【制造技术】

Weibull 分布下基于矩法的小样本量定时截尾数据的估计*

冯自立[1]，陈晓阳[1]，顾家铭[2]

（1. 上海大学 轴承研究室，上海　200072；2. 上海天安轴承有限公司，上海　200233）

摘要：通过 MonteCarlo 方法，揭示了在两参数 Weibull 分布定时截尾情形下，样本容量为 2 ~ 10 的截尾时间变化区间、母体参数和失效数之间的关系。根据这一关系提出了基于矩估计的母体参数下限估计方法。实例计算表明，对于形状参数和尺度参数的下限估计，该方法较似然比方法估计精度分别提高了 10% 和 13%。

关键词：Weibull 分布；矩估计；小样本量试验数据；定时截尾；下限估计

中图分类号：TB114.3；O213.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006 – 0707(2010)03 – 0093 – 05

在新型产品正式投入使用之前，应当掌握或了解该产品的性能。这主要借助理论计算和试验来完成，而试验是最可靠和最具说服力的。试验的关键在于产品性能概率分布的建立和确认。根据样本(试验结果)估计母体时，普遍认为投入试验的试件越多，估计结果越精确。然而在实际情况中，产品的可靠性试验由于受时间和资金的限制，不仅不能保证较大的试验样本量，还必须采取截尾试验方案。实践中，可靠性试验以定时截尾方案居多。Weibull 分布是可靠性中常用的失效分布，许多机械零部件产品的失效分布都是 Weibull 分布。本文中通过 MonteCarlo 方法研究基于矩估计方法的 Weibull 分布下小样本量(本文中，小样本量指样本容量为 2 至 10 的试验数据)定时截尾数据的参数下限估计问题。

1　两参数 Weibull 分布

两参数 Weibull 分布的分布函数和概率密度函数分别为

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - \exp\left(\frac{x}{\eta}\right) \\ f(x) &= \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}\exp\left(\frac{x}{\eta}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

式中：x 为随机变量；η 为尺度参数；β 为形状参数。

2　Weibull 分布定时截尾情形下的矩估计

2.1　参数的点估计

由于极大似然估计方法通过迭代方法求解超越方程，给出 Weibull 分布形状参数的估计，在计算高截尾小样本量定时截尾数据时，极大似然估计不易收敛，而且极大似然估计在小样本情形下不一定最优[1]。因此，应该在小样本定时截尾情形下寻找其他优良的估计量。

定义：若存在函数 $G(x)$ 满足以下关系，称分布函数族 $\{F(x,\mu,\sigma): \mu\in(-\infty,\infty), \sigma\in(0,\infty)\}$ 是位置 – 刻度分布族。

$F(x,\mu,\sigma) = G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$（一切 x,μ,σ）（这里 μ 为位置参数，σ 为刻度参数）

极值分布即属于位置 – 刻度分布族，其分布函数为

$$F(x) = 1 - \exp(-e^{\frac{x-\mu}{\sigma}})$$

若随机变量 X 服从极值分布，则

$$EX = \mu - q\sigma \tag{2}$$

$$VarX = \frac{1}{6}\pi^2\sigma^2 \tag{3}$$

式(2)中 $q=0.557\ 721$，为欧拉常数。

若 $A \sim W(\beta,\eta)$（随机变量 A 服从形状参数为 β，尺度参数为 η 的两参数 Weibull 分布，下同），则 $X = \ln A$ 服从极值分布，其中参数 $\mu = \ln\eta$，$\sigma = 1/\beta$。

考虑位置 – 刻度分布族的好处就在于对定时截尾情形下的数据可以采用矩法进行估计[1]。Mete Sirvanci 和 Grace Yang[2] 在 1984 年利用 Weibull 分布与极值分布之间的转换关系首先研究了 Weibull 分布下定时截尾数据的矩估计问题，并证明了其构造的形状参数与尺度参数的矩估计量具有强相合性，还指出估计量的性能在小样本情形下效果也是好的。

* 收稿日期：2010 – 01 – 08

基金项目：国家“十五”科技攻关资助项目(MKPT-2004-58ZD)。

作者简介：冯自立(1984—)，男，硕士研究生，主要从事小样本量试验数据的可靠性评价与精密仪表轴承试验技术方面的研究。

设 X 的分布函数是 $G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立同分布的随机变量列[1]，共同的分布是 $G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$。在 (n,T) 方案下（$0<T<\infty$）得到的观测值是 $(y_1,\delta_1),\cdots,(y_n,\delta_n)$，其中 $y_i=\min\{X_i,T\}$，$\delta_i=I(X_i\leqslant T)$。令 $G-1(u)=\inf\{x:G(x)\geqslant u\}(0<u<1)$，则有[2]：

$$h(p)=pG^{-1}(p)-\int_0^p G^{-1}(u)\mathrm{d}u$$

令 $\delta=I(X\leqslant T)$，$a_G=\inf\{x:G(x)>0\}$，$b_G=\sup\{x:G(x)<1\}$，$p=P(X\leqslant T)$。

