

# 二维可压粘性叶栅流场计算的 预测修正迭代多重网格法

PREDICTION-CORRECTION-ITERATION-MULTIGRID METHOD FOR  
SOLVING 2-D VISCOUS CASCADE FLOW FIELD

南京航空学院 王立成 张惠民 程卫华

*Nanjing Aeronautical Institute*

*Wang Licheng, Zhang Huimin and Cheng Weihua*

**摘要** 本文中提出了一种解可压 $N-S$ 方程的快速数值法。它由预测步,修正步,迭代步以及多重网格法构成。叶栅出口采用了一种使数值解收敛性进一步加快的技术,我们称之为定常无反射边界条件技术。本文应用了 $k-\epsilon$ 双方程紊流模型。

对若干叶栅在 $-13^\circ \sim 8^\circ$ 的攻角范围内进行了数值试验,并与对应的物理实验结果进行了比较。结果是满意的。

**关键词** 定常无反射边界条件技术,叶栅,流场。

**Abstract** In this paper, a rapid convergent numerical method is proposed to solve the compressible  $N-S$  equations. This method consists of prediction, correction, iteration and multi-grid steps. At cascade outlet, a skill called "steady unreflecting boundary condition" is applied to accelerating the convergence of the method. The turbulent model  $k-\epsilon$  is used.

Numerical experiments were carried out at incident angle range  $-13^\circ \sim 8^\circ$  for three cascades. Comparison of turning angle and pressure distribution coefficient  $C_p$  with corresponding physical experiments are quite satisfactory.

**Key words** Steady unreflecting boundary condition skill, cascades, flow field.

## 一、引 言

本文是文献[1]的发展与完善。

采用了不同于SIMPLE方法中所应用的叠加网格。其优点已在文献[1]中有了详细

1988年11月29日收到

的阐述。

解对流扩散方程时采用了作者早先提出的逆风因子法<sup>[1~3]</sup>。逆风因子法还能应用于有限元素法<sup>[4]</sup>。

本文的发展在于: (1) 将文献[1]的算法推广至可压流动; (2) 采用了双方程紊流模型; (3) 提出了预测, 修正, 迭代, 多重网格算法以加快收敛速度; (4) 发展了一种称之为定常无反射边界条件使收敛速度进一步加快。

对 NACA 和 NGTE 叶型叶栅在  $-13^\circ \sim 8^\circ$  攻角范围内作了数值试验。对转折角以及  $C_p$  曲线等与物理试验结果进行了比较。结果是满意的。

## 二、无因次控制方程

本文取叶片弦长为参考长度, 取叶栅进口速度, 温度, 密度为参考速度, 参考温度和参考密度。在这种条件下各方程的形式如下:

能量方程

$$T = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_0^2 [1 - (u^2 + v^2)] \quad (1)$$

(1) 式意味着总温保持不变。式中  $T$  为静温;  $\gamma$  为比热比;  $Ma_0^2$  为叶栅进口马赫数;  $u$ ,  $v$  为两个速度分量。

状态方程

$$p = \rho T / (\gamma Ma_0^2) \quad (2)$$

式中  $p$  为压力;  $\rho$  为密度。

连续方程

$$\frac{1}{J} \left[ \frac{\partial (\rho G_1)}{\partial \xi} + \frac{\partial (\rho G_2)}{\partial \eta} \right] = 0 \quad (3)$$

式中  $\xi$ ,  $\eta$  为贴体曲线坐标;  $J$  为两种坐标之间转换的雅可比行列式, 而且

$$\begin{aligned} G_1 &= y_\eta u - x_\eta v \\ G_2 &= x_\xi v - y_\xi u \end{aligned} \quad (4)$$

$$y_\eta = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad x_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

$$x_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad y_\xi = \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

运动方程

$$\begin{aligned} \rho G_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho G_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{1}{R_e} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\mu \alpha}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mu \gamma'}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\mu \beta}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mu \beta}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right] \\ &\quad + \left( y_\eta \frac{\partial p}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + S_x \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $R_e$  为各参考量组成的雷诺数;  $\mu$  为无因次粘性系数, 它包括了紊流粘性系数;  $S_x$  为可压  $N-S$  方程中其余的项所构成的源项, 而

