

# 第二章 压力容器应力分析

## CHAPTER II STRESS ANALYSIS OF PRESSURE VESSELS

## ●2.1 回转薄壳应力分析

2.1.1 薄壳圆筒的应力

2.1.2 回转薄壳的无力矩理论

2.1.3 无力矩理论的基本方程

2.1.4 无力矩理论的应用

2.1.5 回转薄壳的不连续分析

## 2.1 回转薄壳应力分析

### 2.1.5 回转薄壳的不连续分析

一、不连续效应与不连续分析的基本方法

二、圆柱壳受边缘力和边缘力矩作用的弯曲解

三、一般回转壳受边缘力和边缘力矩的弯曲解

四、组合壳不连续应力的计算举例

五、不连续应力的特性

## 2.1 回转薄壳应力分析

### 2.1.5 回转薄壳的不连续分析

#### 一、不连续效应与不连续分析的基本方法

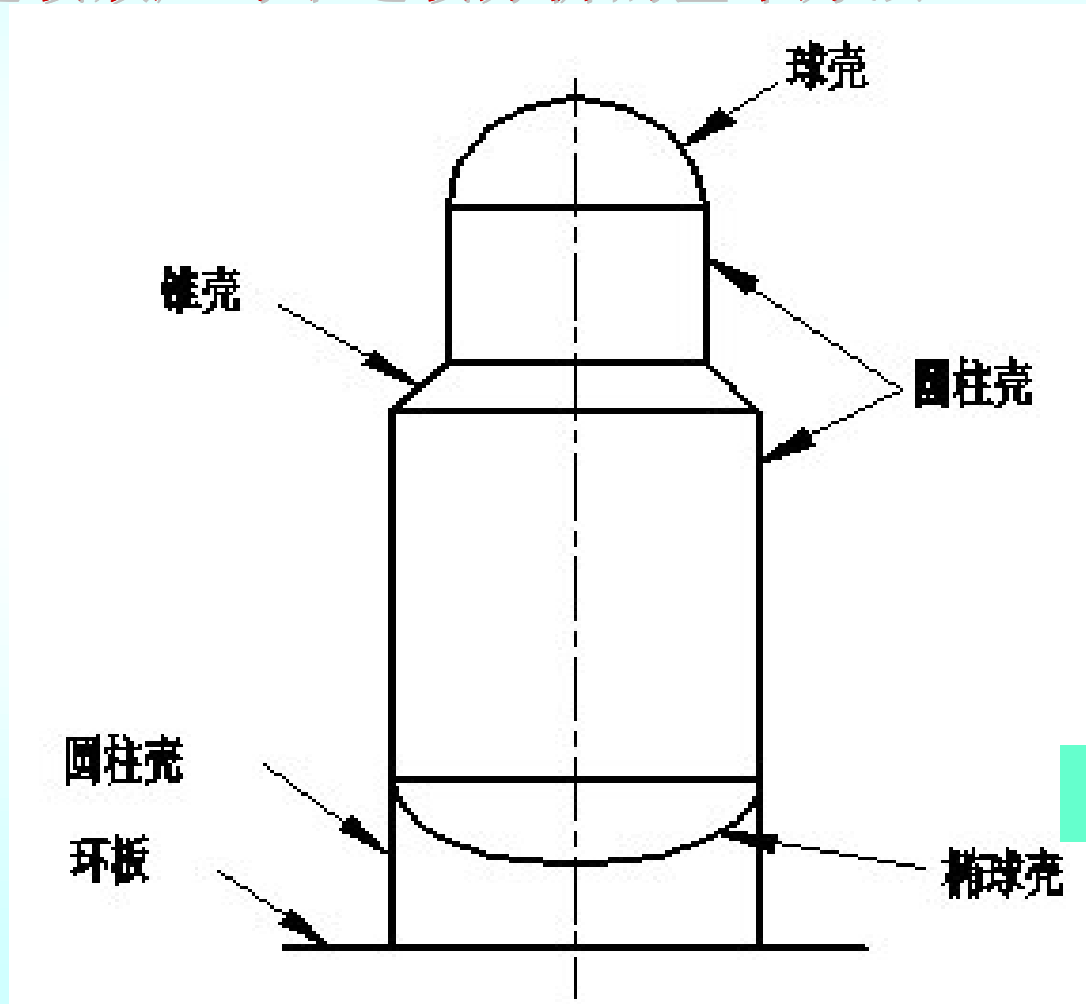


图2-12 组合壳

## 2.1 回转薄壳应力分析

### 2.1.5 回转薄壳的不连续分析

#### 1、不连续效应

实际壳体结构（图2-12）

壳体组合

结构不连续

## 2.1 回转薄壳应力分析

### 2.1.5 回转薄壳的不连续分析

#### 1、不连续效应

##### 不连续效应:

由于结构不连续，组合壳在连接处附近的局部区域出现衰减很快的应力增大现象，称为“不连续效应”或“边缘效应”。

##### 不连续应力:

由此引起的局部应力称为“不连续应力”或“边缘应力”。分析组合壳不连续应力的方法，在工程上称为“不连续分析”。

## 2.1 回转薄壳应力分析

## 2.1.5 回转薄壳的不连续分析

## 2、不连续分析的基本方法

边缘问题求解  
(边缘应力)

=

薄膜解  
(一次薄膜应力)

+

弯曲解  
(二次应力)

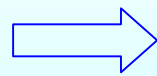
变形协调方程

$$w_1 = w_2 \quad w_1^P + w_1^{Q_0} + w_1^{M_0} = w_2^P + w_2^{Q_0} + w_2^{M_0}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \varphi_1^P + \varphi_1^{Q_0} + \varphi_1^{M_0} = \varphi_2^P + \varphi_2^{Q_0} + \varphi_2^{M_0}$$

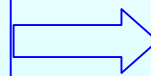
有力矩理论  
(静不定)