定理：设 $0<p<1$ 且 $G(x)$ 是 (a_G,b_G) 上的严格增函数，$Y=\min\{X,T\}$，则有：$E[\delta(T-Y)]=\sigma h(p)$。

由定理可知：

$$\sigma=\frac{1}{h(p)}E(\delta(T-Y))$$

用式(4)作为 p 的估计，则式(5)与式(6)分别为 σ 和 μ 的矩估计。

$$p_E=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i \tag{4}$$

$$\sigma_{ME}=\frac{1}{nh(p_E)}\sum_{i=1}^{n}\delta_i(T-y_i) \tag{5}$$

$$\mu_{ME}=T-\sigma_{ME}G^{-1}(p_E) \tag{6}$$

对于 $\xi\sim W(\beta,\eta)$，$X=\ln\xi\sim G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$，有：

$$G(x)=1-\exp(-e^x)$$

$$G^{-1}(u)=\ln\ln\frac{1}{1-u}(0<u<1)$$

$$h(p)=p\ln\ln\frac{1}{1-p}-\int_0^p\ln\ln\frac{1}{1-u}\mathrm{d}u \tag{7}$$

根据式(5)和式(6)有形状参数与尺度参数的点估计公式为：

$$\beta_{ME}=(\sigma_{ME})^{-1}=\frac{nh(p_E)}{\sum_{i=1}^{n}\delta_i(\ln T-\ln y_i)} \tag{8}$$

$$\eta_{ME}=e^{\mu_{ME}}=\frac{T}{[\ln(1-p_E)^{-1}]^{\sigma_{ME}}} \tag{9}$$

为方便使用，根据式(7)计算出小样本量下所有 (n,r)（样本容量为 n，失效数为 r）的 $h(p_E)$ 值，见表1。

表1 小样本量下 $h(p_E)$

样本	失效数 r								
量 n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0.589 4								
3	0.367 8	0.857 7							
4	0.268 2	0.589 4	1.022 5						
5	0.211 3	0.452 3	0.742 7	1.138 2					
6	0.174 3	0.367 8	0.589 4	0.857 7	1.225 8				
7	0.148 4	0.310 1	0.490 2	0.696 9	0.948 4	1.295 5			
8	0.129 2	0.268 2	0.420 1	0.589 4	0.784 4	1.022 5	1.353 1		
9	0.114 4	0.236 3	0.367 8	0.511 5	0.672 2	0.857 7	1.084 9	1.401 8	
10	0.102 7	0.211 3	0.327 2	0.452 4	0.589 4	0.742 7	0.920 3	1.138 2	1.443 6

2.2 参数的下限估计

对于 Weibull 分布，常用的参数区间估计方法有：利用大样本下极大似然估计量渐进正态性的方法、似然比方法以及基于枢轴量[3]的方法。Cohen[4]指出：在小样本场合下，利用极大似然估计量渐进正态性的方法将产生很大的偏差。Kahle[5]通过计算表明，在较小的样本量的情形下，似然比方法优于利用大样本下极大似然估计量渐进正态性的方法。但是 Kahle 也指出，似然比方法需要样本包含20个失效数据，而这与本文中所研究的小样本量情形不符。

为安全起见，往往关注的是可靠性指标的下边界估计值。由 Weibull 分布的特性可知，对于相同的尺度参数，形状参数的估计越小（或对于相同的形状参数，尺度参数的估计值越小），产品的可靠寿命估计越保守。

2.2.1 形状参数的下限估计

由于样本量小的缘故，采用式(4)作为 p 的估计存在偏差，所以 $h(p_E)$ 与真实的 $h(p)$ 也会有出入。若能求出 $h(p)$ 可能取值的下限 $h(p)_{\text{LowerBound}}$，并记式(8)中分母为随机变量 M，其可能取值的上限为 $M_{\text{UpperBound}}$，则可根据式(10)求出 Weibull 分布形状参数的下限估计 β_{L-ME}：

$$\beta_{L-ME}=\frac{nh(p)_{\text{LowerBound}}}{M_{\text{UpperBound}}} \tag{10}$$

由式(1)可得到对应于给定累积失效概率 p 的分位点 x_p 的计算公式：

$$x_p=\eta\left[\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{\frac{1}{\beta}} \tag{11}$$

