基线  $b_1$  完成载体的横滚角测量。基线在地球坐标系和本地坐标系(东北天坐标系)中的坐标分别以  $b_j = (x_j, y_j, z_j)$  和  $b_{jl} = (x_{jl}, y_{jl}, z_{jl})$  表示(下标  $j = 1, 2$  代表基线序号), 则载体的航向角  $W$  俯仰角  $H$  和横滚角  $r$  可由下式求得

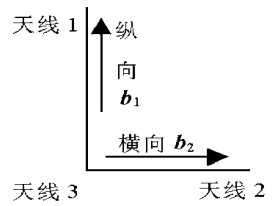


图 1 载体双基线示意图

$$\left. \begin{aligned} W &= -\arctan(x_{1l}/y_{1l}) \\ H &= \arctan(z_{1l}/\sqrt{x_{1l}^2 + y_{1l}^2}) \\ r &= -\arctan\left[\frac{x_{2l}\sin W \sin H - y_{2l}\cos W \sin H + z_{2l}\cos H}{x_{2l}\cos W + y_{2l}\sin W}\right] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

设载体位于地球经度  $A$ 、纬度  $B$  处, 基线向量本地坐标  $b_{1l}$  和地球坐标  $b_1$  可进行相互转换<sup>[1]</sup>

$$b_{1l} = F b_1 \quad (2a)$$

$$F = \begin{bmatrix} -\sin A & \cos A & 0 \\ -\sin B \cos A & -\sin B \sin A & \cos B \\ \cos B \cos A & -\cos B \sin A & \sin B \end{bmatrix} \quad (2b)$$

因此只要得到两基线在地球坐标系中的坐标  $b_i$ , 即可由式(1), 式(2)求得载体的姿态角, 而  $b_i$  是由 GPS 载波相位干涉完成的。

如图 2 示, 对 GPS 卫星  $i$ , 基线  $b$  的双差相位观测方程为<sup>[2]</sup>

$$D^i = [(e^i)^T - (e^r)^T] \delta b + \dot{E} \quad (3)$$

式中:  $D^i$  为基线对卫星  $i$  和参考卫星  $r$  的双差相位观测值;  $e^i, e^r$  为载体至 GPS 卫星  $i$  和  $r$  的单位方向向量;  $\dot{E}$  为双差相位测量噪声。

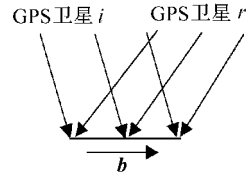


图 2 基线相位干涉示意图

如果有  $n+1$  颗可用卫星, 得到  $n$  个双差相位观测方程, 写成矩阵形式

$$D5 = H \delta b + E \quad (4)$$

其中:  $D5 = \begin{bmatrix} D^1 \\ D^2 \\ \dots \\ D^n \end{bmatrix}$ ;  $H = \begin{bmatrix} (e^1)^T - (e^r)^T \\ (e^2)^T - (e^r)^T \\ \dots \\ (e^n)^T - (e^r)^T \end{bmatrix}$ ;  $b = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ;  $E = \begin{bmatrix} E \\ E \\ \dots \\ E \end{bmatrix}$ 。

由式(4)可得到基线向量  $b$  的最小二乘估计及协方差

$$\hat{b} = (H^T W H)^{-1} H^T W D5 \quad (5a)$$

$$Q = (H^T W H)^{-1} \quad (5b)$$

若令  $Q_{D5} = E \{E^T\}$ , 则式(5)中  $W = [Q_{D5} / R]^2$ ,  $R$  为非差相位测量噪声。但是, 双差相位  $D^i$  不能直接得到, 它由初始整周模糊值  $N^i$  和实际双差相位观测值  $DD^i$  组成

$$D^i = DD^i + N^i \quad (6)$$

本文用 GPS 双差伪距观测值来辅助解决双差相位观测值的相位模糊问题。

## 2 相位整周模糊的解算

GPS 伪距和相位输出存在单频和双频两种情况, 由于所载信息量的差别, 其处理过程和解算相位模糊所需时间是不一样的, 下面分别讨论。

### 2.1 单频相位模糊解算

$$\left. \begin{aligned} D_{\leq i}(t) &= DQ(t) + KN_i \\ DP_i(t) &= DQ(t) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中:  $DQ(t)$  为天线至卫星的实际距离双差值。由于 GPS 姿态测量时, 基线仅约数米或数十米, 双差相位和双差伪距几乎全部消除了公共误差源, 仅存在残余误差近似于高斯白噪声, 且各观测时刻观测值互不相关, 对  $k$  次观测, 相位模糊估值(实数)及方差

