用矩阵符号函数解 (广义) 周期 方程 *1)

陈小山
(华南师范大学数学科学学院, 广州 510631)

摘 要

(广义) 周期 S . e e. 方程来源于周期离散线性系统. 本文主要研究这类方程满足特征值分别位于开左半复平面和开右半复平面或位于单位圆周内和单位圆周外条件时用矩阵符号函数求解的数值方法. 并通过数值例子说明我们的结论.

关键词: 矩阵符号函数; (广义) 周期 S . e e. 方程; Ne 迭代

MR (2000) 主 分类: 65F10

1. 引 言

本文使用符号: $\mathbb{C}^{m\times n}$ 表示 m n 复矩阵集 , I 是适当维数的单位矩阵, $\times$ $\times_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数, $\lambda(A)$, $\lambda(A,B)$ 和 $\lambda(\ (A_k,B_k)\ _{k=1}^{p})$ 分别表示矩阵 A, 正则矩阵对 (A,B) 和正则周期矩阵对 $(A_k,B_k)\ _{k=1}^{p}$ 的所有特征值 (括 穷特征值) 构成的集 .

考虑如下周期为 p 的周期 S lvester 方程

$$A_kX_k \quad X_{k+1}B_k = E_k, \quad k=1,\dots,p. \tag{1.1}$$

和广义周期 S lvester 方程

$$\begin{cases} A_kX_k & Y_kB_k = E_k, \\ C_kX_{k+1} & Y_kD_k = F_k, \end{cases} \quad k=1,\dots,p. \tag{1.2}$$

其中 A_k,C_k $\mathbb{C}^{m\times m}$, B_k,D_k $\mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $X_{p+1}=X_1$. (广义) 周期 S lvester 方程在周期矩阵特征值的排序和 散线性周期系统有广泛的应用 [9–11, 15]. 文献 [9,10] 已证明当 $\lambda\left(\prod_{k=1}^{p} A_{p-k+1}\right)$ $\lambda\left(\prod_{k=1}^{p} B_{p-k+1}\right) =$, 周期 S lvester 方程 (1.1) 有唯一解和当 $\lambda(\ (A_k,C_k)\ _{k=1}^{p})$ $\lambda(\ (B_k, D_k)\ _{k=1}^{p}) =$, 广义周期 S lvester 方程 (1.2) 有唯一解. (有关周期特征值问 的相关知识可参见文 [7,9-11].) 特别当周期 $p=1$ 时, 那么 (广义) 周期 S lvester 方程分别转化为 S lvester 方程 AX $XB=E$ 和广义 S lvester 方程 AX $YB=E$, CX $YD=F$. 这类矩阵方程在控制论和线性系统的稳定性分析起了重要 用 [2, 4, 5, 8, 12–14].

* 2011 年 6 月 30 日收到.
1) 基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金项目 (20104407110001), 中山大学广东省计算科学重点实验室开放基金项目 (201106005), 省科技攻关项目 (2011B010200027) 和省自然科学基金项目 (S2011040003243).

设矩阵 Z $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的 Jordan 分解为

$$Z = S \begin{bmatrix} J^- & 0 \\ 0 & J^+ \end{bmatrix} S^{-1},$$

其中 J^- $\mathbb{C}^{k\times k}, J^+$ $\mathbb{C}^{(n-k)\times(n-k)}$ 分别是特征值位于开左半复平面和开右半复平面的约当块. 那么矩阵 Z 的符号函数 $\mathrm{sign}(Z)$ 定义为

$$\mathrm{sign}(Z) = S \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} S^{-1}.$$

将 Ne ton 迭代应用于 $Z^2 = I$ 可得如下求矩阵 Z 的符号函数的 Ne ton 迭代方法

$$Z_{k+1} = (Z_k + Z_k^{-1})/2, \quad Z_0 = Z, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.3}$$