由式(11)可知，在无穷大样本下，对于相同的形状参数 β 和累积失效概率 p，x_p 与尺度参数 η 的比值是一定的。

通过 MonteCarlo 方法研究 Weibull 分布下的小样本量定时截尾数据时发现，对于一定的样本容量和形状参数，使得同一失效数出现可能性最大的截尾时间，可以是某一区间上的任意取值。以 $n=10$，$W(\beta=10,\eta>0)$ 为例，见图1。

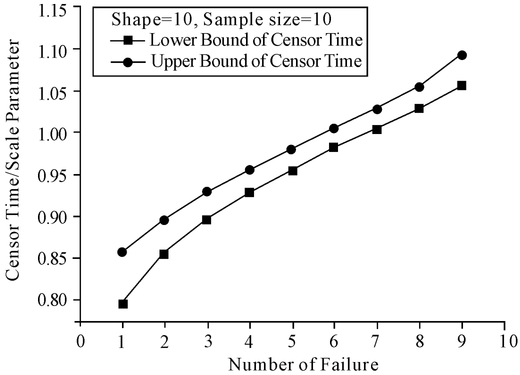

图 1 $n=10$,使得各失效数出现概率最大的截尾时间变化范围

统计模拟表明,对于相同的(n,r),不同 Weibull 分布总体(形状参数相同而尺度参数不同)的截尾时间区间端点与尺度参数的比值仍然相同。以样本容量 $n=10$,形状参数 $\beta=5$ 为例,在不同尺度参数下对应各失效数的截尾时间变化范围,见表 2。

因此,为得到小样本量下使得各(n,r)出现概率最大的截尾时间区间,只需在同一尺度参数下根据不同的形状参数(考虑到工程实践中,Weibull 分布的形状参数一般在 1 至 10 之间,模拟中形状参数也根据这个范围进行取值)进行模拟即可。限于篇幅,仅给出样本容量 $n=5$ 时,使得各失效数出现概率最大的截尾时间范围,见表 3。

表 2 不同尺度参数下截尾时间的变化范围

失效数 r	尺度参数 η			
	1	10	100	1 000
2	[0.734, 0.804]	[7.34, 8.04]	[73.4, 80.4]	[735, 804]
3	[0.805, 0.861]	[8.05, 8.61]	[80.5, 86.1]	[805, 861]
4	[0.862, 0.913]	[8.62, 9.13]	[86.2, 91.3]	[862, 912]
5	[0.914, 0.96]	[9.14, 9.6]	[91.4, 96.0]	[913, 960]
6	[0.961, 1.008]	[9.61, 10.08]	[96.1, 100.8]	[961, 1008]
7	[1.009, 1.059]	[10.09, 10.59]	[100.9, 105.9]	[1009, 1059]
8	[1.06, 1.117]	[10.6, 11.17]	[106.0, 111.7]	[1060, 1116]
9	[1.118, 1.194]	[11.18, 11.94]	[111.8, 119.4]	[1117, 1194]

表 3 当 $n=5$ 时,不同形状参数下使得各失效数出现概率最大的截尾时间变化范围

失效数 r	形状参数 β				
	1	2	3	4	5
1	[0.206, 0.446] η	[0.454, 0.67] η	[0.59, 0.766] η	[0.673, 0.818] η	[0.729, 0.852] η
2	[0.447, 0.752] η	[0.671, 0.866] η	[0.767, 0.909] η	[0.819, 0.931] η	[0.853, 0.944] η
3	[0.753, 1.161] η	[0.867, 1.077] η	[0.91, 1.051] η	[0.932, 1.038] η	[0.945, 1.031] η
4	[1.162, 1.855] η	[1.078, 1.361] η	[1.052, 1.229] η	[1.039, 1.167] η	[1.032, 1.132] η

续表 3

失效数 r	形状参数 β				
	6	7	8	9	10
1	[0.768, 0.875] η	[0.798, 0.891] η	[0.821, 0.904] η	[0.839, 0.915] η	[0.854, 0.923] η
2	[0.876, 0.953] η	[0.892, 0.96] η	[0.905, 0.965] η	[0.916, 0.968] η	[0.924, 0.971] η
3	[0.954, 1.025] η	[0.961, 1.022] η	[0.966, 1.018] η	[0.969, 1.016] η	[0.972, 1.015] η
4	[1.026, 1.108] η	[1.023, 1.092] η	[1.019, 1.08] η	[1.017, 1.071] η	[1.016, 1.063] η