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad \gamma' = x_\xi^2 + y_\xi^2$$

$$\beta = x_i x_j + y_i y_j$$

关于  $v$  的对流扩散方程类似于 (5) 式, 差别仅在于压力梯度项和源项  $S_i$  中。

紊流方程

$$\rho G_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \rho G_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\mu_s \alpha}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mu_s \beta}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\mu_s \beta}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mu_s \alpha}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right] + S_\phi \quad (6)$$

式中  $\phi$  分别代表紊流动能  $K$  和紊流动能耗散率  $\varepsilon$ 。其中

$$\mu_k = 1 + \mu / \sigma_k \quad \sigma_k = 1.0$$

$$\mu_\varepsilon = 1 + \mu / \sigma_\varepsilon \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

$$S_k = \frac{1}{Re} (P - \rho \varepsilon Re)$$

$$S_\varepsilon = \left( C_1 \frac{\varepsilon}{K} P - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{K} Re \right) / Re$$

$$C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92$$

$$P = \mu_s (u_v^2 + v_v^2 + 2 u_v v_v)$$

$$\mu_s = C_\mu k^2 \rho / \varepsilon \cdot Re$$

由于解  $u$ ,  $v$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$  的方程除源项以及扩散系数不同以外, 其余完全一样。采用我们提出的网格系统可以将它们的求解完全统一起来, 从而大大地减少了计算工作量。

### 三、预测修正迭代多重网格法

预测步:

根据给定的初场  $\rho^{(n)}$ ,  $\vec{V}^{(n)}$ , (或者以  $G_1^{(n)}$ ,  $G_2^{(n)}$  为对流速度), 以及给定的压力  $P^{(n)}$  求解运动方程得到  $\vec{V}^{(n+1/2)}$ 。这一步称为预测步。以  $u$  方程为例写出其离散形式:

$$\frac{a_p^{(n)}}{\alpha_1} u_p^{(n+1/2)} = \sum a_{nb}^{(n)} u_{nb}^{(n+1/2)} - \left( y_\eta \frac{\partial p^{(n)}}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial p^{(n)}}{\partial \eta} \right) + \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} a_p^{(n)} u_p^{(n)} + S_u^{(n)} \quad (7)$$

式中  $\alpha_1$  为松弛因子;  $a$  为离散方程的系数; 上标  $(n)$  代表初场;  $\left(n + \frac{1}{2}\right)$  代表预测步解。

修正步:

修正步的目标是在密度和对流速度仍然为  $\rho^{(n)}$ ,  $\vec{V}^{(n)}$  的条件下求出修正量  $\hat{V}$  和  $\hat{p}$ , 使得按下列公式修正以后的  $\vec{V}^{(n+1)}$  和  $P^{(n+1)}$

$$\vec{V}^{(n+1)} = \vec{V}^{(n+1/2)} + \hat{V} \quad (8)$$

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} + \hat{p} \quad (9)$$

能同时满足运动方程 (5) 和连续方程 (3)。这样我们可以得到

$$\frac{a_p^{(n)}}{\alpha_1} \hat{u}_p = \sum a_{nb}^{(n)} \hat{u}_{nb} - \left( y_\eta \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial \hat{p}}{\partial \eta} \right) \quad (10)$$

$$\frac{a_p^{(n)}}{\alpha_1} \hat{v}_p = \sum a_{nb}^{(n)} \hat{v}_{nb} - \left( x_\xi \frac{\partial \hat{p}}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} \right) \quad (11)$$

$$V \cdot (\rho^{(n)} \hat{V}) = -V \cdot (\rho^{(n)} \vec{V}^{(n+1/2)}) \quad (12)$$

类似于 SIMPLE<sup>[6]</sup> 的处理, 可以得到

$$\left(\frac{a_p^{(n)}}{\alpha_1} - \sum a_{nb}^{(n)}\right) \hat{u}_p = \sum a_{nb}^{(n)} (\hat{u}_{nb} - \hat{u}_p) - \left(y_\eta \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial \hat{p}}{\partial \eta}\right) \cong - \left(y_\eta \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial \hat{p}}{\partial \eta}\right)$$

最终得到

$$\left(\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1}\right) a_p^{(n)} \hat{u}_p \cong - \left(y_\eta \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial \hat{p}}{\partial \eta}\right) \quad (13)$$

$$\left(\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1}\right) a_p^{(n)} \hat{v}_p \cong - \left(x_\xi \frac{\partial \hat{p}}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi}\right) \quad (14)$$