边缘力  $Q_0$  和  
边缘力矩  $M_0$



边缘内力

$(N_\varphi, N_\theta, M_\varphi, M_\theta, Q_\varphi)$



应力

$\sigma_\varphi^{Q_0, M_0}, \sigma_\theta^{Q_0, M_0}$

以图2-13 (c) 和(d)所示左半部分圆筒为对象，  
径向位移  $w$  以向外为负，转角以逆时针为正。

## 2.1 回转薄壳应力分析

## 2.1.5 回转薄壳的不连续分析

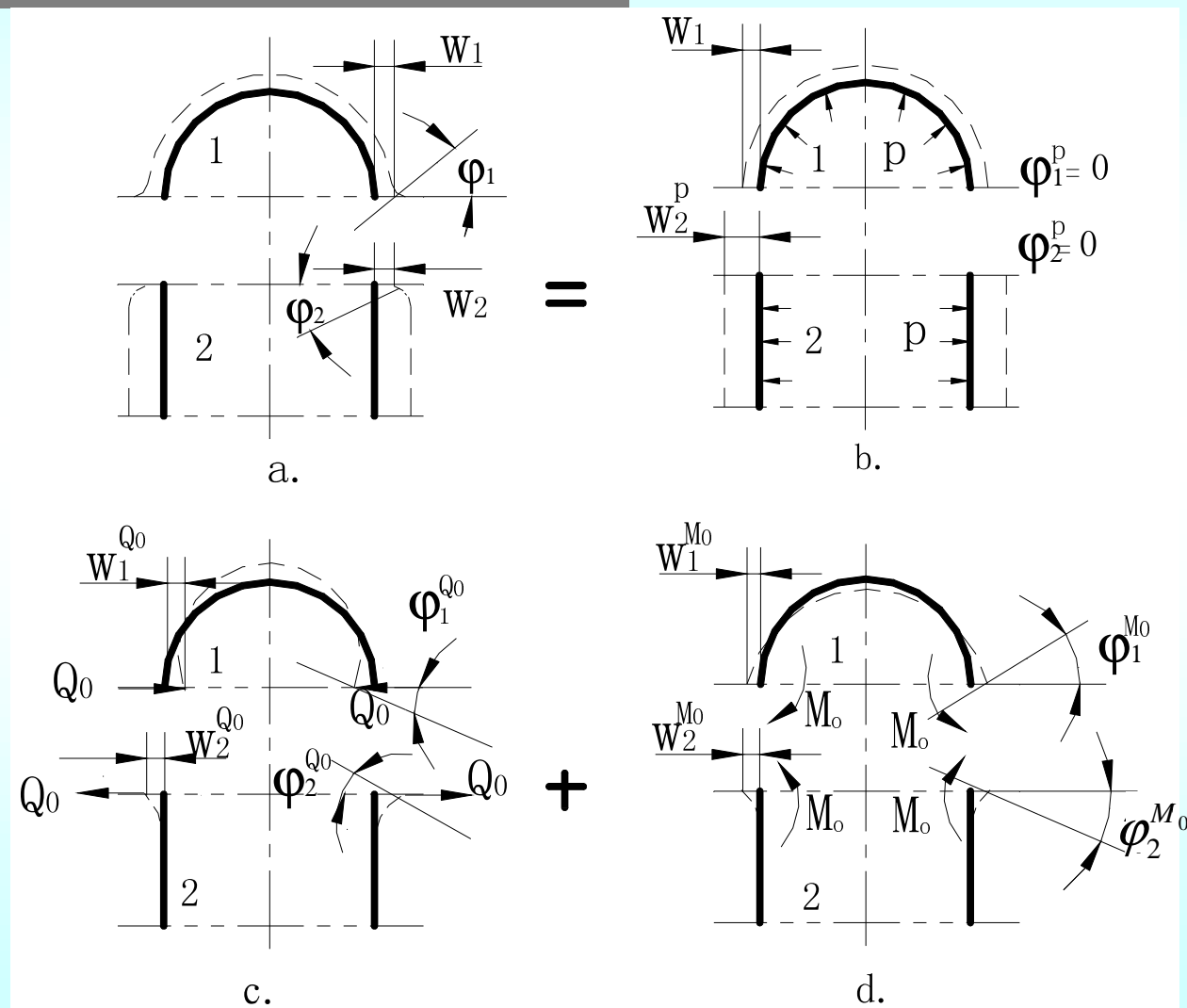


图2-13 连接边缘的变形



## 2.1 回转薄壳应力分析

### 2.1.5 回转薄壳的不连续分析

#### 二、圆柱壳受边缘力和边缘力矩作用的弯曲解

分析思路:

推导基本微分方程  
(载荷作用下变形微分方程)

微分方程通解

由边界条件确定积分常数

边缘内力

边缘应力

## 1、求解基本微分方程

轴对称加载的圆柱壳有力矩理论基本微分方程为：

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{p}{D'} + \frac{\mu}{RD'} N_x \quad (2-16)$$

式中  $D'$  — 壳体的抗弯刚度,  $D' = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$

$w$  — 径向位移;

$N_x$  — 单位圆周长度上的轴向薄膜内力,

可直接由圆柱壳轴向力平衡关系求得;

$x$  — 所考虑点离圆柱壳边缘的距离;

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 t^2}}$$

对于只受边缘力 $Q_0$ 和 $M_0$ 作用的圆柱壳，  
 $p=0$ ， $N_x=0$ ，于是式(2-16)可写为：

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = 0 \quad (2-19)$$

## 2、求微分方程的解

齐次方程(2-19)通解为：

$$w = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad (2-20)$$

式中 $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 和 $C_4$ 为积分常数，由圆柱壳两端边界条件确定。