计算表明,各(n,r)下截尾时间变化范围与形状参数的关系,皆可用二阶指数曲线很好地拟合,见图 2。

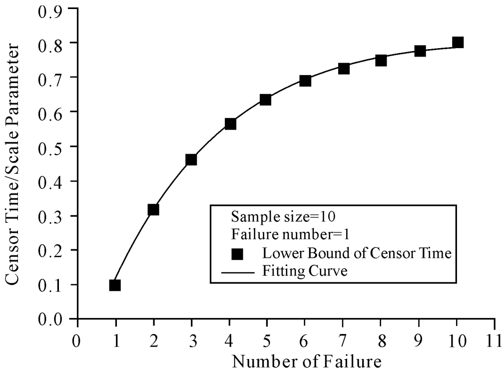

图 2 (10, 1),截尾时间下限随形状参数变化规律的拟合曲线

仅凭试验结果无法确定截尾时间 T 在截尾时间区间中的位置。分析式(1)和式(8)可知,累积概率 p 是截尾时间 T 的增函数,而 $h(p)$ 是 p 的增函数。将截尾时间区间两端点分别代入式(1)计算出 p 的上下限,再由式(8)可算出 $h(p)$ 的上下限。计算结果表明,在一定的样本容量下,母体形状参数真值对 $h(p)$ 几乎没有影响,$h(p)$ 的变化只与失效数有关。以 $n=10$ 时,$h(p)$ 的下限为例,见图 3。

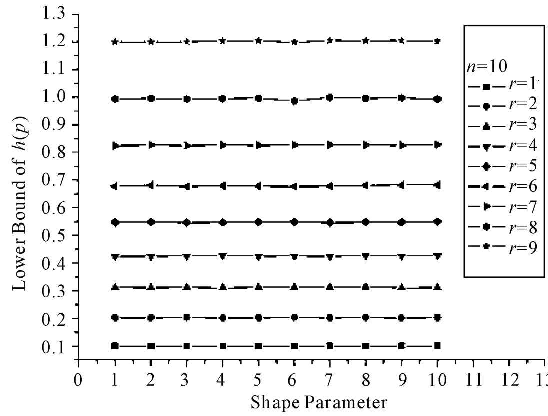

图 3 当 $n=10$ 时,不同形状参数下 $h(p)$ 的下限

将小样本量下对应于所有(n,r)的 $h(p)$ 的下限汇总于表 4。

表 4 小样本量下 $h(p)$ 的下限

样本量 n	失效数 r 1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0.458 22								
3	0.317 41	0.656 32							
4	0.242 26	0.501 87	0.793 99						
5	0.195 90	0.401 68	0.631 91	0.895 57					
6	0.163 98	0.336 75	0.525 31	0.733 29	0.979 42				
7	0.139 93	0.290 18	0.447 78	0.620 03	0.813 01	1.049 1			
8	0.123 97	0.252 79	0.390 25	0.538 02	0.700 79	0.881 31	1.106 31		
9	0.109 83	0.224 56	0.345 97	0.475 76	0.613 55	0.766 57	0.939 24	1.155 31	
10	0.099 49	0.202 13	0.311 45	0.424 04	0.546 93	0.677 65	0.824 24	0.993 35	1.200 57

将 M 写为

$$M = r\ln T - \sum_{i=1}^{r}\ln y_i = r\ln T - \sum_{i=1}^{r} H_i = r\ln T - N$$

N 的分布函数很难求出。由于讨论的是小样本量下的情形($r=1,2,\cdots,9$),若根据中心极限定理给出 N 的近似分布,也将存在很大的误差。

$H_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是来自极值分布的独立同分布随机变量。将极值分布的位置参数和刻度参数的矩估计分别代入式(2)和式(3)可得到 N 的期望和方差的估计

$$E_{ME}(N) = r(\mu_{ME} - q\sigma_{ME})$$

$$Var_{ME}(N) = \frac{r}{6}\pi^2\sigma_{ME}^2$$

考虑用下式估计 $M_{\text{UpperBound}}$:

$$M_{\text{UpperBound}} \approx r\ln(T) - (E_{ME}(N) - C(Var_{ME}(N))^{\frac{1}{2}})$$

对 2 250 个由不同 $n(n=2,3,\cdots,10)$,$\beta(\beta=1,2,\cdots,10)$以及 $T(T=0.1\eta,\ 0.2\eta,\cdots,\ 2.5\eta)$组成的定时截尾策略进行模拟(每个组合模拟次数为 50 万),并判断 β_{L-ME} 是否大于 β。模拟结果表明,当系数 C 取 3.0 时,误报率不到百万分之一。在此,建议采用式(12) 估计 $M_{\text{UpperBound}}$

$$M_{\text{UpperBound}} \approx r\ln(T) - (E_{ME}(N) - 3.0(Var_{ME}(N))^{\frac{1}{2}}) \tag{12}$$

