

直升机“地面共振”力学模型的探讨*

南京航空学院 顾仲权

A STUDY ON MECHANICAL MODEL OF THE HELICOPTER “GROUND RESONANCE”

Nanjing Aeronautical Institute

Gu Zhongquan

关键词 直升机, 地面共振, 动稳定性。

Abstract The key problem for the calculation and optimization design of the helicopter “Ground Resonance” is to correctly build up a mechanical model. In the past the literature only concerned with the lag modes of the rotor blade and the flap modes were neglected. But such approaches should be reconsidered now.

In order to study the influences of rotating multiblades rotor on the degrees of freedom but also the flap “Ground Resonance” of a helicopter it is necessary to consider not only the lag degrees of freedom but also the flap degrees of freedom. Using Lagrangian equation a dynamical equation of the space model for helicopter “Ground Resonance” was deduced for the first time. Some computation results show that the mechanical model including both lag DOF and flap DOF are more reasonable.

Key Words helicopter, Ground Resonance, dynamical instability.

符 号 表

I_B 桨叶绕垂直铰的转动惯量	ρ 桨叶微段 (dm) 与垂直铰的距离
I_{Oy}, I_{Ox}, I_{Oz} 机身绕过其重心 O 的	ψ_k 第 k 片桨叶的方位角
x, y, z 轴的转动惯量	ξ_k 第 k 片桨叶绕垂直铰的摆振角
l 桨叶长度	β_k 第 k 片桨叶绕水平铰的挥舞角
m_B 单片桨叶的质量	l_B 垂直铰外伸量 (本文假设水平铰外伸量与此相等)
m 机身质量	$x, y, z, \theta, \psi, \beta$ 机身重心沿 x, y, z 轴的位移与绕 ox, oy, oz 的转角
N 桨叶片数	
S_B 桨叶绕垂直铰的质量静矩	

1988年12月29日收到

* 航空科学基金资助项目。

1. 前言

研究直升机“地面共振”的计算和优化设计的首要问题是建立正确的力学模型。在过去研究“地面共振”的国内外文献^[1,2]中，对于具有挥舞与摆振自由度的旋翼桨叶，仅考虑其摆振自由度，将旋翼视为质量集中于桨毂中心的“配重质量”。事实上，旋转的多片桨叶不仅对全机转动惯量有贡献（尤其是对全机横滚转动惯量占有不小的比重），而且还会引起附加的陀螺耦合项，这些影响能否用“配重质量”的影响来代替是一个值得探讨的问题。

为了研究多片旋转桨叶对直升机“地面共振”的影响，除计及摆振自由度外，必然要引入挥舞自由度（这在传统的“地面共振”研究中是不予考虑的）。因此，本文第一次导出了具有挥舞与摆振自由度的旋翼的“地面共振”空间模型运动方程，通过算例，说明应建立一个怎样的正确的“地面共振”力学模型。