$$N_i^d = \frac{1}{Kk} \sum_{i=1}^k (D_{\leq i}(t) - DP_i(t)) \quad (8a)$$

$$R_{i1}^2 = \frac{4R_p^2}{Kk} \left[ 1 + \frac{1R_e^2}{R_p^2} \right] \quad (8b)$$

式中:  $R_e, R_p$  分别为非差相位和伪距测量噪声。取  $N_i^d$  为  $N_i^d$  最邻近的整数, 则在置信度为  $1-N$  的概率范围内, 相位模糊值  $N_i$  的取值空间为

$$\hat{u}N_i^d - N_i \hat{u} < dN_i \quad (9a)$$

$$dN_i = R(0, 1)_{1-N_2} R_{N_i} \quad (9b)$$

式中:  $R(0, 1)_{1-N_2}$  为置信度为  $1-N$  的标准正态分布的区间上限值。在给定置信度条件下, 当式(9a)一维空间仅存在一个整数点即  $dN_i < 1$  时, 确定其为唯一正确的整周模糊值, 由式(8b)、式(9b)分析, 只有当伪距测量精度足够小或具有相当的观测次数才能达到上述要求。例如, 取  $R_p = 60\text{cm}$ ,  $R_e = 5\text{mm}$ , 仅当  $k \approx 266$  时, 在 99% 置信度条件下才能确定唯一正确的整周模糊值。

## 2.2 双频相位模糊解算

双频情况下双差相位观测值和 P 码双差伪距观测值为<sup>[3]</sup>

$$\left. \begin{aligned} D_{\leq i}(t) &= DQ(t) + KN_i \\ DP_i(t) &= DQ(t) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (10)$$

假定两种频率双差相位观测噪声  $R_{e1} = R_{e2} = R_e$ , 双频伪距观测噪声  $R_{p1} = R_{p2} = R_p$ 。对  $k$  次观测, 基于最小二乘原理, 可解得双频相位模糊及协方差

$$N_i^d = \frac{1}{Kk} \sum_{i=1}^k (D_{\leq i}(t) - (DP_1(t) + DP_2(t))/2) \quad (i = 1, 2) \quad (11a)$$

$$Q_N = \begin{bmatrix} R_{11}^2 & R_{N_1 N_2} \\ R_{N_1 N_2} & R_{22}^2 \end{bmatrix} = \frac{2R_e^2}{KkKk} \begin{bmatrix} \frac{K}{K} \left[ 1 + \frac{2R_p^2}{R_e^2} \right] & 1 \\ 1 & \frac{K}{K} \left[ 1 + \frac{2R_p^2}{R_e^2} \right] \end{bmatrix} \quad (11b)$$

由于相位观测噪声相对伪距测量噪声甚微, 由式(11b)知, 相位模糊值方差主要取决于伪距测量噪声的大小。取  $N_1^d, N_2^d$  分别为  $N_1^d, N_2^d$  最邻近的整数, 记  $N^d = [N_1^d, N_2^d]^T$ ,  $N = [N_1, N_2]^T$ , 令  $r = (N^d - N)^T Q_N^{-1} (N^d - N)$ , 则  $r$  服从自由度为 2 的  $\chi^2$  分布, 取门限  $\chi^2$ , 则  $N$  的取值空间为

$$(N^d - N)^T Q_N^{-1} (N^d - N) \leq \chi^2 \quad (12)$$

这是一个椭圆空间, 如果按一定置信度选取门限值  $\chi^2$ , 式(12)的置信椭圆空间内仅存在一个整数点, 确定其为唯一正确的整周模糊值。

例如, 取  $R_p = 60\text{cm}$ ,  $R_e = 5\text{mm}$ ,  $k = 1$ ,  $\chi^2 = 10$ (约 99% 置信度) 时计算得到