将 (13)、(14) 式代入连续方程 (3), 经过较为复杂的运算后可以得到压力修正  $\hat{p}$  的代数方程

$$\hat{p}_{i,j} = -2\Phi/b_{i,j} \quad (15)$$

$$\Phi = [(\rho^{(n)} G_1^{n+(1/2)})_e - (\rho^{(n)} G_1^{n+(1/2)})_w + (\rho^{(n)} G_2^{n+(1/2)})_n - (\rho^{(n)} G_2^{n+(1/2)})_s] \quad (16)$$

$\Phi$  代表计算平面上网格单元周界面上的通量代数和。脚注  $e, w, n, s$  代表网格单元左, 右, 上, 下四边界中点值。而

$$b_{i,j} = \left\{ \left[ \frac{\rho^{(n)} (\alpha + \gamma' - 2\beta)}{a} \right]_{i,j} + \left[ \frac{\rho^{(n)} (\alpha + \gamma' + 2\beta)}{a} \right]_{i,j-1} + \left[ \frac{\rho^{(n)} (\alpha + \gamma' + 2\beta)}{a} \right]_{i-1,j} + \left[ \frac{\rho^{(n)} (\alpha + \gamma' - 2\beta)}{a} \right]_{i-1,j-1} \right\} \cdot \left( \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) \quad (17)$$

根据预测步解出  $\vec{V}^{n+(1/2)}$ , 按 (15) 式计算出压力修正量  $\hat{p}$ , 然后由 (13), (14) 式算出  $\hat{V}$  作为速度修正量初场解 (10), (11) 式得速度修正量  $\hat{V}$  而完成修正步。此时得到的  $\vec{V}^{(n+1)}$  和  $P^{(n+1)}$  在  $\rho^{(n)}, G_1^{(n)}, G_2^{(n)}$  给定条件下既满足运动方程又满足连续方程。

#### 迭代步:

由于密度  $\rho$  由能量方程 (1) 和状态方程 (2) 跟  $\vec{V}^{(n+1)}$  和  $p^{(n+1)}$  有关, 而  $G_1, G_2$  亦跟  $\vec{V}^{(n+1)}$  有关。因此需要进行对流速度  $\rho^{(n+1)} G_1^{(n+1)}, \rho^{(n+1)} G_2^{(n+1)}$  的迭代是显然的, 也是很容易的。

#### 多重网格:

多重网格的作用是加速要求解的物理量在计算域中的传递以加快计算收敛速度。当采用主变量法求解  $N-S$  方程时影响整个计算速度的关键是压力场的确定。为此, 本文中仅对压力采用多重网格。

每一个粗网格中包含  $3 \times 3$  个细网格。由于细网格中的通量已用公式 (16) 求出, 所以通过粗网格四周边界的通量只需把对应的 9 个细网格中的通量求一个代数和, 然后应用下列公式<sup>[1]</sup>

$$\hat{p} = -eV \cdot (\rho \vec{V}) \quad (18)$$

计算出粗网格中的压力修正量。所以每个细网格中心的压力修正量由两部分组成, 一部分由 (15) 式确定, 一部分由 (18) 式确定。

这种多重网格技术在程序中实施起来非常容易, 不增加附加计算工作量, 而对整个计算的收敛性增益很显著。

#### 四、定常无反射边界条件

整个计算的边界条件很简单。进口给定  $u$ ,  $v$ ,  $\rho$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$  作为第一类边界条件。周期边界上应用周期性条件。固壁上应用无滑动条件, 即  $u = 0$ ,  $v = 0$ , 密度由外推确定,  $k$ ,  $\varepsilon$  应用所谓的壁面函数<sup>[6][7]</sup>。出口截面上, 密度外推, 还应用了所谓的流出条件, 即

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0$$

这里的  $\phi$  代表  $u$ ,  $v$ ,  $k$  和  $\varepsilon$ 。要注意的是这时不能给定出口反压, 因为进口速度场是给定的, 对应这个进口速度的出口反压实际上是唯一确定的而不能任意假定, 否则就不一致。而在求解出口站上运动方程时, 却需要出口反压值。

为了解决这个问题, 需要在计算域后虚设一站, 在虚设站上令流出流量恒等于计算域进口的流入流量。同时应用 (18) 式来确定虚设网格单元中心上的压力。

计算表明 (18) 式中的  $\varepsilon$  值对计算收敛性有很大的影响。在某个范围内  $\varepsilon$  越大, 收敛性越好。  $\varepsilon$  较小时, 整个解来回摆动。