2. 力学模型与运动方程

与常规的空间模型^[2]不同，本文还考虑整个系统沿 x 向的自由度，以及桨叶绕水平铰（或当量水平铰）的挥舞自由度，整个系统的力学模型如图 1 所示。

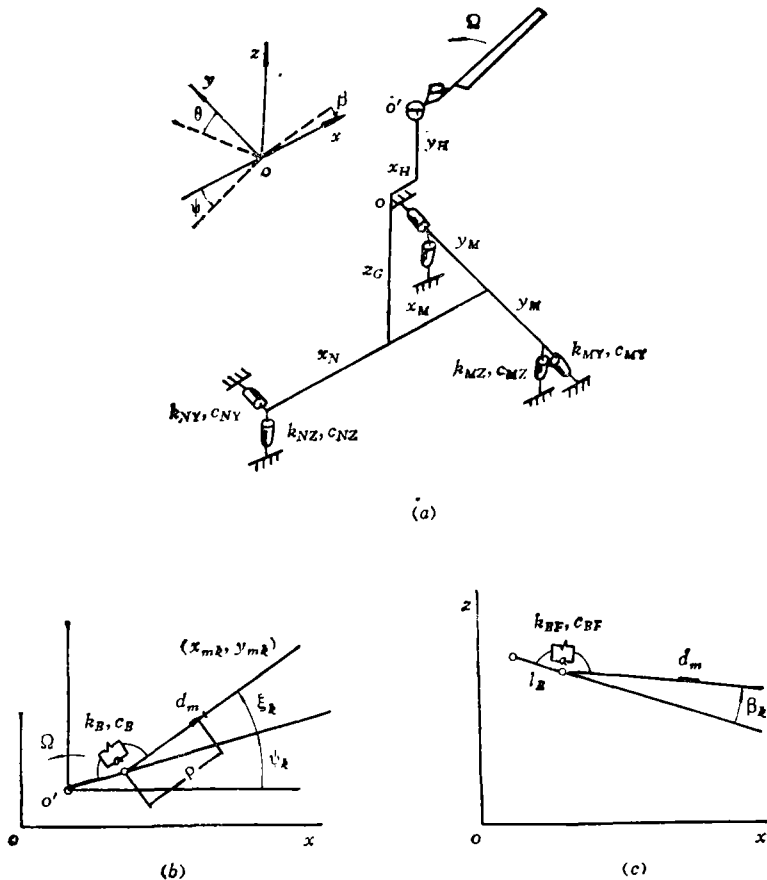


图 1 力学模型

整个系统的自由度坐标为 $x, y, z, \theta, \psi, \beta, \xi_k, \beta_k (k = 1, 2, \dots, N)$ 。

为导出研究直升机“地面共振”的空间模型的运动方程,需写出整个系统的动能 T 、位能 U 与耗散函数 D

$$T = \frac{1}{2} m_f \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_f \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_f \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_{o\psi} \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_{o\theta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{o\beta} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_0^l (\dot{x}_{mk}^2 + \dot{y}_{mk}^2 + \dot{z}_{mk}^2) dm$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } x_{mk} &= x - z_H \psi - \rho \sin \beta_k \cdot \psi + l_B \cos \psi_k + \rho \cos \beta_k \cdot \cos(\psi_k + \xi_k) \\ y_{mk} &= y + z_H \theta + \rho \sin \beta_k \cdot \theta + l_B \sin \psi_k + \rho \cos \beta_k \cdot \sin(\psi_k + \xi_k) \\ z_{mk} &= z + \rho \beta_k + [l_B \cos \psi_k + \rho \cos \beta_k \cdot \cos(\psi_k + \xi_k)] \psi - [l_B \sin \psi_k + \rho \cos \beta_k \cdot \sin(\psi_k + \xi_k)] \theta + z_H \end{aligned}$$

