

【其他研究】

带插值条件的曲线拟合 Lingo 程序设计^{*}

刘建筑^a, 张光远^a, 黄朋^b, 肖俏^b, 颜宁生^c

(北京服装学院 a. 商学院; b. 材料科学与工程学院; c. 基础教学部, 北京 100029)

摘要: 利用 Lingo 建模语言, 编写了求解带 K 个插值点的最小二乘拟合问题的 Lingo 程序, 并利用 Excel 软件编写了求解带 K 个插值点的最小二乘拟合问题的应用软件。

关键词: 最小二乘法; 插值条件; 曲线拟合; Lingo 建模语言; Excel

中图分类号: O241.5

文献标识码: A

文章编号: 1006-0707(2010)04-0130-03

在实际问题中, 常常需要通过一组观察数据 (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, 去预测函数 $y = f(x)$ 的表达式。从几何角度来说, 就是要由给定的一组数据点 (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, 去描绘曲线 $y = f(x)$ 的近似图像, 使他较好地近似这组数据, 这就是曲线拟合。现在面临的问题具有这样的特点: ① 所给数据本身不一定可靠, 个别数据的误差甚至可能很大; ② 给出的数据很多, 而有些数据又十分重要。曲线拟合方法所要研究的课题是: 从给出的一大堆看上去杂乱无章的数据中找出其规律性。就是说设法构造一条曲线, 使其既能反映所给数据点的总趋势, 以消除其局部波动, 同时又要兼顾某些重要数据的作用, 使这条拟合曲线经过另外 s 个点 (x_{k_i}, y_{k_i}) , $i = 1, 2, \dots, s$ 。因此, 拟合时就不能采取常用的最小二乘法。文献[1] - [4]中采用最小二乘法拟合时, 要求拟合曲线必须经过 s 个点: (x_{k_i}, y_{k_i}) , $i = 1, 2, \dots, s$, 该方法称为带插值条件的最小二乘法, 同时文献还给出了二次曲线拟合时的结果:

$$y = (ax + b) \prod_{i=1}^s (x - x_{k_i}) + \sum_{i=1}^s l_i(x) y_{k_i}$$

$$\begin{cases} a = \frac{a_1 - a_2}{c} \\ b = \frac{b_1 - b_2}{c} \end{cases}$$

其中:

$$a_1 = \sum_{j=1}^n \{ [y_k - \sum_{i=1}^s l_i(x_j) y_{k_i}] x_j [\prod_{i=1}^s (x_j - x_{k_i})] \} \cdot \sum_{j=1}^n [\prod_{i=1}^s (x_j - x_{k_i})]^2$$

$$a_2 = \sum_{j=1}^n \{ [y_k - \sum_{i=1}^s l_i(x_j) y_{k_i}] [\prod_{i=1}^s (x_j - x_{k_i})] \} \cdot \sum_{j=1}^n x_j [\prod_{i=1}^s (x_j - x_{k_i})]^2$$

$$b_1 = \sum_{j=1}^n \{ [y_k - \sum_{i=1}^s l_i(x_j) y_{k_i}] [\prod_{i=1}^s (x_j - x_{k_i})] \} \cdot \sum_{j=1}^n [x_j \prod_{i=1}^s (x_j - x_{k_i})]^2$$

$$b_2 = \sum_{j=1}^n \{ [y_k - \sum_{i=1}^s l_i(x_j) y_{k_i}] x_j [\prod_{i=1}^s (x_j - x_{k_i})] \} \cdot \sum_{j=1}^n [\prod_{i=1}^s (x_j - x_{k_i})]^2$$

$$c = \sum_{j=1}^n [x_j \prod_{i=1}^s (x_j - x_{k_i})]^2 \sum_{j=1}^n [\prod_{i=1}^s (x_j - x_{k_i})]^2 - \{ \sum_{j=1}^n x_j [\prod_{i=1}^s (x_j - x_{k_i})]^2 \}^2 \neq 0$$

这表明, 文献[1]已经从理论上解决了带 K 个插值点的最小二乘拟合问题。下面将通过 Lingo 建模语言, 进一步将带 K 个插值点的最小二乘拟合问题应用到实际中来。

1 带 n 个拟合点和 K 个插值点的 $S-1$ 次曲线拟合 Lingo 程序设计

假设 n 是需要拟合的点的个数, K 是需要插值的点的个数, $S-1$ 是需要寻找的拟合曲面的次数, 则带 n 个拟合点和 K 个插值点的 $S-1$ 次曲线拟合 Lingo 程序如下:

```

model:
sets:
shuju/1..n/:x,y;chazhi/1..K/:a,b;xishu/1..S/:z;
endsets
    
```