在解非定常 *Euler* 方程和 *N-S* 方程时, 有人提出应用所谓的无反射边界条件<sup>[8]</sup>以减少压力波在计算域内的来回反射, 以提高计算收敛性。本文中提出的出口边界的处理其作用同样是减少整个解的来回摆动, 所以我们把它称作定常方程无反射边界条件。

#### 五、数值试验

应用本文中所提出的方法对三种不同的叶型叶栅进行了数值试验, 然后将计算结果与实验数据进行了比较。

##### 1. NGTE10C<sub>4</sub>/30C50 叶型叶栅

该叶栅是很有代表性的英制系列叶栅, 它的几何参数及实验数据见文献[9], 雷诺

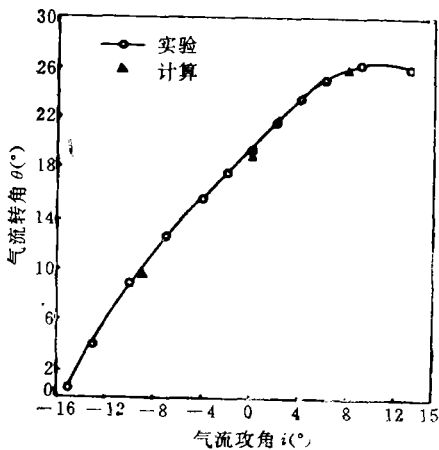


图1 转角特性 (NGTE10C<sub>4</sub>/30C50)

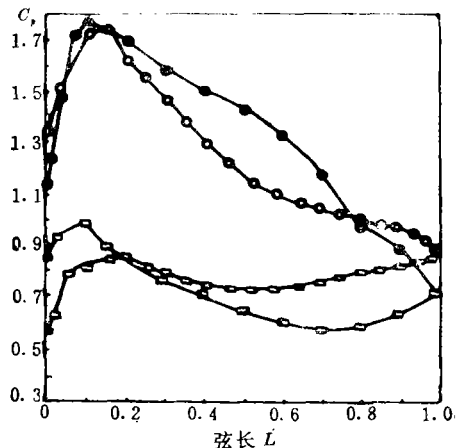


图2 压力分布特性 (NGTE10C<sub>4</sub>/30C50)

数  $Re=3.5 \times 10^5$ 。

图 1 画出的是进气角  $\beta_1=45^\circ$  时的转角特性。图中的横坐标为攻角  $i$ ，纵坐标为气流流过叶栅的转折角  $\theta = \beta_1 - \beta_2$ 。由图可见在  $-9^\circ \sim 8^\circ$  的攻角范围内的计算结果与文献 [9] 中提供的实验结果基本上是一致的。

图 2 中画出的是该叶栅在设计进气角  $\beta_1=45^\circ$  时的压力分布特性。图中横坐标是弦长  $L$ ，纵坐标是  $C_p = (P_{01} - P_i) / (P_{01} - P_1)$ 。由图可见，在整个弦长范围内，计算结果与文献 [9] 提供的实验结果基本相符，而误差较大的地方出现在尾缘，这可能是因为本叶栅弯度大，叶栅尾缘处流动复杂，而计算网格又不够密集，尚不能非常准确地反映该处的复杂流动。因此，如果增加网格节点数目，特别是栅距方向的节点数目，将会提高计算精确度。

## 2. NACA65-(12A<sub>10</sub>)10 叶型叶栅

该叶栅也是很有代表性的英制系列叶栅，它的几何参数及实验结果见文献 [9, 10]，雷诺数  $Re=3.5 \times 10^5$ 。

图 3 中画出的是进气角  $\beta_1=45^\circ$  时的转角特性。由图可见在攻角为  $-13^\circ \sim 9^\circ$  的攻角范围内，用本方法求出的气流转角与实验结果相差很小，基本上能满足工程预测的需要。

图 4 中画出的是在设计进气角  $\beta_1=45^\circ$  时的压力分布曲线。

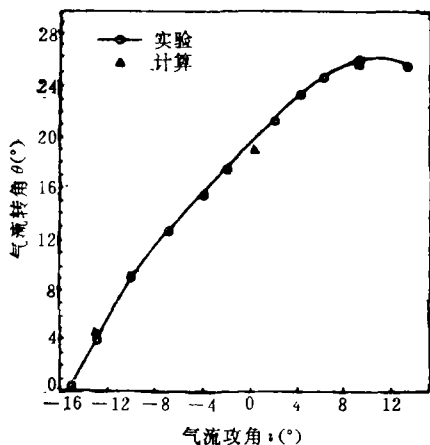


图 3 转角特性 (NACA65-(12A<sub>10</sub>)10)