Roberts [14] 证明了 $\lim\limits_{k\to\infty} Z_k = \mathrm{sign}(Z)$. 当 S lvester 方程 $AX \quad XB = E$ 满足 A 和 B 的特征值位于左半开复平面时, 则 $AX \quad XB = E$ 的解满足

$$\mathrm{sign}\left(\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} I & 2X \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

矩阵符号函数在控制论中发挥着重要 用, 有关它的详细研究可参见文献 [2,3,6,12,14]. Benner 和 Quintana-Orti [4] 利用矩阵符号函数求解方程具有结构的稳定广义 L apunov 方程. 然而在有些应用中产生的 S lvester 方程中矩阵的特征值分别位单位圆周内和单位圆周外. 例如在求解周期 散 Riccati 方程时, 需要求位于单位圆周内的特征值的不变子空间. 因此对矩阵 Schur 分解时, 就必须对特征值进行重新排序. 在排序过程就涉及解这种类型的周期 S lvester 方程 [9–11].

因此, 本文研究利用矩阵符号函数求解分别具有以下特点的 (广义) 周期 S lvester 方程.

对周期 S lvester 方程 (1.1)(广义周期 S lvester 方程 (1.2)), 积矩阵 $\prod_{k=1}^{p} A_k$ 和 $\prod_{k=1}^{p} B_k$ (周期矩阵对 $(A_k, C_k)\,{}_{k=1}^{p}$ 和 $(B_k, D_k)\,{}_{k=1}^{p}$) 的特征值分别位于开左半复平面和开右半复平面;

对周期 S lvester 方程 (1.1)(广义周期 S lvester 方程 (1.2)), 积矩阵 $\prod_{k=1}^{p} A_k$ 和 $\prod_{k=1}^{p} B_k$ (周期矩阵对 $(A_k, C_k)\,{}_{k=1}^{p}$ 和 $(B_k, D_k)\,{}_{k=1}^{p}$) 的特征值分别位于单位圆周内和单位圆周外.

接下来的第二节研究用矩阵符号函数求解周期 S lvester 方程 (1.1) 的数值方法, 这推广了式 (1.4). 第三节研究用矩阵符号函数求解广义周期 S lvester 方程 (1.2) 的数值方法. 第四节给出一个数值例子说明我们的数值方法.

2. 用矩 符号函数解周期 1 21 . .12 2(.121 .1. .1). .2 (

定理 1. 设 A 和 B 的特征值分别位于单位圆周内和单位圆周外. 那么 S lvester 方程 $AX \quad XB = E$ 的解 X 满足

$$\operatorname{sign}\left(\begin{bmatrix} (A \quad I)^{-1}(A+I) & 2(A \quad I)^{-1}E(B \quad I)^{-1} \\ 0 & (B+I)(B \quad I)^{-1} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \quad I & 2X \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

证明. 容易验证 X 是 S lvester 方程 $AX \quad XB = E$ 的解当且仅当 X 是 S lvester 方程

$$(A \quad I)^{-1}(A+I)X \quad X(B+I)(B \quad I)^{-1} = \quad 2(A \quad I)^{-1}E(B \quad I)^{-1} \tag{2.2}$$

的解. 由 A 和 B 的特征值分别位于单位圆周内和单位圆周外, 可知 $(A \quad I)^{-1}(A+I)$ 和 $(B+I)(B \quad I)^{-1}$ 的特征值分别位于开左半复平面和开右半复平面. 由 (2.2) 和 (1.4) 可知 (2.1) 成立. 证毕.

接下来研究利用矩阵符号函数求周期 S lvester 方程 (1.1) 的解.

