第19卷 第1期 航 空 学 报 Vol. 19 No. 1
1998年 1月 ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA Jan. 1998

一类非线性系统的反馈非线性化镇定

龚 诚
(西北工业大学电子工程系, 西安, 710072)
卢广山 王永年
(航空工业总公司电光设备研究所, 洛阳, 471009)

STABILIZATION OF A FAMILY OF NONLINEAR SYSTEMS VIA FEEDBACK NONLINEARIZATION

Gong Cheng
(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)
Lu Guangshan, Wang Yongnian
(E/O Equipment Technology Research Institute, Luoyang, 471009)

摘 要 给出了一类非线性系统的状态反馈非线性化镇定的方法。首先构造一个人为的输出映射, 使得系统的零动态渐近稳定并具有向量相对阶{1, …, 1}; 然后构造一类控制器使得零输出流形服从一类指数稳定的非线性动态方程。利用非线性 H^{∞}- 控制一个基本结果证明了在较弱的条件下, 所得到的闭环系统是局部渐近稳定的。最后以刚体姿态控制为例, 说明了利用上述结果, 可以得到一类仅仅需要知道系统惯性矩阵元素相对值的反馈方案, 从而在一定程度上克服了反馈线性化方法需要精确知道系统参数的弱点。

关键词 非线性系统 几何方法 姿态控制
中图分类号 TP271. 62, V249. 1

Abstract An approach to stabilize a family of nonlinear systems via feedback nonlinearization is presented. A dummy output mapping is constructed so that the zero dynamics are made asymptotically stable and the system is of relative degree{1, …, 1}; then a group of controllers are designed that guarantee the exponential attractivity of the zeroing output manifold. Using tools in nonlinear H^{∞}-control theory, it is shown that under mild conditions, the resulting closed loop system is locally asymptotically stable. Finally, these results are used to the attitude control problem for a rigid body to design detumbling controllers that only require knowledge of relative value of the system inertial parameters. This technique seems attractive in that, to a certain extent, it may lessen the need of precise system knowledge required by the feedback linearization technique.

Key words nonlinear systems, geometric approach, attitude control

非线性控制系统几何方法最为实用的结果是反馈线性化技术[1, 2]。系统的反馈线性化是通过坐标变换及非线性项相消来实现的, 因而要求设计者对系统的参数有足够精确的知识。通常隐含在这种技术后面的鲁棒性问题是不容忽略的[3, 4]。

1997-03-10 收到, 1997-09-07 收到修改稿
国家自然科学基金、国家教委归国人员启动基金和航空工业总公司电光设备研究所预研课题基金资助课题

1　系统模型及主要结果

考虑下述 Euler 系统的镇定问题

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), & x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2) + g^2(x_1, x_2)u, & x_2(0) &= x_{20} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中: x_1 为 n 维连通流形 M 上某平衡点 p_e 近旁的坐标表示; $x_2 \in R^n$, $u \in R^n$ 为控制输入, 光滑映射 $g^2(x_1, x_2)$ 在坐标系 x_1 有定义的开集 U 上对所有的 x_2 均是可逆的。不失一般性, 令 $x_1(p_e) = 0$。记 $x^T = (x_1^T, x_2^T)$, $f^T = (f_1^T, f_2^T)$, $g^T = (0^T, g^{2T})$, 则式(1)可更紧凑地表为

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \qquad x(0) = x_0 \tag{2}$$

系统式(1)或式(2)的镇定问题可叙述如下:

问题 1　找到在 $U \times R^n$ 上定义的反馈 $u = l(x)$, 使得 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, x_0) = 0$, $\forall\, x_0 \in U \times R^n$

寻找这个问题解决方案的第 1 步是构造一个控制输出映射

$$y_i = h_i(x_1, x_2) \qquad i = 1, \cdots, n \tag{3}$$

满足下述条件:

①　对于所有的 $x_0 \in U \times R^n$

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right) = n \tag{4}$$

从而在 p_e 近旁存在一个微分同胚 $U \to \phi(U) \subset R^n$, 使得 $(h_1, \cdots, h_n)^T = h(x_1, \phi(x_1)) = 0$;