为求得线性运动方程,仅保留动能 T 中有关坐标及其导数的二次项,可得

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_f (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} I_{o\psi} \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_{o\theta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{o\beta} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} N m_B \dot{x}^2 \\ &\quad - N m_B z_H \dot{x} \dot{\psi} - S_B \Omega \dot{x} \sum \xi_k \cos \psi_k - S_B \dot{x} \sum \dot{\xi}_k \sin \psi_k \\ &\quad + \frac{1}{2} N m_B \dot{y}^2 + \frac{1}{2} N m_B x_H^2 \dot{\beta}^2 + N m_B z_H \dot{y} \dot{\theta} + N m_B x_H z_H \dot{\beta} \dot{\theta} + N m_B x_H \dot{y} \dot{\beta} \\ &\quad - S_B \Omega \dot{y} \sum \xi_k \sin \psi_k - S_B \Omega \dot{\beta} \sum \xi_k \sin \psi_k + S_B \dot{y} \sum \dot{\xi}_k \cos \psi_k + S_B x_H \dot{\beta} \sum \dot{\xi}_k \cos \psi_k \\ &\quad + \frac{1}{2} N m_B \dot{z}^2 + S_B \dot{z} \sum \dot{\beta}_k + \frac{N}{2} \left(m_B z_H^2 + \frac{1}{2} I_o \right) \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_o \Omega \sum \xi_k^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} I_B \sum \dot{\xi}_k^2 + S_B \Omega z_H \dot{\psi} \sum \xi_k \cos \psi_k + S_B z_H \dot{\psi} \sum \dot{\xi}_k \sin \psi_k + I_1 \Omega \dot{\psi} \sum \beta_k \sin \psi_k \\ &\quad - \frac{1}{2} I_1 \Omega^2 \sum \xi_k^2 - \frac{1}{2} I_1 \Omega^2 \sum \beta_k^2 + \frac{N}{2} \left(m_B z_H^2 + \frac{1}{2} I_o \right) \dot{\theta}^2 \\ &\quad - S_B \Omega z_H \dot{\theta} \sum \xi_k \sin \psi_k + S_B z_H \dot{\theta} \sum \dot{\xi}_k \cos \psi_k + I_1 \Omega \dot{\theta} \sum \beta_k \cos \psi_k + \frac{1}{2} I_B \sum \dot{\beta}_k^2 \\ &\quad + \frac{N}{4} I_o \Omega^2 \dot{\psi}^2 + \frac{N}{4} I_o \Omega^2 \dot{\theta}^2 + I_1 \dot{\psi} \sum \beta_k \cos \psi_k - I_1 \dot{\theta} \sum \beta_k \sin \psi_k \\ &\quad - \frac{N}{2} I_o \Omega \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{N}{2} I_o \Omega \dot{\psi} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } I_o &= \int_0^l (l_B + \rho)^2 dm \\ I_1 &= \int_0^l (l_B + \rho) \rho d_m \end{aligned}$$

和式 Σ 中 k 由 1 到 N , 带下划线的项为计及桨叶挥舞自由度及陀螺耦合后新增加的项。

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} k_{Nz} (z - x_N \psi)^2 + \frac{1}{2} k_{Ny} (y - x_{Ny} - z_G \theta)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} k_{Mz} [(z + x_M \psi + y_M \theta)^2 + (z + x_M \psi - y_M \theta)^2] + k_{My} (y - z_G \theta + x_M \beta)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} k_B \sum_{k=1}^N \xi_k^2 + \frac{1}{2} k_{B\beta} \sum_{k=1}^N \beta_k^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 D = & \frac{1}{2} C_{NZ} (\dot{z} - x_N \dot{\psi})^2 + \frac{1}{2} C_{NY} (\dot{y} - x_N \dot{\beta} - z_G \dot{\theta})^2 \\
 & + \frac{1}{2} C_{MZ} [(\dot{z} + x_M \dot{\psi} + y_m \dot{\theta}) + (\dot{z} + x_M \dot{\psi} - y_m \dot{\theta})]^2 + C_{MY} (\dot{y} - z_G \dot{\theta} + x_M \dot{\beta})^2 \\
 & + \frac{1}{2} C_B \sum_{k=1}^N \xi_k^2 + \frac{1}{2} C_{BF} \sum_{k=1}^N \beta_k^2 \quad (3)
 \end{aligned}$$

由 Lagrange 方程可得整个系统的运动微分方程。引入变换

$$\begin{aligned}
 \eta &= \sum_{k=1}^N \xi_k \sin \psi_k, \\
 \rho &= \sum_{k=1}^N \xi_k \cos \psi_k, & \bar{\eta} &= \sum_{k=1}^N \beta_k \sin \psi_k, \\
 \bar{\xi} &= \sum_{k=1}^N \beta_k \cos \psi_k, & \omega &= \sum_{k=1}^N \beta_k.
 \end{aligned}$$

再根据 x , ψ 与 η 存在如下的关系

$$(m_t + Nm_B) x = Nm_t z_H \psi + S_B \eta$$

可得运动方程为

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = 0 \quad (4)$$

式中 $x = [y \ z \ \psi \ \theta \ \beta \ \eta \ \bar{\xi} \ \bar{\eta} \ \bar{\xi} \ \omega]^T$ 为 10 维列向量。