* 收稿日期: 2010-01-04

基金项目: 北京市教育委员会科技发展计划面上项目 (KM200910012005); 北京服装学院大学生训练计划; 北京服装学院教育教学改革立项 (ZDJG-0907)。

作者简介: 刘建筑 (1988—), 男, 主要从事信息管理与信息系统研究。

```

data:
x = ?;! 输入拟合点数据;
y = ?;
a = ?;! 输入插值点数据;
b = ?;
enddata
min = @sum( shuju; ( z(s) * x^(s-1) + z(s-1) * x^(s-2) + .. + z(2) * x + z(1) - y)^2 );
@for( chazhi; z(s) * a^(s-1) + z(s-1) * a^(s-2) + .. + z(2) * a + z(1) = b );
@free( z(i) ); ( i > 1 )
end
    
```

例如^[6],为了测定刀具的磨损速度,可做这样的实验:经过一定时间(如每隔1h),测量1次刀具的厚度,得到1组实验数据如表1所示,其中第1组数据(1,26.8)为插值条件。

表1 刀具厚度测试数据

时间 x_j (h)	1	3	5	7
刀具厚度 y_j (mm)	26.8	26.3	25.7	24.8

下面通过带插值条件的曲线拟合 Lingo 程序,求该问题的二次拟合曲线。设 $i_0 = 1, n = 3, s = 3$, 则带1个插值条件和3个拟合点的二次曲线拟合 Lingo 程序为:

```

model:
sets:
shuju/1..3/:x,y;chazhi/1..1/:a,b;
xishu/1..3/:z;
endsets
data:
x=3 5 7;y=26.3 25.7 24.8;a=1;b=26.8;
enddata
min = @sum( shuju; ( z(3) * x^2 + z(2) * x + z(1) - y)^2 );
@for( chazhi; z(3) * a^2 + z(2) * a + z(1) = b );
@free( z(1) );@free( z(2) );@free( z(3) );
End
    
```

运行结果如下:

Variable	Value	Reduced Cost
Z(1)	26.96117	0.000000
Z(2)	-0.1368269	-0.3290480E -08
Z(3)	-0.2434420E -01	0.000000

即所求的二次拟合曲线为

$$y = -0.0243442x^2 - 0.136826969x + 26.96117$$

利用 Mathematica2.2^[7],

```

f = ListPlot[ {{1,26.8}, {3,26.3}, {5,25.7}, {7,24.8} },
PlotStyle -> PointSize[0.05], AxesLabel -> {时间, 刀具厚度} ]
g = Plot[ -0.0243442 * x * x - 0.136826969 * x + 26.96117
, {x, 0, 7} ],
    
```

Show[f,g]
可以得到图1的曲线。

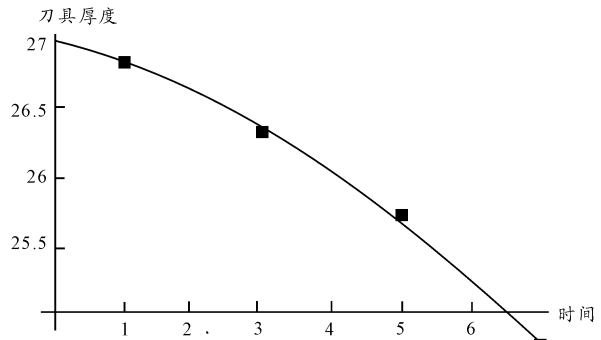


图1 刀具测试结果曲线

从图中可以看出,曲线拟合效果不错。若得到的数据如表2所示,则可将第1组和最后1组数据(0,27)、(7,24.8)作为插值条件,即利用下面的带2个插值条件和3个拟合点的三次曲线拟合 Lingo 程序进行拟合。

```

model:
sets:
shuju/1..3/:x,y;chazhi/1..2/:a,b;
xishu/1..4/:z;
endsets
data:
x=2 4 6;y=26.5 26.1 25.3;a=0 7;
b=27 24.8;
enddata
min = @sum( shuju; ( z(4) * x^3 + z(3) * x^2 + z(2) * x + z(1) - y)^2 );
@for( chazhi; z(4) * a^3 + z(3) * a^2 + z(2) * a + z(1) = b );
@free( z(1) );@free( z(2) );@free( z(3) );
@free( z(4) );
End
    
```

