空间曲线弧长公式的证明*

王 磊[1] ,高明美[2] ,任晓芳[1]

(青岛大学 a. 师范学院;b. 数学科学学院,山东 青岛 266071)

摘要:引入了一般度量空间 R^k 中曲线弧长的极限式定义,证明了该定义与已知的确界式定义等价,从而可用向量值函数的微积分工具给出弧长公式的一个简洁证明.

关键词:空间曲线; 弧长; 向量值函数

中图分类号:O172.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1006 - 0707(2009)12 - 0119 - 02

文献[1]中研究了平面曲线的弧长,是通过曲线内接折线长的极限来定义的,称为曲线弧长的极限式定义,并进一步证明了光滑曲线的弧长公式,但证明中所采用的方法过于繁琐,历来是教学中的难点;文献[2]则研究了一般度量空间 R^k 中曲线的弧长,是通过曲线内接折线长的上确界来定义的,称为曲线弧长的确界式定义,并利用向量值函数的微积分工具给出了弧长公式的一个证明. 为了使文献[2]中的方法能自然地用于简化教材的传统内容,本文中引入了度量空间 R^k 中曲线弧长的极限式定义,且证明了在 R^k 中上述 2 种曲线弧长定义的等价性,这部分知识对微分几何中相关内容的教学也有所借鉴.

1 2 种空间曲线弧长定义的等价性

将 $[a,b]$ 映入度量空间 R^k 的映射 $\vec{\gamma}$ 称为 R^k 中的曲线. 若 $\vec{\gamma}$ 是一一的,则称为弧.

假设 $\vec{\gamma}$ 是 R^k 中的任 1 条曲线,给定 $[a,b]$ 的任一分划 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$,且令 $\|P\|=\max\limits_{1\le i\le n}|\vec{\gamma}(x_i)-\vec{\gamma}(x_{i-1})|$, $\Lambda(P,\vec{\gamma})=\sum\limits_{i=1}^{n}|\vec{\gamma}(x_i)-\vec{\gamma}(x_{i-1})|$.

定义 1[2] 若由 $\Lambda(P,\vec{\gamma})$ 这些数构成的集合对于 $[a,b]$ 的全部分划是有界的,则称曲线 $\vec{\gamma}$ 是可求长的,其弧长定义为 $\Lambda(\vec{\gamma})=\sup\{\Lambda(P,\vec{\gamma})\}$.

定义 2 若对于曲线 $\vec{\gamma}$ 无论怎样的分划 P,均存在有限的极限 $\lim\limits_{P\to 0}\Lambda(P,\vec{\gamma})=L(\vec{\gamma})$,则称曲线 $\vec{\gamma}$ 是可求长的,并把 $L(\vec{\gamma})$ 定义为曲线的弧长.

定理 1 关于弧长的上述 2 个定义等价.

证明 设曲线 $\vec{\gamma}$ 按定义 1 可求长,且弧长 $\Lambda(\vec{\gamma})=\sup\{\Lambda(P,\vec{\gamma})\}$,则对任意 $\varepsilon>0$,存在分划 P_1,使得 P_1 对应的和 $\Lambda(P_1,\vec{\gamma})$ 满足 $0\le\Lambda(\vec{\gamma})-\Lambda(P_1,\vec{\gamma})<\varepsilon$. 不妨设 $\|P_1\|=\delta>0$,则对任意的分划 P_2,只要 $0\le\|P_2\|<\delta$,就有

$$\Lambda(\vec{\gamma})\ge\Lambda(P_2,\vec{\gamma})\ge\Lambda(P_1,\vec{\gamma})\ge 0$$

从而 $0\le\Lambda(\vec{\gamma})-\Lambda(P_2,\vec{\gamma})<\varepsilon$. 故 $\vec{\gamma}$ 按定义 2 可求长,且弧长为 $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\Lambda(P,\vec{\gamma})$.

另一方面,若 $\vec{\gamma}$ 按定义 2 可求长,且弧长 $L(\vec{\gamma})=\lim\limits_{\|P\|\to 0}\Lambda(P,\vec{\gamma})$,则对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当分划 P 满足 $\|P\|<\delta$ 时,对应和满足 $|\Lambda(P,\vec{\gamma})-L(\vec{\gamma})|<\varepsilon$,设 $\sup\{\Lambda(P,\vec{\gamma})\}=\Lambda(\vec{\gamma})$,则存在分划 P_1,使得 P_1 对应的和满足 $0<\Lambda(\vec{\gamma})-\Lambda(P_1,\vec{\gamma})<\varepsilon$. 若 $\|P_1\|<\delta$,则 $|\Lambda(P_1,\vec{\gamma})-L(\vec{\gamma})|<\varepsilon$,此时

$$|\Lambda(\vec{\gamma})-L(\vec{\gamma})|=|\Lambda(\vec{\gamma})-\Lambda(P_1,\vec{\gamma})+\Lambda(P_1,\vec{\gamma})-L(\vec{\gamma})|\le|\Lambda(\vec{\gamma})-\Lambda(P_1,\vec{\gamma})|+|\Lambda(P_1,\vec{\gamma})-L(\vec{\gamma})|<2\varepsilon$$