定理 2. 设 ${}_{k=1}^{p} A_{p-k+1}$ 和 ${}_{k=1}^{p} B_{p-k+1}$ 的特征值分别位于开左半复平面和开右半夏平面内. 那么周期 S lvester 方程 (1.1) 的解 $X_k, k=1,\dots,p$ 满足

$$\operatorname{sign}(\ {}_{k}\cdots\ {}_{1}\ {}_{p}\cdots\ {}_{k+1}) = \begin{bmatrix} \quad I & 2X_{k+1} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

其中 $X_{p+1} = X_1,\ {}_{p+1} = \ {}_{1}$ 和

$$ {}_{k} = \begin{bmatrix} A_k & E_k \\ 0 & B_k \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

证明. 令

$$\mathcal{X}_k = \begin{bmatrix} I & X_k \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad k=1,\dots,p,$$

其中 $X_k, k=1,\dots,p$ 是周期 S lvester 方程 (1.1) 的解. 那么对 $k=1,\dots,p$, 由 (2.4) 我们得到

$$\mathcal{X}_{k+1}^{-1}\ {}_{k}\mathcal{X}_k = \begin{bmatrix} A_k & A_kX_k \quad X_{k+1}B_k \quad E_k \\ 0 & B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

因而

$$\begin{aligned} & \operatorname{sign}(\ {}_{k}\cdots\ {}_{1}\ {}_{p}\cdots\ {}_{k+1}) \\ = \ & \operatorname{sign}\left(\mathcal{X}_{k+1}\begin{bmatrix} A_k \quad A_1A_p \quad A_{k+1} & 0 \\ 0 & B_k \quad B_1B_p \quad B_{k+1} \end{bmatrix}\mathcal{X}_{k+1}^{-1}\right) \\ = \ & \mathcal{X}_{k+1}\operatorname{sign}\left(\begin{bmatrix} A_k \quad A_1A_p \quad A_{k+1} & 0 \\ 0 & B_k \quad B_1B_p \quad B_{k+1} \end{bmatrix}\right)\mathcal{X}_{k+1}^{-1} \\ = \ & \mathcal{X}_{k+1}\begin{bmatrix} \quad I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\mathcal{X}_{k+1}^{-1} = \begin{bmatrix} \quad I & 2X_{k+1} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中上面第三个等号成立是因为

$$\lambda(A_k \cdots A_1 A_p \cdots A_{k+1}) = \lambda(A_p A_{p-1} \cdots A_1) \quad 和 \quad \lambda(B_k \cdots B_1 B_p \cdots B_{k+1}) = \lambda(B_p B_{p-1} \cdots B_1).$$

证毕.

注 1. 当周期 $p=1$ 时, 由公式 (2.3) 就转化为公式 (1.4).

定理 3. 设 $\prod_{k=1}^{p} A_{p-k+1}$ 和 $\prod_{k=1}^{p} B_{p-k+1}$ 的特征值分别位于单位圆周内和单位圆周外. 那么周期 Sylvester 方程 (1.1) 的解 $X_k, k=1,\ldots,p$ 满足

$$\operatorname{sign}\left(\begin{bmatrix} (\mathcal{A}_k - I)^{-1}(\mathcal{A}_k + I) & 2(\mathcal{A}_k - I)^{-1}\mathcal{E}_k(\mathcal{B}_k - I)^{-1} \\ 0 & (\mathcal{B}_k + I)(\mathcal{B}_k - I)^{-1} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -I & 2X_{k+1} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

其中 $\mathcal{A}_k = \prod_{i=1}^{k} A_{k-i+1} \prod_{i=1}^{p-k} A_{p-i+1}$, $\mathcal{B}_k = \prod_{i=1}^{k} B_{k-i+1} \prod_{i=1}^{p-k} B_{p-i+1}$, $\mathcal{E}_k = \sum_{i=1}^{p} \Phi_{p-i+1}^{(k)}(A,E,B)$ 和

$$\Phi_i^{(k)}(A,E,B) = \begin{cases} A_k \cdots A_{i-1} E_i B_{i-1} \cdots B_1 B_p \cdots B_{k+1}, & 1 \leq i \leq k, \\ A_k \cdots A_1 A_p \cdots A_{i+1} E_i B_{i-1} \cdots B_{k+1}, & k+1 \leq i \leq p. \end{cases}$$

. 用矩　符号函数解广义周期　　方程

本节研究用矩阵符号函数求解广义周期 S lvester 方程 (1.2). 先给出周期 $p=1$ 时广义 S lvester 方程的解的两个结论. 接下来的定理 3.1 可由文 [6] 的命　2.1 直接得到.