当圆柱壳足够长时，随着 $x$ 的增加，弯曲变形逐渐衰减以至消失，因此式(2-20)中含有 $e^{\beta x}$ 项为零，亦即要求 $C_1 = C_2 = 0$ ，于是式(2-20)可写成：

$$w = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad (2-21)$$

圆柱壳的边界条件为：

$$(M_x)_{x=0} = -D' \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = M_0, \quad (Q_x)_{x=0} = -D' \left( \frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=0} = Q_0$$

利用边界条件，可得  $w$  表达式为：

$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D'} [\beta M_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) - Q_0 \cos \beta x] \quad (2-22)$$

最大挠度和转角发生在  $x = 0$  的边缘上

$$(w)_{x=0} = -\frac{1}{2\beta^2 D'} M_0 - \frac{1}{2\beta^3 D'} Q_0$$

$$(\varphi)_{x=0} = \left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = \frac{1}{\beta D'} M_0 + \frac{1}{2\beta^2 D'} Q_0 \quad (2-23)$$

其中

$$w^{M_0} = -\frac{1}{2\beta^2 D'} M_0 \qquad w^{Q_0} = -\frac{1}{2\beta^3 D'} Q_0$$

$$\varphi^{M_0} = \frac{1}{\beta D'} M_0 \qquad \varphi^{Q_0} = \frac{1}{2\beta^2 D'} Q_0$$

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = -D' \frac{d^3 w}{dx^3}$$

## 3、求内力

$$N_x = 0$$

$$N_\theta = -Et \frac{w}{R} + \mu N_x = 2\beta R e^{-\beta x} [\beta M_0 (\cos \beta x - \sin \beta x) + Q_0 \cos \beta x]$$