②　系统在 $x = (0^T, 0^T)^T$ 近旁具有相对阶 $\{1, \cdots, 1\}$

③　流形 $h^{-1}(0)$ 是不变的, 并且零动态

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \phi(x_1)), \quad y = 0 \tag{5}$$

以 $x_1 = 0$ 为渐近稳定平衡点。

评注: 条件①　等价于 y 本身可以作为系统的一部分状态向量。

熟知这类系统经过适当坐标变换之后, 是可以完全线性化的[1,2]。然而如前所述, 非线性项的直接相消往往不是一种可取的工程方案。

为此本文方法的第 2 步便是构造反馈控制使得系统的输出式(3)满足下列方程

$$M\dot{y} + S(y)My = -Ky \tag{6}$$

式中: M 和 K 为 $n \times n$ 常值正定矩阵; $S(y)$ 为 $n \times n$ 反对称矩阵。由式(6)易推知。

$$u = \left(-M\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)g^{-1}\left(Ky + S(y)My + M\frac{\partial h}{\partial x_1}f_1 + M\frac{\partial h}{\partial x_2}f_2\right) \tag{7}$$

特别是, 容易推知[5], 流形 $h^{-1}(0)$ 是吸引的。

最后一步是考察整个闭环系统的稳定性。注意, 对于方程组(1)的第 1 个式子, 总可以找到 $n \times n$ 矩阵 q, 使得该式可表达为

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \phi(x_1)) + q(x)(x_2 - \phi(x_1)) = \tilde{f}_1(x_1) + q(x)w(x) \tag{8}$$

根据非线性 H^∞- 状态反馈控制的基本结果[6], 由于向量场 $\tilde{f}_1$ 是渐近稳定的, 总存在正数 γ, 使得下述方程

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x_1}\tilde{f}_1 + \frac{1}{2\gamma_n^2}\frac{\partial V}{\partial x_1}q(x)q^T(x)\frac{\partial V^T}{\partial x_1} + \frac{1}{2}x_1^T x_1 = 0 \\ &V(0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

有一光滑正定解。假设:

¼ $f_1(x)$ 对所有的 $x \in U \times R^n$ 是一致有界的。于是通过完全配方, 可以得到

$$\frac{5V}{5x_1}(\tilde{f}_1 + q(x)w(x)) \leqslant -\frac{1}{2}x_1^T x_1 + \frac{C^2}{2}w^T w \tag{10}$$

故知, 对于任意的 $t > 0$,

$$V(x) - V(x_0) \leqslant -\frac{1}{2}\int_0^t \| x_1(s) \|^2 ds + \frac{C^2}{2}\int_0^t \| w(s) \|^2 ds$$

由 $V(x) > 0$ 立即推得

$$\int_0^t \| x_1(s) \|^2 ds \leqslant 2V(x_0) + C^2 \int_0^t \| w(s) \|^2 ds$$

但是流形 $h^{-1}(0)$ 还是指数地吸引的[5], 故知 $\| w(t) \| = \| x_2(t) - U(x_1(t)) \| \in L_2(0, \infty) \cap L_\infty(0, \infty)$。由此推知沿解轨迹 V 对时间 t 是一致有界的。加上 $\dot{x}_1(t)$ 一致有界, 推知 $x_1(t)$ 是一致连续的。根据 Barbalet 定理[7], 得知当 $t \to \infty$ 时, $\dot{x}_1(t) \to 0$。亦即由零动态的渐近稳定推知整个闭环系统是渐近稳定的。

综上所述, 已经推得了下述主要结果:

定理 1　对于 $2n$ 维非线性系统式(1), 若假设¹ ～¼ 条件成立, 则控制律式(7)局部地将系统渐近地稳定在 $(0^T, 0^T)^T$ 处。

2　刚体姿态镇定的例子

考虑下述的刚体姿态镇定问题[8]

$$\left.\begin{aligned} &\dot{r} = G(r)X, && r(0) = r_0 \\ &J\dot{X} + [X \times]JX = u, && X(0) = X_0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$G(r) = \frac{1}{2}\left(I + [r \times] + rr^T - \frac{1 + r^T r}{2}I\right) \tag{12}$$