定理 4.[6] 设正则矩阵对 (A,C) 和 (B,D) 的特征值分别位于开左半复平面和开右半复平面. 那么广义 S lvester 方程 $AX \quad YB=E, CX \quad YD=F$ 的解 (X,Y) 满足

$$\operatorname{sign}\left(\begin{bmatrix} C & F \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & B \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} I & 2X \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{sign}\left(\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & F \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1}\right)=\begin{bmatrix} I & 2Y \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

定理 5. 设正则矩阵对 (A,C) 和 (B,D) 的特征值分别位于单位圆周内和单位圆周外. 那么广义 S lvester 方程 $AX \quad YB=E, CX \quad YD=F$ 的解 (X,Y) 满足

$$\operatorname{sign}\left(\begin{bmatrix} A \quad C & E+F \\ 0 & B \quad D \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A+C & E \quad F \\ 0 & B+D \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} I & 2X \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{sign}\left(\begin{bmatrix} A+C & E \quad F \\ 0 & B+D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \quad C & E+F \\ 0 & B \quad D \end{bmatrix}^{-1}\right)=\begin{bmatrix} I & 2Y \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

证明. (X,Y) 是广义 S vester 方程 $AX \quad YB=E, CX \quad YD=F$ 的解当且仅当 (X,Y) 是广义 S vester 方程

$$(A+C)X \quad Y(B+D)=E+F, \quad (A \quad C)X \quad Y(B \quad D)=E \quad F$$

的解. 容易验证当矩阵对 (A,C) 和 (B,D) 的特征值分别位于单位圆周内和单位圆周外时, 矩阵对 $(A+C, A \quad C)$ 和 $(B+D, B \quad D)$ 的特征值分别位于开左半复平面和开右半复平面. 因而由定理 3.1 可知 (3.3) 和 (3.4) 成立. 证毕.

接下来给出利用矩阵符号函数求解广义周期 S lvester 方程 (1.2) 的结论.

定理 6. 设正则周期矩阵对 $(A_k, C_k)\ _{k=1}^{p}$ 和 $(B_k, D_k)\ _{k=1}^{p}$ 的特征值分别位于开左半复平面和开右半复平面. 那么广义周期 S lvester 方程 (1.2) 的解 $(X_k, Y_k)\ _{k=1}^{p}$ 满足

$$\operatorname{sign}\ \mathcal{W}_k^{-1}\ \ _k \ldots \mathcal{W}_1^{-1}\ \ _1\mathcal{W}_p^{-1}\ \ _p \ldots \mathcal{W}_{k+1}^{-1}\ \ _{k+1}) = \begin{bmatrix} I & 2X_{k+1} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

证明. 令

$$\mathcal{X}_k = \begin{bmatrix} I & X_k \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}_k = \begin{bmatrix} I & Y_k \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad k = 1, \ldots, p,$$

那么容易验证当 $(X_k, Y_k)\ _{k=1}^{p}$ 是广义周期 S lvester 方程 (1.2) 的解时, 由 (3.7) 可得

$$_k = \mathcal{Y}_k \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & C_k \end{bmatrix} \mathcal{X}_k^{-1}, \quad \mathcal{W}_k = \mathcal{Y}_k \begin{bmatrix} B_k & 0 \\ 0 & D_k \end{bmatrix} \mathcal{X}_{k+1}^{-1}, \quad k = 1, \ldots, p.$$