运行结果如下:

Variable	Value	Reduced Cost
Z(1)	27.00000	0.000000
Z(2)	-0.2858032	0.000000
Z(3)	0.3506915E -01	-0.4848634E -08
Z(4)	-0.5591155E -02	0.8924575E -08

即所求的三次拟合曲线为

$$y = -0.005591155x^3 + 0.03506915x^2 - 0.2858032x + 27$$

表2 刀具厚度测试数据

顺序编号 i	0	2	4	6	7
时间 t_i /h	0	2	4	6	7
刀具厚度 y_i /mm	27.0	26.5	26.1	25.3	24.8

2 带 K 个插值点的最小二乘拟合问题的应用软件

利用 Excel 和带插值条件的曲线拟合 Lingo 程序可以设计如图 2 所示的带插值条件的曲线拟合软件。

	A	B	C	D
1	拟合数据			
2	拟合自变量	3	5	7
3	拟合因变量	26.3	25.7	24.8
4	插值数据			
5	插值自变量	1		
6	插值因变量	26.8		

图 2 带插值条件的曲线拟合软件

在该软件中输入已知数据,点击 Lingo 求解,即可得到表 3 所示的结果。

表 3 二次曲线拟合结果

常数项	一次项系数	二次项系数
26.961 171 1	-0.136 826 9	-0.024 344 2

即所求的二次拟合曲线为:

$$y = -0.024\ 344\ 2x^2 - 0.136\ 826\ 969x + 26.961\ 17$$

再点击 Lingo,求解可得表 4 的三次曲线拟合结果。

表 4 三次曲线拟合结果

常数项	一次项系数	二次项系数	三次项系数
27.075 463 9	-0.296 484 1	0.025 204 26	0.004 184 07

即所求的三次拟合曲线为:

$$y = -0.004\ 184\ 07x^3 + 0.025\ 204\ 26x^2 - 0.296\ 484\ 1x + 27.075\ 463\ 9$$

参考文献:

- [1] 颜宁生.带插值条件的最小二乘法[J].北京服装学院学报,2007,27(2):42-48.
- [2] 刘会影,李宝玉,张鹤,等.经过四个点中的一点曲线拟合问题[J].科技资讯,2008(12):225-226.
- [3] 张光远,颜宁生,李庆福.第1边界条件下的三点曲线拟合[J].高师理科学刊,2009,29(5):34-36.
- [4] 张耀文,颜宁生,李庆福等.经过四个点中一点的曲线拟合参数的区间估计[J].吉林工程技术师范学院学报,2009,25(7):78-80.
- [5] 谢金星,薛毅,优化建模与LINDO/LINGO软件[M].北京:清华大学出版社,2005.
- [6] 叶其孝,姜启源,数学建模[M].北京:清华大学出版社,2003.
- [7] 王兵团,王秋媛,何伟.Mathematica数学软件简明教程与数学实验[M].北京:中国铁道出版社,2002.

(责任编辑 周江川)

(上接第98页)

4 结束语

对 IPv6 蜂窝式无线移动通讯网络的运行机制进行了分析,在 IPSec 协议的基础上,把 IPSec 中的一个新报头添加到 IP 数据包的原始报头和传送报头中,在 IPv6 的解密过程中起到了保密作用。IPv6 还采用 IPSec 的标准,建立 VPN 的隧道,实现了 VPN 的安全功能。同时,把 CMIv6 运用在蜂窝式无线移动通讯网络环境中,经过 VPN 安全隧道的建立以及安全信息的交换等一系列过程,体现出 CMIv6 的安全运行机制,确保资料传输的安全性、保密性与完整性,尤其在移动通讯领域更加体现出它的实用价值。

参考文献:

- [1] Chao H C, Chu Y M, Lin M T. The Implementation of

the next-Generation Wireless Network Design: Cellular Mobile IPv6[J]. IEEE Transaction on Consumer Electronics, 2000,46(3):2-4.

- [2] 杨明福.计算机网络技术[M].北京:经济科学出版社,2006.
- [3] Acampora A, Naghshineh M. An Architecture and Methodology for Mobile—Executed Cell Hand—off in Wireless ATM Networks[M]. [S. l.]:IEEE JSAC, 1994.
- [4] 周逊. IPv6—下一代互联网的核心[M].北京:电子工业出版社,2003.
- [5] 斯坦·普伦蒂斯.蜂窝式通信入门—新的移动电话系统[M].北京:电子工业出版社,2000.

(责任编辑 周江川)