为求出系统特征值随旋翼转速 Ω 的变化关系以便于判定稳定性, 可将式 (4) 变为形如式 (5) 的状态方程

$$A \dot{q} = B q \quad (5)$$

式中 $q = [y \ \dot{y} \ z \ \dot{z} \ \psi \ \dot{\psi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \beta \ \dot{\beta} \ \eta \ \dot{\eta} \ \bar{\xi} \ \dot{\bar{\xi}} \ \bar{\eta} \ \dot{\bar{\eta}} \ \rho \ \dot{\rho} \ \omega \ \dot{\omega}]^T$ 为 20 维列向量。

3. 算例与结果分析

对应图 1 的力学模型 (原始参数见附录), 计算下列三种情况的系统特征根与旋翼转速的关系 (见图 2)。

情况 A: 不考虑桨叶挥舞自由度

情况 B: 考虑桨叶挥舞自由度, 且 $k_{BF} = 0$, $C_{BF} = 0$

情况 C: 考虑桨叶挥舞自由度, 且 $k_{BF} = 0.64 I_B$, $C_{BF} = 0.253 I_B$

表 1 为几种典型的特征向量。

由图 2 与表 1 可见引入桨叶挥舞自由度后引起如下的变化:

(1) 增加了三个 (稳定的) 模态, 其对应的特征根轨迹曲线为 8, 9, 10。在低旋翼转速时, 曲线 8 与 10 对应以广义坐标 $\bar{\eta}$ 与 $\bar{\xi}$ 为主的复振型, 曲线 9 对应以广义坐标 ω 为主的复振型。这些特征根随旋翼转速变化有较大的变化, 且其稳定程度随旋翼转速增高而变大。

(2) 与不计及桨叶挥舞自由度 [图 2 (a)] 情况相比, 其对各模态稳定性的影响程度不同: 对以横滚 (曲线 1)、垂向 (曲线 2)、俯仰 (曲线 4) 为主的模态影响大, 这