$$Q_N = \begin{bmatrix} 19.9337 & 15.5306 \\ 15.5306 & 12.1035 \end{bmatrix}$$

对应的模糊值置信椭圆空间如图 3(a) 示(图示仅为椭圆的一部分)。由于其偏心率较大,如果要判断平面上哪些整数点处于该椭圆空间内,按式(12)搜索,搜索次数将会很大。一些学者在研究 GPS 载波相位定位过程中,通过空间变换的方法确定相位模糊空间<sup>[3,4]</sup>,在此利用该方法来解决姿态测量中的相位模糊值搜索问题。为此,引入空间变换矩阵  $R$ , 矩阵各元素均为整数,变换后置信空间大小不变,对相位模糊值  $N$ ,  $N^d$  及协方差矩阵  $Q_N$  进行如下变换

$$Z = R^T N; \quad Z^d = R^T N^d; \quad Q_Z = R^T Q_N R \quad (13)$$

式中:  $Z = [Z_1 \quad Z_2]^T$  仍为整数,满足式(12)的  $N$  值空间经  $R$  变换后对应  $Z$  值置信椭圆空间

$$(Z^d - Z)^T Q_Z^{-1} (Z^d - Z) \leq V_r^2 \quad (14)$$

适当选择变换矩阵  $R$ , 经变换后在  $Z$  值空间内可以明显地减少搜索次数,从而更易判断椭圆空间内是否存在唯一的整数点来确定相位整周模糊值。上例中,选取

$$R^T = \begin{bmatrix} - & 7 & 9 \\ - & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (15)$$

经式(13)变换后  $Q_Z$  矩阵为

$$Q_Z = \begin{bmatrix} 0.2751 & 0.1263 \\ 0.1263 & 0.3015 \end{bmatrix} \quad (16)$$

由式(14)其对应的椭圆空间如图 3(b), 此时需要搜索的整数点数要比变换前小得多。从图 3(b) 可以看出,椭圆空间随着观测次数  $k$  的增大而减小,当  $k \geq 5$  时,椭圆空间内存在一个整数点,能够确定唯一正确的整周模糊值,如果在更少观测次数甚至一次观测确定整周模糊值,则需要更高的伪距测量精度。例如,取  $R = 5\text{mm}$ ,  $V_r^2 = 10$ ,  $R_0$  分别取  $15\text{cm}$ ,  $25\text{cm}$ ,  $35\text{cm}$  时,对一次观测即  $k = 1$  选取

$$R^T = \begin{bmatrix} 1 & - & 1 \\ - & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

变换后对应的椭圆空间如图 3(c) 示,当  $R_0 = 15\text{cm}$  时其内仅存在唯一的整数值,表明一次观测即可确定整周模糊值。

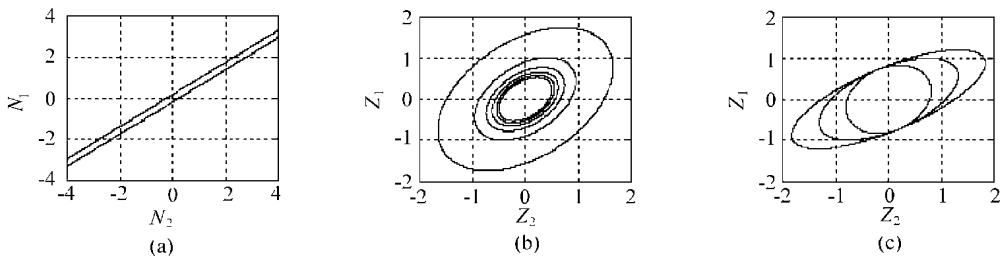


图3 置信空间

(a)  $R_0 = 60\text{cm}$ ,  $R = 5\text{mm}$ ,  $V_r^2 = 10$ ,  $k = 1$  时  $N$  值置信空间;

(b)  $R_0 = 60\text{cm}$ ,  $R = 5\text{mm}$ ,  $V_r^2 = 10$ ,  $k = 1, 3, 5, 7, 9, 11$  时(由外至内) $Z$  值置信空间;

(c)  $R = 5\text{mm}$ ,  $V_r^2 = 10$ ,  $k = 1$ ,  $R_0 = 15\text{cm}, 25\text{cm}, 35\text{cm}$  时(由内至外) $Z$  值置信空间