因而我们有

$$\ _k^{-1} \ _k \cdots \ _1^{-1} \ _1 \ _p^{-1} \ _p \cdots \ _{k+1}^{-1} \ _{k+1})$$

$$= \left(\ _{k+1} \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{k}(C_{k-i+1}^{-1}A_{k-i+1}) \prod_{i=1}^{p-k}(C_{p-i+1}^{-1}A_{p-i+1}) & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^{k}(D_{k-i+1}^{-1}B_{k-i+1}) \prod_{i=1}^{p-k}(D_{p-i+1}^{-1}B_{p-i+1}) \end{bmatrix} \ _{k+1}^{-1} \right)$$

$$= \ _{k+1} \left(\begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{k}(C_{k-i+1}^{-1}A_{k-i+1}) \prod_{i=1}^{p-k}(C_{p-i+1}^{-1}A_{p-i+1}) & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^{k}(D_{k-i+1}^{-1}B_{k-i+1}) \prod_{i=1}^{p-k}(D_{p-i+1}^{-1}B_{p-i+1}) \end{bmatrix} \right) \ _{k+1}^{-1}$$

$$= \ _{k+1} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) \ _{k+1}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 2X_{k+1} \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

因而式 (3.5) 成立. 类似可证式 (3.6). 证毕.

定理 7. 设正则周期矩阵对 $(A_k, C_k)\ _{k=1}^{p}$ 和 $(B_k, D_k)\ _{k=1}^{p}$ 的特征值分别位于单位圆周内和单位圆周外. 那么广义周期 S lvester 方程 (1.2) 的解 $(X_k, Y_k)\ _{k=1}^{p}$ 满足 X_k 是周期 S lvester 方程

$$C_k^{-1}A_kX_k \quad X_{k+1}D_k^{-1}B_k = C_k^{-1}E_k + C_k^{-1}F_kD_k^{-1}B_k, \quad k = 1, \ldots, p \tag{3.8}$$

的解和 Y_k 是周期 S lvester 方程

$$A_{k+1}C_k^{-1}Y_k \quad Y_{k+1}B_{k+1}D_k^{-1} = E_{k+1}D_k^{-1} \quad A_{k+1}C_k^{-1}F_kD_k^{-1}, \quad k = 1, \ldots, p \tag{3.9}$$

的解, 其中 $A_{p+1} = A_1, B_{p+1} = B_1, Y_{p+1} = Y_1, E_{p+1} = E_1$.

证明. 由条件可知 C_k 和 D_k 是非奇异矩阵. 对 $k = 1, \ldots, p$, 由 (1.2) 中的方程 C_kX_{k+1} $Y_kD_k = F_k$ 得到

$$Y_k = C_kX_{k+1}D_k^{-1} \quad F_kD_k^{-1} \tag{3.10}$$

将 (3.10) 代入 (1.2) 中的方程 $A_kX_k \quad Y_kB_k = E_k$ 可得 (3.8); 再由 (1.2) 中的方程 C_kX_{k+1} $Y_kD_k = F_k$ 得到

$$X_{k+1} = C_k^{-1}F_k + C_k^{-1}Y_kD_k. \tag{3.11}$$

将 (3.11) 代入 (1.2) 中的方程 $A_{k+1}X_{k+1} \quad Y_{k+1}B_{k+1} = E_{k+1}$ 可得 (3.9). 证毕.

注 2. 当广义周期 S lvester 方程 (1.2) 满足周期矩阵对 $(A_k, C_k)\ _{k=1}^{p}$ 和 $(B_k, D_k)\ _{k=1}^{p}$ 的特征值分别位于单位圆周内和单位圆周外时, 使用 (3.8) 和 (3.9) 可将广义周期 S lvester 方程转化为周期 S lvester 方程, 然后利用定理 2.3 的结论求解.

. 数值例子

由定理 2.3 可得求解周期 S lvester 方程 (1.1) 的如下算法.

算法 1. 输入: $A_k \quad \mathbb{R}^{m\times m}, B_k \quad \mathbb{R}^{n\times n}, E_k \quad \mathbb{R}^{m\times n}, k=1,\dots,p.$

输出: 周期方 S lvester 方程 (1.1) 的解 $X_k, k=1,\dots,p.$

1. 判断 $\prod_{k=1}^{p} A_{p-k+1}$ 和 $\prod_{k=1}^{p} B_{p-k+1}$ 的特征值是否位于单位圆周内和单位圆周外. 若是则继续, 若不是则停止.