2.2.2 尺度参数的下限估计

在得到形状参数的下限估计之后,可根据对应于试验结果(n,r)的截尾时间下限与尺度参数的比值随母体形状参数变化的拟合曲线,计算尺度参数的下限估计。

3 计算与讨论

从 4 个不同的两参数 Weibull 分布母体中随机抽取 4 组定时截尾样本(见表 5),对应的参数点估计与下限估计的计算结果列于表 6 和表 7。

表 5 定时截尾样本

	母体	β	η	截尾时间	抽样数据
样本 1	$W(100,1)$	1.0	100.0	32.00	11.719,21.27,24.01,32.00,32.00,32.00,32.00,32.00,32.00,32.00
样本 2	$W(1000,3)$	3.0	1000.0	900.00	323.98,364.36,593.31,615.81,784.05,900.00,900.00,900.00,900.00,900.00
样本 3	$W(10,5)$	5.0	10.0	8.50	6.12,7.92,8.50,8.50,8.50
样本 4	$W(1,1)$	1.0	1.0	0.80	0.228 4,0.575,0.80

表 6 形状参数估计结果

	β	β_{ME}	β_{MLE}	β_{L-ME}	相对误差/%	β_{L-LRC}	相对误差/%
样本 1	1.0	1.922	1.971	0.981	1.9	0.437	56.35
样本 2	3.0	2.061	2.123	1.082	63.92	0.77	74.33
样本 3	5.0	5.665	5.741	2.183	56.35	0.854	82.92
样本 4	1.0	1.625	1.691	0.434	56.62	0.292	70.8

表 7 尺度参数估计结果

	η	η_{ME}	η_{MLE}	η_{L-ME}	相对误差/%	η_{L-LRC}	相对误差/%
样本 1	100.0	54.68	53.14	43.11	56.89	46.84	53.16
样本 2	1000.0	1075.2	1045.03	996.89	0.31	680.1	32
样本 3	10.0	9.57	9.51	8.814	11.86	7.48	25.2
样本 4	1.0	0.755	0.7247	0.574	42.6	0.188	81.2

注:β 与 η 分别为母体形状参数与尺度参数真值;β_{ME} 与 β_{MLE} 分别为形状参数的矩估计和极大似然估计;η_{ME} 与 η_{MLE} 分别为尺度参数的矩估计和极大似然估计;β_{L-ME} 与 η_{L-ME} 分别为根据本文方法得到的形状参数与尺度参数的下限估计;β_{L-LRC} 与 η_{L-LRC} 分别为根据似然比方法计算得到的形状参数与尺度参数的 90% 置信区间的左端点。

由计算结果可知:

1)就点估计而言,矩估计比极大似然估计更加接近参数真值;

2)对于形状参数和尺度参数的下限估计,本文中方法的精度较似然比方法分别至少提高了 10。41%(样本 2)和 13.34%(样本 3)。

4 结论

1)通过计算机模拟的方法揭示了 Weibull 分布下小样本量定时截尾数据的截尾时间变化范围、母体参数与试验结果三者之间的关系;

2)矩估计方法无需迭代、计算简单,且矩估计比极大似然估计更加接近参数真值;

3)给出了一种基于矩估计方法,计算 Weibull 分布下小样本量定时截尾数据所在母体参数下限估计的方法。实例计算表明,对于形状参数和尺度参数的下限估计,本文中方法较似然比方法估计精度分别至少提高了 14% 和 53%;

4)小样本量下截尾时间变化范围、母体参数与试验结果三者之间的关系同样适用于对形状参数变化区间已有先验知识,进而估计 Weibull 分布下小样本量定时截尾数据所在母体尺度参数的情形。

参考文献:

[1] 陈家鼎.生存分析与可靠性[M]. 北京:北京大学出版社,2005.

[2] Mete Sirvanci, Grace Yang. Estimation of the Weibull Parameters Under Type I Censoring[J]. JASA,1984, 385:183-187.

[3] J. McCool. Inference on Weibull Percentiles and Shape Parameter from Maximum Likelihood Estimates[J]. IEEE Trans. on Reliability,1970, 19(1):2-9.

[4] A. C. Cohen. Maximum Likelihood Estimation in the Weibull Distribution Based on Complete and on Censored Samples[J]. TECHNOMERTICS,1965,7(4):579-588.

[5] W. Kahle. Estimation of the Parameters of the Weibull Distribution for censored Samples[J]. Metrika,1996, 44:27-40.

(责任编辑 陈 松)