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{e^{-\beta x}}{\beta} [\beta M_0 (\cos \beta x + \sin \beta x) + Q_0 \sin \beta x]$$

$$M_\theta = \mu M_x$$

$$Q_x = -D \frac{d^3 w}{dx^3} = -e^{-\beta x} [2\beta M_0 \sin \beta x - Q_0 (\cos \beta x - \sin \beta x)]$$

(2-24)

## 4、求应力

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t} \pm \frac{12M_x}{t^2} z$$

$$\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{t} \pm \frac{12M_\theta}{t^2} z$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_x = \frac{6Q_x}{t^3} \left( \frac{t^2}{4} - z^2 \right)$$



正应力的最大值在壳体的表面上(  $z = \pm t/2$  ), 横向切应力的最大值发生在中面上(  $z = 0$  ), 即:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_{\max} &= \frac{N_x}{t} \pm \frac{6M_x}{t^2} \\ (\sigma_\theta)_{\max} &= \frac{N_\theta}{t} \pm \frac{6M_\theta}{t^2} \\ (\tau_x)_{\max} &= \frac{3Q_x}{2t} \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

横向切应力与正应力相比数值较小, 故一般不予计算。

### 三、一般回转壳受边缘力和边缘力矩的弯曲解

一般回转壳受边缘力和边缘力矩作用，引起的内力和变形的求解，需要应用一般回转壳理论。

有兴趣的读者可参阅文献[10]第373页至407页。

## 四、组合壳不连续应力的计算举例

现以圆平板与圆柱壳连接时的边缘应力计算为例，说明边缘应力计算方法。

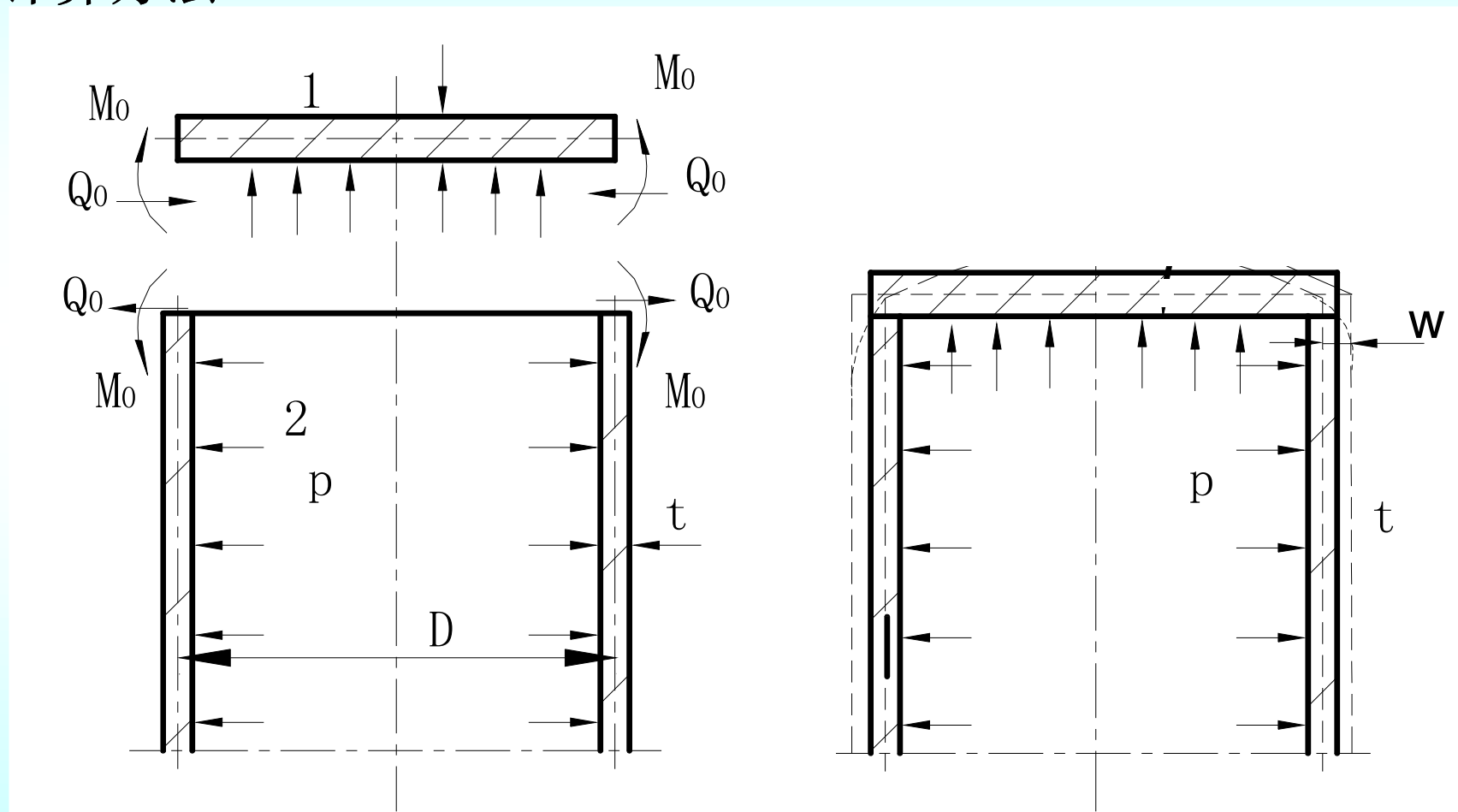


图2-14 圆平板与圆柱壳的连接

圆平板：若板很厚，可假设连接处没有位移和转角，即

$$\begin{aligned}w_1^p &= w_1^{Q_0} = w_1^{M_0} = 0 \\ \varphi_1^p &= \varphi_1^{Q_0} = \varphi_1^{M_0} = 0\end{aligned}$$

圆柱壳：边缘力和边缘力矩引起的变形可按式（2-23）计算。

内压 $p$ 引起的变形为

$$\begin{aligned}w_2^p &= -\frac{pR^2}{2Et}(2-\mu) \\ \varphi_2^p &= 0\end{aligned}$$

