【基础研究】

具有 Rao 简单结构的增长曲线模型关于共轭先验的 BAYES 分析*

卢晶颖

（青岛大学师范学院，山东 青岛　266071）

摘要：从 BAYES 观点利用共轭先验考查了具有 Rao 简单结构的增长曲线模型，得到了参数的边缘后验分布，并在此基础上给出了后验估计. 该结果表明，共轭先验的分析包含非正常先验的结果.

关键词：增长曲线模型；贝叶斯分析；共轭先验

中图分类号：O212.8　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1006－0707(2010)02－0142－02

Geisser[1] 首先从 BAYES 观点利用非正常先验研究了具有均匀协方差结构的增长曲线模型；文献[2]曾用 Broemeling[3] 处理传统一般线性模型的方法，利用共轭先验研究了具有均匀协方差结构的增长曲线模型. 本文中则利用共轭先验进一步研究具有 Rao 简单结构的增长曲线模型.

1　具有 Rao 简单结构的增长曲线模型

增长曲线模型[4] 为

$$E(Y_{p\times N}) = X_{p\times m}\boldsymbol{\tau}_{m\times r}A_{r\times N} \tag{1}$$

式中：τ 是未知参数；X 和 A 为已知矩阵，且 $rankX=m_1\leqslant m<p$，$rankA=r_1\leqslant r<N$（假定 $m_1=m$ 且 $r_1=r$，对于一般情形可类似处理[5]）；Y 的列是 p 维独立正态变量，其未知协方差阵为 Rao 的简单结构 $\boldsymbol{\Sigma}=X\Gamma X'+Z\Theta Z'$，简记为 s. s. ；$rankZ_{p\times(p-m)}=p-m$ 满足 $X'Z=0$；Γ,Θ 是任意未知正定阵.

2　参数的后验推断

考虑增长曲线模型的增广模型

$$E(Y) = (X\quad Z)\begin{pmatrix}\tau\\ \eta\end{pmatrix}A = X\tau A + Z\eta A \tag{2}$$

式中：$\eta_{(p-m)\times r}$是未知参数矩阵；$rankZ_{p\times(p-m)}=p-m$ 满足 $X'Z=0$.

Γ,Θ,τ,η 的似然函数为

$$L(\tau,\eta,\Gamma,\Theta)\propto|\Gamma^{-1}|^{\frac{N}{2}}|\Theta^{-1}|^{\frac{N}{2}}\exp-\frac{1}{2}tr\begin{pmatrix}\Gamma & \\ & \Theta\end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix}B\\ D\end{pmatrix}Y-\begin{pmatrix}\tau\\ \eta\end{pmatrix}A\right]\left[\begin{pmatrix}B\\ D\end{pmatrix}Y-\begin{pmatrix}\tau\\ \eta\end{pmatrix}A\right]'$$

假设 $\tau,\eta,\Gamma^{-1},\Theta^{-1}$的联合先验分布为共轭族中常用的 Normal-Wishart 分布，即

$$g(\Gamma,\Theta,\tau,\eta) = g_1(\tau,\eta\mid\Gamma,\Theta)g_2(\Gamma,\Theta) \tag{3}$$

其中

$$g_1(\tau,\eta\mid\Gamma,\Theta)\propto|\Gamma^{-1}|^{\frac{r}{2}}|\Theta^{-1}|^{\frac{r}{2}}\exp-\frac{1}{2}tr\begin{pmatrix}\Gamma & \\ & \Theta\end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix}\tau\\ \eta\end{pmatrix}-u\right]A_0\left[\begin{pmatrix}\tau\\ \eta\end{pmatrix}-u\right]'$$

$$g_2(\Gamma,\Theta)\propto|\Gamma^{-1}|^{\frac{v-p-1}{2}}|\Theta^{-1}|^{\frac{v-p-1}{2}}\exp-\frac{1}{2}tr\begin{pmatrix}\Gamma & \\ & \Theta\end{pmatrix}^{-1}B_0$$

式中：u,A_0,v,B_0 是超参数；u 是 $p\times r$ 已知阵；A_0 是 $r\times r$ 已知正定阵；$v>p-1$；B_0 是 $p\times p$ 已知正定阵.

根据 BAYES 定理，先验密度与似然函数的乘积为 $\tau,\eta,\Gamma^{-1},\Theta^{-1}$ 的联合后验密度，由共轭性知其仍为 Normal-Wishart

* 收稿日期：2009－12－18

基金项目：青岛大学师范学院青年科研基金项目.

作者简介：卢晶颖(1972—)，女，讲师，硕士，主要从事数理统计研究.