若 $\|P_1\|\ge\delta$,则将所有长度不小于 δ 的小区间插入有限个分点,使这些小区间的长度小于 δ,得到 1 个新的分划 P_2, $\|P_2\|<\delta$,则 P_2 对应的和满足 $\Lambda(P_2,\vec{\gamma})\ge\Lambda(P_1,\vec{\gamma})\ge 0$,故 $0<\Lambda(\vec{\gamma})-\Lambda(P_2,\vec{\gamma})<\varepsilon$,此时

$$|\Lambda(\vec{\gamma})-L(\vec{\gamma})|=|\Lambda(\vec{\gamma})-\Lambda(P_2,\vec{\gamma})+\Lambda(P_2,\vec{\gamma})-L(\vec{\gamma})|\le|\Lambda(\vec{\gamma})-\Lambda(P_2,\vec{\gamma})|+|\Lambda(P_2,\vec{\gamma})-L(\vec{\gamma})|<2\varepsilon$$

从而由 ε 的任意性知 $\Lambda(\vec{\gamma})=L(\vec{\gamma})$.

2 向量值函数的微分和积分

为便于叙述,先给出向量值函数的微分和积分的一些相关结果,其详细论述可参阅文献[2].

* **收稿日期**:2009 - 10 - 30

基金项目:青岛大学师范学院青年科研基金资助项目.

作者简介:王磊(1976 —),男,山东胶南人,硕士,讲师,主要从事调和分析研究.

记$[a,b]$上的 Riemann 可积函数类为 $R[a,b]$. 设 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 是$[a,b]$上的函数,若 $\vec{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_k)$将$[a,b]$映入 R^k,则称 $\vec{f}$ 为$[a,b]$上的向量值函数,$\vec{f}$ 在$[a,b]$上连续($\vec{f}$ 在$[a,b]$上连续是指对 $j=1,2,\cdots,k,f_j$ 在$[a,b]$上连续),且 $\vec{f}$ 在$[a,b]$上一致连续(即若对每个 $\varepsilon>0$,存在 1 个 $\delta>0$,对于$[a,b]$中一切满足$|x-y|<\varepsilon$的 x,y 而言,都能使$|\vec{f}(x)-\vec{f}(y)|<\varepsilon$). 对任一 $x\in[a,b]$,令$\Phi(t)=\dfrac{\vec{f}(t)-\vec{f}(x)}{t-x}$, $a\le t\le b,t\neq x$,定义 $\vec{f}(x)$的导函数为 $\vec{f}'(x)=\lim\limits_{t\to x}\Phi(t)$,则称 $\vec{f}\in\mathbf{R}[a,b]$(指对 $j=1,2,\cdots,k,f_j\in\mathbf{R}[a,b]$),定义 $\vec{f}(x)$在$[a,b]$上的积分为

$$\int\vec{f}(x)\mathrm{d}x=\left(\int f_1(x)\mathrm{d}x,\int f_2(x)\mathrm{d}x,\cdots,\int f_k(x)\mathrm{d}x\right).$$

引理 1 若 $\vec{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_k)$在$[a,b]$连续,则 $\vec{f}$ 在$[a,b]$上一致连续.

引理 2 $\vec{f}$ 在点 x 可微当且仅当 $f_1,\cdots,f_k$ 在点 x 可微,且 $\vec{f}'=(f_1',f_2',\cdots,f_k')$.

引理 3 $\vec{f_1}\in\mathbf{R}[a,b],\vec{f_2}\in\mathbf{R}[a,b]$,则$\vec{f_1}+\vec{f_2}\in\mathbf{R}[a,b]$, $c\vec{f_j}\in\mathbf{R}[a,b]$, $c\in\mathbf{R},j=1,2$ 且

$$\int(\vec{f_1}+\vec{f_2})\mathrm{d}x=\int\vec{f_1}\mathrm{d}x+\int\vec{f_2}\mathrm{d}x,\ \int c\vec{f_j}\mathrm{d}x=c\int\vec{f_j}\mathrm{d}x$$

引理 4 若 $\vec{f}\in\mathbf{R}[a,b]$, $a<c<b$,则 $\vec{f}\in\mathbf{R}[a,c]$, $\vec{f}\in\mathbf{R}[c,b]$,且 $\int\vec{f}\mathrm{d}x+\int\vec{f}\mathrm{d}x=\int\vec{f}\mathrm{d}x$.