2. 计算 $\mathcal{A}_p = A_pA_{p-1} \quad A_1, \mathcal{B}_p = B_pB_{p-1} \quad B_1$ 和

$$\mathcal{E}_p = E_pB_{p-1} \quad B_1 + A_pE_{p-1}B_{p-2} \quad B_1 + \quad + A_p \quad A_2E_1.$$

3. 利用 Ne ton 迭代 (1.3) 计算

$$S = \mathrm{sign}\left(\begin{bmatrix} (\mathcal{A}_p \quad I)^{-1}(\mathcal{A}_p+I) & 2(\mathcal{A}_p \quad I)^{-1}\mathcal{E}_p(\mathcal{B}_p \quad I)^{-1} \\ 0 & (\mathcal{B}_p+I)(\mathcal{B}_p \quad I)^{-1} \end{bmatrix}\right).$$

4. $X_1 = \frac{1}{2}S(1:m, m+1:m+n).$

5. 计算 $X_{k+1} = (A_kX_k \quad E_k)B_k^{-1}, k=1,\dots,p \quad 1.$

注 3. 当周期 $p>1$ 时, 算法 4.1 中的第 2 步涉及到矩阵积的运算, 如果这些矩阵是病态的话, 这可 导致算法的不稳定. 下面的定理给出矩阵积的向后稳定性分析.

定理 8. 设 $A_k \quad \mathbb{C}^{n\times n}, k=1,2,\dots,p.$ 那么有

$$fl(A_1A_2 \quad A_p) = A_1A_2 \quad A_p + \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} \quad \left(\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p \quad 1}{k}(1.01n\mathbf{u})^k\right) A_1 \;\; A_2 \quad\quad A_p \;,$$

其中 $fl()$ 表示两个复数的浮点数运算, $\mathbf{u}$ 表示机器精度和 A 表示矩阵 A 的元素取绝对值后得到的矩阵.

证明. 对矩阵的个数 $p>1$ 数 归纳法. 当 $p=2$ 时, 由文献 [1] 有

$$fl(A_1A_2) = A_1A_2 + \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} \quad 1.01n\mathbf{u}\, A_1 \;\; A_2 \;.$$

假设对 $j \quad 1 (j>2)$ 个矩阵的乘积, 定理结论成立. 下面考虑 j 个矩阵相乘的情形. 由假设我们有

$$\begin{aligned} & fl(A_1A_2 \quad A_j) \\ = \;& fl(fl(A_1A_2 \quad A_{j-1})A_j) \\ = \;& fl((A_1A_2 \quad A_{j-1}+\mathbf{E_1})A_j), \quad \mathbf{E_1} \quad \left(\sum_{k=1}^{j-2}\binom{j \quad 2}{k}(1.01n\mathbf{u})^k\right) A_1 \;\; A_2 \quad\quad A_{j-1} \\ = \;& ((A_1A_2 \quad A_{j-1}+\mathbf{E_1})A_j) + \mathbf{E_2}, \quad \mathbf{E_2} \quad 1.01n\mathbf{u}\, A_1A_2 \quad A_{j-1}+\mathbf{E_1} \;\; A_j \\ = \;& A_1A_2 \quad A_{j-1}A_j + \mathbf{E}, \end{aligned}$$

其中 $|\mathbf{E}| \le |\mathbf{E_1}||A_j| + |\mathbf{E_2}|$ 且满足

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}| &\le |\mathbf{E_1}||A_j| + |\mathbf{E_2}| \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{j-2}\binom{j-2}{k}(1.01n\mathbf{u})^k + 1.01n\mathbf{u} + \sum_{k=1}^{j-2}\binom{j-2}{k}(1.01n\mathbf{u})^{k+1}\right)|A_1||A_2|\cdots|A_j| \\
&= \left(\sum_{k=1}^{j-1}\binom{j-1}{k}(1.01n\mathbf{u})^k\right)|A_1||A_2|\cdots|A_j| .
\end{aligned}$$

上面的等式成立是因为组合数公式 $\binom{j-2}{k}+\binom{j-2}{k-1}=\binom{j-1}{k}$. 证毕.