分布,即

$$P(\tau,\eta,\Gamma^{-1},\Theta^{-1}) \propto |\Gamma^{-1}|^{\frac{N+v+r-p-1}{2}} |\Theta^{-1}|^{\frac{N+v+r-p-1}{2}} \cdot$$
$$\exp -\frac{1}{2}tr\left\{\begin{pmatrix}\Gamma^{-1} & \\ & \Theta^{-1}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}Y-\begin{pmatrix}\tau\\\eta\end{pmatrix}A\right]\left[\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}Y-\begin{pmatrix}\tau\\\eta\end{pmatrix}A\right]'+\left[\begin{pmatrix}\tau\\\eta\end{pmatrix}-u\right]A_0\left[\begin{pmatrix}\tau\\\eta\end{pmatrix}-u\right]'+B_0\right\} \tag{4}$$

显然他可写为

$$P(\tau,\eta,\Gamma^{-1},\Theta^{-1}) = P_1(\tau,\eta\mid\Gamma^{-1},\Theta^{-1})P_2(\Gamma^{-1},\Theta^{-1})$$

式中:

$$P_1(\tau,\eta\mid\Gamma^{-1},\Theta^{-1}) \propto |\Gamma^{-1}|^{\frac{r}{2}}|\Theta^{-1}|^{\frac{r}{2}}\exp -\frac{1}{2}tr\begin{pmatrix}\Gamma^{-1} & \\ & \Theta^{-1}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\tau\\\eta\end{pmatrix}-T_0\right](AA'+A_0)\left[\begin{pmatrix}\tau\\\eta\end{pmatrix}-T_0\right]'$$

$$P_2(\Gamma^{-1},\Theta^{-1}) \propto |\Gamma^{-1}|^{\frac{N+v-p-1}{2}}|\Theta^{-1}|^{\frac{N+v-p-1}{2}}\exp -\frac{1}{2}tr\begin{pmatrix}\Gamma^{-1} & \\ & \Theta^{-1}\end{pmatrix}C_0$$

其中:

$$T_0 = \left[\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}YA'+uA_0\right](AA'+A_0)^{-1},$$

$$C_0 = B_0+uA_0u'+\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}YY'\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}'$$
$$-\left[\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}YA'+uA_0\right](AA'+A_0)^{-1}\left[\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}YA'+uA_0\right]'$$

由此可知,$\Gamma^{-1}\sim W(.\,;C_{01}^{-1},N+v)$,$\Theta^{-1}\sim W(.\,;C_{02}^{-1},N+v)$,其中

$$C_{01} = B_{11}+u_1A_0u'_1+BYY'B'-(BYA'+u_1A_0)(AA'+A_0)^{-1}(BYA'+u_1A_0)'$$
$$C_{02} = B_{22}+u_2A_0u'_2+DYY'D'-(DYA'+u_2A_0)(AA'+A_0)^{-1}(DYA'+u_2A_0)'$$

可知:

$$E(\Gamma^{-1}) = (N+v)C_{01}^{-1}$$
$$E(\Theta^{-1}) = (N+v)C_{02}^{-1}$$

根据文献[6],又有:

$$E(\Gamma) = (N+v-m-1)^{-1}C_{01}$$
$$E(\Theta) = (N+v-p+m-1)^{-1}C_{02}$$

这样可得到 $\Gamma^{-1},\Theta^{-1},\Gamma,\Theta$ 的后验估计.

在以上结果中中令 $A_0\to 0$,$B_0\to 0$,$v\to -r$,有:

$$E(\Gamma) = (N-r-m-1)^{-1}BSB' \qquad E(\Theta) = (N-r-p+m-1)^{-1}DSD'$$
$$E(\Gamma^{-1}) = (N-r)^{-1}(BSB')^{-1} \qquad E(\Theta^{-1}) = (N-r)^{-1}(DSD')^{-1}$$

以上式子表明该结果与非正常先验分析的结果一致.

3 结论

利用共轭先验研究了具有 Rao 简单结构的增长曲线模型. 当对先验信息了解少时,可利用非正常先验进行参数估计;当对先验信息了解较多,且易于确定超参数时,可利用本文的共轭先验进行参数估计.

参考文献:

[1] Geisser S. Bayesian analysis of growth curves[J]. Sankhya, Ser. A32:53 -64.
[2] 卢晶颖. 增长曲线模型关于共轭先验的 BAYES 分析[J]. 青岛大学学报:自然科学版,2004,17(1):6 -9.
[3] Broemeling L D. Bayesian Analysis of Linear Models[M]. Marcel Dekker, Inc. , 1985.
[4] Potthoff R F,Roy S N. A generalized multivariate analysis of variance model useful especially for growth curve problem[J]. Biometrika,1965, 51(3): 313 -326.
[5] Khatri C G. A note on a MANOVA model applied to problems in growth curve[J]. Ann. Inst. Statist. Math. , 1966(18):75 -86.
[6] Lachenbruch P A. On expected probabilities of misclassfication in discriminant analysis, necessary sample size and a relation with multiple correlation coefficient[J]. Biometrics,1968, 24(2):823 -833.

(责任编辑 周江川)