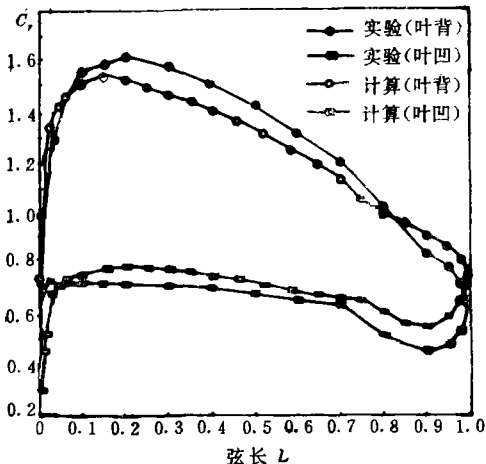


图 4 压力分布特性  $i=0^\circ$  (NACA65-(12A<sub>10</sub>)10)

图 5 中画出的是进气角  $\beta_1=45^\circ$ ，攻角  $i=-13^\circ$  时的压力分布曲线。

图 6 中画出的是进气角  $\beta_1=45^\circ$ ，攻角  $i=9^\circ$  时的压力分布曲线。

从上述图中可以看出，对于这种叶栅，在  $-13^\circ \sim 9^\circ$  的攻角范围内，计算值与实验值是相互吻合的。

## 3. 高亚音叶栅

它的几何参数及实验结果见文献 [11]。

图 7 中画出的是该叶栅在  $Ma=0.82$ ，攻角  $i=3.5^\circ$ ，雷诺数  $Re=1.6 \times 10^6$  时的压力分布特性。从图中可以看到，对于高亚音流动，计算结果与实验结果吻合得也相当好。此时气流转角  $\theta=11.6^\circ$ ，与实验结果  $\theta=12.5^\circ$  相差  $0.9^\circ$ ，这个结果对于工程计算来说也是相当满意的。

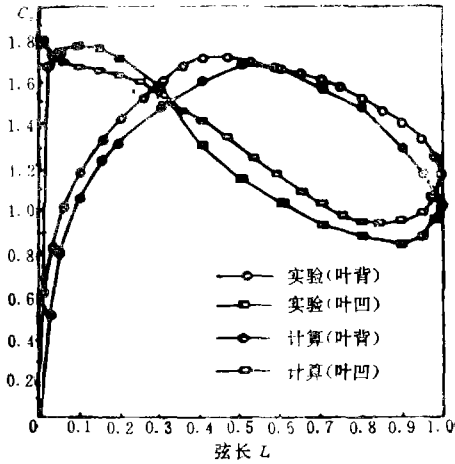


图 5 压力分布特性  $i = -13^\circ$   
(NACA65-(12A<sub>10</sub>)10)

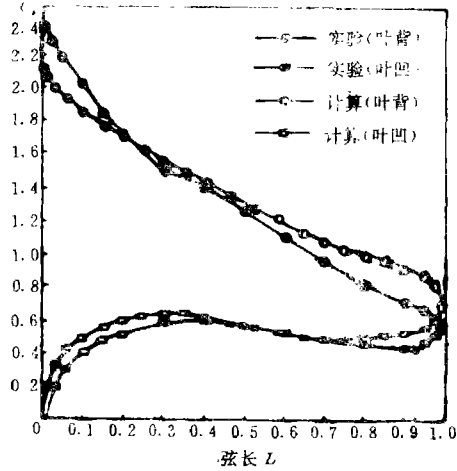


图 6 压力分布特性  $i = 9^\circ$   
(NACA65-(12A<sub>10</sub>)10)

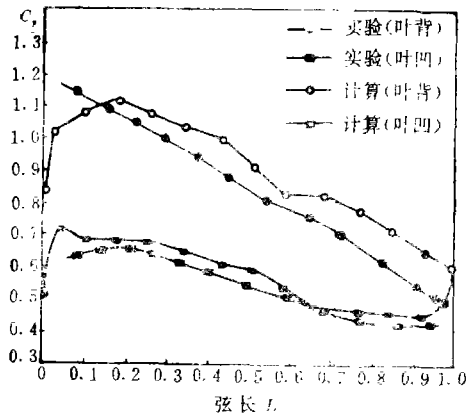


图 7 压力分布特性  $i = 3.5^\circ$  (高亚音叶栅)