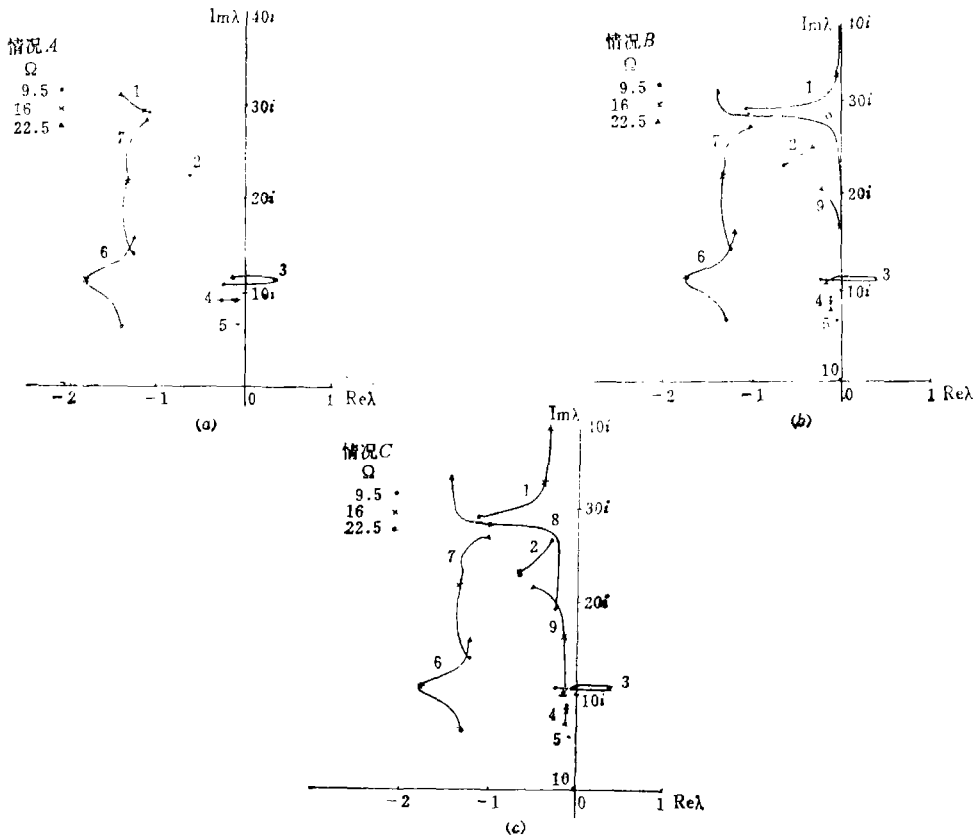


图 2 特征根曲线

正表明有必要考虑桨叶挥舞的自由度；对以桨叶摆振（曲线 6 与 7）、偏航（曲线 5）为主的模态几乎无影响；对以侧移（曲线 3）为主的模态稍有影响（表 2）。

（3）在引入桨叶挥舞自由度时，计及挥舞铰刚度与阻尼（情况 C）与不计挥舞铰刚度与阻尼（情况 B）相比，特征根轨迹变化趋势一致；差别较大的是曲线 1, 8, 9, 10,

表 1 振 型 表

情 况		A	B
特征根曲线		3	3
旋翼转速		16.05	16.05
复频率		$0.379 \pm 11.3 i$	$0.387 \pm 10.9 i$
复 振 型	y	$-0.238 \cdot 10^{-1} + 0.248 \cdot 10^{-1} i$	$-0.340 \cdot 10^{-1} - 0.860 \cdot 10^{-2} i$
	z	$-0.748 \cdot 10^{-3} + 0.882 \cdot 10^{-3} i$	$0.615 \cdot 10^{-3} + 0.376 \cdot 10^{-2} i$
	ψ	$0.164 \cdot 10^{-2} - 0.180 \cdot 10^{-2} i$	$-0.159 \cdot 10^{-2} + 0.800 \cdot 10^{-2} i$
	θ	$-0.127 \cdot 10^{-1} + 0.122 \cdot 10^{-1} i$	$-0.185 \cdot 10^{-1} - 0.505 \cdot 10^{-2} i$
	β	$-0.412 \cdot 10^{-2} + 0.359 \cdot 10^{-2} i$	$-0.538 \cdot 10^{-2} - 0.194 \cdot 10^{-2} i$
	η	$-0.463 \cdot 10^{-1} + 0.758 \cdot 10^{-1} i$	$-0.882 \cdot 10^{-1} - 0.251 \cdot 10^{-1} i$
	ρ	$-0.727 \cdot 10^{-1} - 0.486 \cdot 10^{-1} i$	$0.282 \cdot 10^{-1} - 0.869 \cdot 10^{-1} i$
	$\bar{\eta}$		$0.392 \cdot 10^{-2} + 0.727 \cdot 10^{-3} i$
	$\bar{\rho}$		$-0.364 \cdot 10^{-5} - 0.147 \cdot 10^{-2} i$
ω		$0.900 \cdot 10^{-4} - 0.246 \cdot 10^{-2} i$	

(续表 1)