### 3 姿态测量精度分析

正确解算相位整周模糊值后,即可应用式(5)得到基线向量坐标  $b^d$  及协方差  $Q$ ,由式(2a),根据误差传播定律,基线向量在本地坐标系中的坐标  $b^e$  的协方差

$$Q_i = F^T Q F \tag{18}$$

以航向角和俯仰角为例,由式(1),忽略  $x_1$  和  $y_1$  的相关性,根据误差传播定律

$$\left. \begin{aligned} R_w &\leq R_{\max}(x_1, y_1) / (\hat{u}_b \hat{u} \cos H) \\ R_H &\leq R_{\max}(x_1, y_1, z_1) / \hat{u}_b \hat{u} \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

式中:  $R_{\max}(x_1, y_1) = \max(R_{x_1}, R_{y_1})$ ;  $R_{\max}(x_1, y_1, z_1) = \max(R_{x_1}, R_{y_1}, R_{z_1})$ ;  $\hat{u} \cdot \hat{u}$  表示取向量长度。例如:  $A= 104^\circ$ ,  $B= 31^\circ$ ,  $R= 5\text{mm}$ ,  $\hat{u}_b \hat{u} = 10\text{m}$  时,根据 GPS 接收机输出的卫星星历数据由式(2b),式(5b)式(18),式(19)计算出在卫星运行周期内航向角测量精度  $R_w(H= 0^\circ)$  和俯仰角测量精度  $R_H$  如图 4 示。结果表明,在卫星运行周期内平均标准误差小于  $2\text{mrad}$ 。

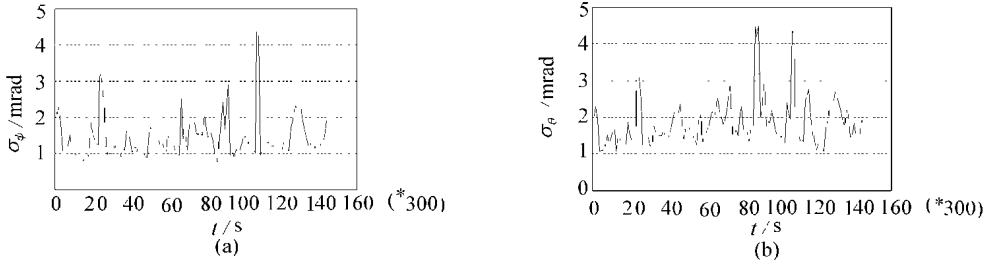


图 4 姿态测量精度估计( $A= 104^\circ$ ,  $B= 31^\circ$ ,  $R= 5\text{mm}$ ,  $\hat{u}_b \hat{u} = 10\text{m}$ )

(a)航向角测量精度; (b)俯仰角测量精度

## 4 结 论

(1) 双差相位观测值几乎全部消除了空间相关误差源,它是实现高精度姿态测量的前提条件。

(2) 选取较长基线时,可以达到几个毫弧的测量精度,同时还要受相位测量噪声、该时刻姿态角度的大小、载体所在位置等因素的影响。

(3) 结合双差伪距测量值辅助解算相位模糊,双频时引入空间变换可以缩小搜索空间。

(4) 相位测量噪声相对伪距测量噪声甚微,相位模糊值方差主要受后者的影响,单频时由于所利用的信息量少,需要较长时间才能得到正确的整周模糊值,双频时所需时间较短,若需单次观测确定整周模糊值,需要降低伪距噪声。

## 参 考 文 献

- 1 陈哲. 捷联惯导系统原理. 北京: 宇航出版社, 1986. 61~66.
- 2 Graas van F, Braasch M S. GPS interferometric attitude and heading determination: initial flight test results. Proceedings of the 47th Annual Meeting. Williamsburg: the institute of Navigation, 1991. 183~191.
- 3 Teunissen P J G. An analytical study of ambiguity decorrelation using dual frequency code and carrier phase. Journal of Geodesy, 1996, 7(8): 515~528.
- 4 Patrick, Hwang Y C. Kinematic GPS for differential positioning: resolving ambiguities on the fly. Journal of The Institute of Navigation, 1993, 40(3): 321~337.