4. 计算结果与实验结果的比较

由于资料上数据的限制,对于计算结果不能全部与实验数据进行比较,但我们从理论上分析也是合理的。表 1 列出了总压恢复系数  $\sigma = P_{02}/P_{01}$  以及进出口流量比  $G_f = G_{out}/G_{ino}$ 。

表 1

NGTE10C <sub>4</sub> /30C50	$i = 0^\circ$	$Re = 3.5 \times 10^5$	$\sigma = 0.9908$	$G_f = 1.001$
NACA65-(12A <sub>10</sub> )10	$i = 9^\circ$	$Re = 3.5 \times 10^5$	$\sigma = 0.9913$	$G_f = 0.992$
	$i = -13^\circ$	$Re = 3.5 \times 10^5$	$\sigma = 0.9821$	$G_f = 0.995$
跨音叶栅	$i = 9^\circ$	$Re = 3.5 \times 10^5$	$\sigma = 0.9848$	$G_f = 1.005$
	$i = 3.5^\circ$	$Re = 1.6 \times 10^6$	$\sigma = 0.9746$	$G_f = 1.009$

从表中可以看出, 在设计攻角下总压损失最小, 与亚音叶栅相比, 高亚音叶栅的总压损失要大一些, 这些都是与理论分析相符的。

## 六、结 论

上述数值试验证明, 本文中提出的计算平面叶栅可压粘性流场的方法, 具有程序简单, 收敛快和易于推广到三维流场计算等特点。通过三种不同叶栅的数值试验, 结果表明:

(1) 本方法可以比较准确地求解各种攻角下叶栅内的亚音流场。即预测流场是否分离, 并确定分离点的位置和反映尾迹的流动情况。

(2) 它能比较准确地求出二维叶栅出口处的气流角。其准确度完全能满足工程预测的需要。

(3) 该方法还能计算出各种攻角下沿叶型的压力分布曲线  $C_p$ , 有效地反映出各种叶栅的性能。

(4) 计算气流流过叶栅时的总压恢复系数  $\sigma = P_{02}/P_{01}$ 。

总之, 只要给定进口参数和叶栅的几何参数, 我们就能够解出二维叶栅内的流场, 算出一切与流动有关的气动参数, 且其准确度完全能满足工程上的需要, 从而有可能部分地取代叶栅实验, 提高经济效益。而且, 随着网格的加密, 计算精确度还能进一步提高。

## 参 考 文 献

- [1] 王立成, 张惠民, 杨崇颖. 不可压二维叶栅粘性流场数值解. 航空动力学报 1987; 2; (2)
- [2] 王立成 张惠民. 解对流扩散方程的有限元素逆风因子法. 航空学报 1985; 6; (5)
- [3] 王立成 张惠民. 逆风因子法在非正交曲线坐标系中解不可压  $N-S$  方程中的应用. 航空动力学报 1986; 1; (1)
- [4] Wang Licheng, Zhang Huimin. A Finite Element Scheme for Incompressible Viscous Flow calculation. ASME 85-IGT-131, 1985
- [5] Doormaal van J P Roithby G D. Enhancements of the SIMPLE Method For Predicting Incompressible Fluid Flows. Numerical Heat Transfer 1984; 2; 147-163
- [6] Gorski J J, Chakravarthy S R, Goldbery U C. High Accuracy TVD Schemes for the  $k-\epsilon$  Equations of Turbulence. AIAA-85-1665
- [7] Kaul UK, Kwak D. Computations of Internal Turbulent Flow With Large Separation Flow Regions. AIAA-85-1687
- [8] A Nonreflecting Outflow Boundary Condition for Subsonic Navier-Stokes Calculations. Journal of Comp. Phys. 1980; 36; 55-70
- [9] Felix A R, Emery J C. A Comparison of Typical NGTE and NACA Axial-Flow Compressor Blade Section in Cascade at Low Speed. 1957; NACA-TN-3937
- [10] Herrig L J, Emery J C, Erasn J R. Systematic Two-Dimensional Cascade Tests of NACA 65-Series Compressor Blades at Low Speed. 1957; NACA-TN-3916
- [11] Schreiber H A, Starken H. Analysis of a Transonic Compressor Rotor Blade Section. ASME Paper 83-GT-209