	B	B
	1	1
	0.1	16.05
	$-1.07 \pm 29.2 i$	$-0.0477 \pm 32.8 i$
	$0.720 \cdot 10^{-2} + 0.683 \cdot 10^{-2} i$	$0.352 \cdot 10^{-4} - 0.665 \cdot 10^{-4} i$
	$-0.368 \cdot 10^{-5} + 0.412 \cdot 10^{-5} i$	$0.102 \cdot 10^{-4} + 0.478 \cdot 10^{-5} i$
	$-0.765 \cdot 10^{-5} + 0.856 \cdot 10^{-5} i$	$0.356 \cdot 10^{-4} + 0.106 \cdot 10^{-4} i$
	$-0.156 \cdot 10^{-1} - 0.148 \cdot 10^{-1} i$	$-0.905 \cdot 10^{-4} + 0.212 \cdot 10^{-3} i$
	$0.738 \cdot 10^{-3} + 0.700 \cdot 10^{-3} i$	$0.367 \cdot 10^{-5} - 0.676 \cdot 10^{-5} i$
	$0.288 \cdot 10^{-4} + 0.868 \cdot 10^{-3} i$	$-0.136 \cdot 10^{-3} - 0.781 \cdot 10^{-4} i$
	$0.317 \cdot 10^{-2} + 0.361 \cdot 10^{-2} i$	$0.871 \cdot 10^{-4} + 0.156 \cdot 10^{-3} i$
	$-0.248 \cdot 10^{-1} - 0.236 \cdot 10^{-1} i$	$-0.483 \cdot 10^{-2} - 0.301 \cdot 10^{-1} i$
	$0.167 \cdot 10^{-3} - 0.189 \cdot 10^{-3} i$	$-0.300 \cdot 10^{-1} - 0.478 \cdot 10^{-2} i$
	$0.309 \cdot 10^{-5} - 0.356 \cdot 10^{-5} i$	$-0.116 \cdot 10^{-4} - 0.538 \cdot 10^{-5} i$

表 2

情 况	A	B	C
稳定度①最差的复频率	$0.3779 \pm 11.24 i$	$0.4010 \pm 10.81 i$	$0.405 \pm 10.81 i$
旋翼转速	16.0	15.5	15.5
不稳定的旋翼转速区	12.8~19.3	12.2~18.5	12.2~18.5

① 稳定度 $\delta = -\text{Re } \lambda / \sqrt{(\text{Re } \lambda)^2 + (\text{Im } \lambda)^2}$, λ 为复频率。

稳定裕度都增大；稍有差别的是曲线 2；而几乎无差别的是曲线 3，4，5，6，7。

(4) 由表 1 可见：对应同一条特征根轨迹曲线上的不同点的复振型有时可能差别很大，如在情况 B 中当旋翼转速为 0.1rad/s 时，曲线 1 上的点 $(-1.07 \pm 29.2 i)$ 对应的复振型以 $\psi, \theta, \bar{\eta}$ 分量为主；而在点 $(-0.0477 \pm 32.8 i)$ 对应的复振型以 $\bar{\eta}, \bar{\rho}$ 分量为主。上述情况也正说明桨叶挥舞自由度的影响是大的。另外，对比情况 A 与 B 中当旋翼转速为 16.05rad/s 时，曲线 3 上的点对应的复振型都是以 ψ, θ, η, ρ 分量为主，这表明桨叶挥舞自由度的影响是不大的，甚至可忽略不计的。

参 考 文 献

- [1] Coleman R P. Theory of Self-Excited Mechanical Oscillations of Hinged Rotor Blades. NACA, ARR, No. 3029, 1943
- [2] 程金送. 直升机“地面共振”和“空中共振”综述. 直升机技术, 1986, (4)17~30

附 录

计算用原始参数(单位：质量为 kg，静矩为 kgm，惯矩为 kgm²，长度为 m，弹性系数为 N/m 或 Nm/rad，阻尼系数为 Ns/m 或 Nms/rad)：

$$M=1200, N_{m_B}/M=0.055, S_B/M=0.035, N_{m_B}/I_{o^*}=0.0165, N_{m_B}/I_{o\beta}=0.060, N_{m_B}/I_{o\beta}=0.0165, S_B/I_B=0.28, z_H=1, z_G=1, x_H=0.2, l_B=0.22, x_M=0.7, x_N=1.4, y_M=1, h_{N_V}/M=40, h_{N_Z}/M=80, h_{M_V}/M=100, h_{M_Z}/M=200, h_B/I_B=6.4, C_{N_V}/M=0.1, C_{N_Z}/M=0.2, C_{M_V}/M=0.25, C_{M_Z}/M=0.5, C_B/I_B=2.53, N=3。$$