引理 5 设 $\vec{f}$ 及 $\vec{F}$ 将$[a,b]$映入 R^k, $\vec{f}\in\mathbf{R}[a,b]$, $\vec{F}'=\vec{f}$,则 $\int\vec{f}(x)\mathrm{d}x=\vec{F}(b)-\vec{F}(a)$.

引理 6 若 $\vec{f}\in\mathbf{R}[a,b]$,则$|\vec{f}|\in\mathbf{R}[a,b]$且$\left|\int\vec{f}(x)\mathrm{d}x\right|\le\int|\vec{f}(x)|\mathrm{d}x$.

证明 设 $\vec{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_k)$,$|\vec{f}|\in\mathbf{R}[a,b]$容易得到. 为了证明不等式,令$\vec{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_k)$, $y_j=\int f_j\mathrm{d}x$,则$\vec{y}=\int\vec{f}\mathrm{d}x$,且

$$|\vec{y}|^2=\sum y_j^2=\sum y_j\int f_j\mathrm{d}x=\int\left(\sum y_jf_j\right)\mathrm{d}x.$$

根据 Schwarz 不等式 $\sum y_jf_j(t)\le|\vec{y}||\vec{f}(t)|$, $t\in[a,b]$,就有$|\vec{y}|^2\le|\vec{y}|\int|\vec{f}|\mathrm{d}x$,即为要证明的不等式.

3 弧长公式的向量值证明

基于定义 1,给出了 R^k 中曲线弧长公式的一个简洁证明,即如下结论.

定理 2[2] 设 $\vec{\gamma}$ 为 R^k 中的曲线,$\vec{\gamma}'$在$[a,b]$上连续,则 $\vec{\gamma}$ 可求长,且弧长 $\Lambda(\vec{\gamma})=\int|\vec{\gamma}'(t)|\mathrm{d}t$.

证明 若 $a\le x_{i-1}\le x_i\le b$,则$|\vec{\gamma}(x_i)-\vec{\gamma}(x_{i-1})|=\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\vec{\gamma}'(t)\mathrm{d}t\right|\le\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\vec{\gamma}'(t)|\mathrm{d}t$,所以对$[a,b]$的每个分划 P,有 $\Lambda(\vec{\gamma})\le\int|\vec{\gamma}'(t)|\mathrm{d}t$.

下面证明反向不等式. 给定 $\varepsilon>0$,由 $\vec{\gamma}'$在$[a,b]$上一致连续,可知存在 $\delta>0$,当$|s-t|<\delta$时有$|\vec{\gamma}'(s)-\vec{\gamma}'(t)|<\varepsilon$. 设 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$是$[a,b]$的 1 个分划,并且对一切 i,$\Delta x_i<\delta$. 若 $x_{i-1}\le t\le x_i$,则$|\vec{\gamma}'(t)|\le|\vec{\gamma}'(x_i)|+\varepsilon$. 所以

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\vec{\gamma}'(t)|\mathrm{d}t\le|\vec{\gamma}'(x_i)|\Delta x_i+\varepsilon\Delta x_i=\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\vec{\gamma}'(t)+\vec{\gamma}'(x_i)-\vec{\gamma}'(t)]\mathrm{d}t\right|+\varepsilon\Delta x_i\le$$

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\vec{\gamma}'(t)\mathrm{d}t\right|+\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\vec{\gamma}'(x_i)-\vec{\gamma}'(t)]\mathrm{d}t\right|+\varepsilon\Delta x_i\le|\vec{\gamma}(x_i)-\vec{\gamma}(x_{i-1})|+2\varepsilon\Delta x_i$$

将上述不等式相加得到

$$\int|\vec{\gamma}'(t)|\mathrm{d}t\le\Lambda(P,\vec{\gamma})+2\varepsilon(b-a)\le\Lambda(\vec{\gamma})+2\varepsilon(b-a)$$

故由 ε 的任意性,可得 $\int_a^b|\vec{\gamma}'(t)|\mathrm{d}t\le\Lambda(\vec{\gamma})$,即结论成立.

按照定理 2,当 $k=2$ 时,即 $\vec{\gamma}$ 为平面曲线的情形,设 $\vec{\gamma}(t)=(x(t),y(t))$,若 $\vec{\gamma}'(t)$在$[a,b]$上连续,则 $\Lambda(\vec{\gamma})=\int|\vec{\gamma}'(t)|\mathrm{d}t=\int\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t$,这正是文献[1]中的结果. 同样,也容易得到空间 R^3 中曲线的弧长公式.

参考文献:

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析(上册)[M]. 北京:高等教育出版社,1999.

[2] Walter Rudin. Principles of Mathematical Analysis[M]. McGraw-Hill Company,1976.