注 4. 算法 4.1 的第 3 步是求上三角块矩阵的符号函数, 文献 [4,5] 对具有这种结构的矩阵的符号函数求解提出了减少运算量的处理方法.

Granat 和 Kagstrom [9] 利用矩阵的 Kronecker 积 (见文献 [2]) 将周期的 Sylvester 方程 (1.1) 转化为求解具有结构的线性方程组 $Zx = b$, 其中

$$Z = \begin{pmatrix} I\otimes A_1 & B_1^T\otimes I & & & \\ & I\otimes A_2 & B_2^T\otimes I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ B_p\otimes I & & & & I\otimes A_p \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \mathrm{vec}(E1) \\ \mathrm{vec}(E2) \\ \mathrm{vec}(E3) \end{pmatrix}.$$

为了说明算法 4.1 的实际效果, 我们给出一个数值试验. 试验所用的软件为 Matlab/version 6.5, 机器精度为 2.22×10^{-16}. 对计算解 $\{X_i\}_{i=1}^{p}$ 的相对残量定义为

$$\mathrm{re} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{p}\|A_kX_k - X_{k+1}B_k - E_k\|_F^2}{\sum_{k=1}^{p}(\|A_kX_k\|_F^2 + \|X_{k+1}B_k\|_F^2 + \|E_k\|_F^2)}}.$$

例 1. 考虑如下周期 $p = 3$ 的周期 Sylvester 方程 (1.1), 其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 8 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.03 & 9 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 21 \\ 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

下表中的 $\mathrm{cond}(Z)$ 表示矩阵 Z 的谱条件数, 即 $\mathrm{cond}(Z) = \|Z\|_2\|Z^{-1}\|_2$. re_o 和 re_m 分别表示用算法 4.1 和使用 Matlab 函数 $Z\backslash b$ 求解时获得近似解的相对残量. 数据显示使用算法 4.1 解此周期 Sylvester 方程与使用 Matlab 函数 $Z\backslash b$ 是同样可靠的.

τ	c d(Z)	.e$_o$	.e$_m$
6	$3.780550914947599e+08$	$3.376373173757723e$ 16	$3.376373173757721e$ 16
8	$3.780546625727512e+10$	$3.375967413174573e$ 16	$3.375967413174573e$ 16
10	$3.780545227898128e+12$	$1.902045359176366e$ 16	$1.902045359176367e$ 16
12	$3.780500998282648e+14$	$5.060156282183591e$ 16	$5.060156282183592e$ 16

. 结束语

本文给出了求解满足一定条件的 (广义) 周期 S lvester 方程的矩阵符号函数的数值方法. 本文给出的数值方法, 涉及到形成矩阵积的过程, 这将导致算法 在的不稳定. 避免形成矩阵积的情形下, 如何利用矩阵符号函数求解这种类型的周期矩阵方程是我们需要进一步研究的问 .

致谢: 者对审稿人提出的修改建议表示感谢.

参 考 献

[1] 徐 方, 高立, 张平文. 数值线性代数 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.

[2] 徐 方. 控制论中的矩阵计算 [M]]. 北京: 高等教育出版社, 2011.

C e X a a

(Sch f Ma he a c , S h Ch a N a U ve , G a g h 510631, Ch a)

Abstract

T e (e e a ed) e d c S e e e a a e f ea e d c d c e e- e e . T a e de ed e e a c e (e e a ed) e d c S e e e a c e e a e a e c a ed e e ef a f c e a e a d e e a f c e a e de e c c e a d de e c c e. A e ca e a e a e e .

Keywords: T e a c ; (e e a ed) e d c S e e e a ; Ne - e a

2000 Mathematics Subject Classification: 65F10