根据变形协调条件，即式（2-15）得：

$$w_2^p + w_2^{Q_0} + w_2^{M_0} = 0$$

$$\varphi_2^p + \varphi_2^{Q_0} + \varphi_2^{M_0} = 0$$

将位移和转角代入上式，得：

$$-\frac{pR^2}{2Et}(2-\mu) - \frac{1}{2\beta^2 D'} M_o - \frac{1}{2\beta^3 D'} Q_o = 0$$

$$\frac{1}{\beta D'} M_o + \frac{1}{2\beta^2 D'} Q_o = 0$$

解得：

$$M_0 = \beta^2 D \frac{pR^2}{Et} (2 - \mu)$$
$$Q_0 = -2\beta^3 D \frac{pR^2}{Et} (2 - \mu)$$

利用式(2-8)、式(2-18)和式(2-24)，可求出圆柱壳中最大径向应力和周向应力为

$$\left(\sum_2 \sigma_x\right)_{\max} = 2.05 \frac{pR}{t} \text{ (在 } \beta x = 0 \text{ 处, 内表面)}$$

$$\left(\sum_2 \sigma_\theta\right)_{\max} = 0.62 \frac{pR}{t} \text{ (在 } \beta x = 0 \text{ 处, 内表面)}$$

可见，与厚平板连接的圆柱壳边缘处的最大应力为壳体内表面的轴向应力，远大于远离结构不连续处圆柱壳中的应力。

## 五、不连续应力的特性

{ 局部性  
自限性

### 1、局部性：

随着离边缘距离 $x$ 的增加，各内力呈指数函数迅速衰减以至消失，这种性质称为不连续应力的局部性。

## 五、不连续应力的特性

例如，当  $x = \frac{\pi}{\beta}$  时，圆柱壳中纵向弯矩的绝对值为

$$\left| (M_x)_{x=\frac{\pi}{\beta}} \right| = e^{-\pi} M_0 = 0.043M_0 \quad \text{已衰减掉95.7\%};$$

一般钢材：  $\mu = 0.3$  则  $x = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi\sqrt{Rt}}{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}} = 2.5\sqrt{Rt}$

多数情况下：  $2.5\sqrt{Rt}$  与壳体半径  $R$  相比是一个很小的数字，这说明边缘应力具有很大的局部性。



## 2、自限性：

不连续应力是由弹性变形受到约束所致，因此对于用塑性材料制造的壳体，当连接边缘的局部区产生塑变形，这种弹性约束就开始缓解，变形不会连续发展，不连续应力也自动限制，这种性质称不连续应力的**自限性**。

## 不连续应力的危害性：

脆性材料制造的壳体、经受疲劳载荷或低温的壳体等因对过高的不连续应力十分敏感，可能导致壳体的疲劳失效或脆性破坏，因而在设计中应安有关规定计算并限制不连续应力。