式中: r 为修正的 Rodriques 参数; X 为刚体旋转角速度; J 为刚体的惯性张量在刚体体坐标系中的表示。注意修正的 Rodriques 参数是流形 $SO(3)$ 上一个几乎全局有定义的坐标表示[8, 9]。

对任意向量 $a \in R^3$ $[a \times]$ 定义为反对称矩阵

$$[a \times] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

于是刚体的姿态镇定问题可叙述为:

问题 2　找到一个反馈律 $u = l(r, X)$, 使得 $\lim_{t \to \infty} r = 0, \lim_{t \to \infty} X = 0$。

评注: 刚体姿态镇定问题在空间站工程、飞行控制、机器人控制等领域有着广泛的应用[7, 8]。

根据上节的结果, 构造输出映射

$$y = X + K_i r = h(X, r) \tag{14}$$

式中: K_i 为 3×3 正定矩阵。为使

$$J\dot{y} + [X \times]Jy = -k_p y, \quad k_p > 0 \tag{15}$$

可推出下述控制律

$$u = -k_p y - JK_i G(r) X - [X\times] JK_i r \tag{16}$$

根据定理 1, 该控制律给出问题 2 的一个解。

上述控制律式(16)中仍要求知道系统的惯性参数。但注意到若惯性矩阵 J 是对角的, 令 $K_i = k_i J^{-1}$, 上式又变为

$$u = -k_p r - k_p k_i J^{-1} X - k_i G(r) X - [X\times] k_i r \tag{17}$$

这时, 只需要知道 J 的元素之间的比例即可, 而无需精确知道其准确值。

事实上, 此时的零动态是渐近稳定的, 这是因为在流形 $h^{-1}(0)$ 上

$$\frac{d}{dt}(r^T r) = 2r^T G(r) X = -\frac{1}{2}(1 + r^T r) r^T K_i J^{-1} r \begin{cases} < 0, & 若\ \|r\| \neq 0 \\ = 0, & 若\ \|r\| = 0 \end{cases} \tag{18}$$

根据上节的结果得知, 反馈系统式(11)、式(18)是以$(0^T, 0^T)^T$为渐近稳定平衡点的。特别是除了$\|r\| = \infty$之外, 整个系统是全局渐近稳定的。

评注: 本节关于姿态镇定的结果与新近的文献[8]相应的结果有相似之处。然而本节的结果有两个显著的特点。首先, 未要求高增益反馈, 而仅仅要求零输出流形 $h^{-1}(0)$ 指数地吸引, 从而保证了整个系统的渐近稳定性; 其次, 与文献[8]中使用的反馈线性化技巧不同, 这里毋宁说使用了反馈非线性化的技术, 迫使零输流形 $h^{-1}(0)$ 吸引。

本结果在姿态跟踪问题上的推广及其在火/飞耦合器设计和机载光电稳定瞄准系统中的应用, 将另文给出。

参　考　文　献

1 Isidori A. Nonlinear control systems. 2nd Ed, New York: Springer-Verlag, 1989. 391～401

2 Nijmaijer H, van der Schaft A J. Nonlinear dynamical systems. New York: Springer-Verlag, 1990. 174～207

3 龚诚, Thompson S, 戴冠中. Decentralized control of nonlinear dynamic systems: an L_2-gain control approach. 航空学报(英文版), 1997, 10(2): 135～143

4 Reiner J, Balas G J, Garrand W L. Robust dynamic inversion for highly maneuverable aircraft. J of Guidance, Control and Dynamics, 1995, 18(1): 18～24

5 高为炳. 运动稳定性基础. 北京: 高等教育出版社, 1987. 323～336

6 van der Schaft A J. L_2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H^∞-control. IEEE Trans Automat Contr, 1992, 37(6): 770～784

7 Sastry S, Bodson M. Adaptive control. Pretice-Hall Interational Inc, 1989. 19

8 Tsiotras P. Stablilization and optimality results for the attitude control problem. J of Guidance, Control, and Dynamics, 1996, 19(4): 772～779

9 Shuster M D. A survey of attitude representations. J of Astronautical Science, 1993, 41(3): 439～517