

$k/N(G)$ 系统可靠性评定的熵(法)近似限

施 军 邓克绪 段文颖

(南京航空航天大学无人驾驶飞机研究所, 南京, 210016)

APPROXIMATE LIMITS OF THE ENTROPY(METHOD) FOR RELIABILITY ASSESSMENT OF A $k/N(G)$ SYSTEM

Shi Jun, Deng Kexu, Duan Wenying

(Institute of Pilot less Aircraft, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 210016)

摘 要 将近代, Shannon 信息论与可靠性工程理论相结合, 推导了由不同成败型或不同指数型单元组成的 $k/N(G)$ 系统可靠性评定用的熵(法)第一、二近似下限计算公式。评定结果令人满意。

关键词 信息量 熵 $k/N(G)$ 系统 可靠性评定

中图分类号 G201, TBI4.3

Abstract Based on the association of the modern Shannon's information theory with the reliability engineering theory, the calculation formulae of the first and the second approximate lower limits of the entropy (method) are derived for reliability assessment of a $k/N(G)$ system consisting of different success-failure model or different exponential model components. The assessment results obtained by use of the formulae in this paper are satisfactory.

Key words information, entropy, $k/N(G)$ systems, reliability assessment

$k/N(G)$ 系统是指组成系统的 N 个单元中, 至少要有 k 个单元正常工作, 系统才能保持正常工作状态的表决冗余系统, 也称为 N 中取 $k(G)$ 系统。由 N 个单元组成的串、并联系统分别是 $N/N(G)$ 、 $1/N(G)$ 系统; 因此, 较简单的串、并联系统就是较复杂的 $k/N(G)$ 系统的两个特例(k 分别等于 $N, 1$)。 $k/N(G)$ 系统是可靠性工程中普遍使用的、以低可靠性单元来组成高可靠性复杂系统的一种重要的可靠性结构模型。

本文对由成败型或指数型单元组成的 $k/N(G)$ 系统, 基于文献[1]用近代 Shannon 信息论来处理可靠性评定中信息的熵法, 给出了可靠性熵法评定的第一、二近似下限计算公式, 并举工程实例来说明公式的具体应用。

1 系统等量折合的“试验”信息

假设: $k/N(G)$ 系统由 N 个相互独立的不同成败型或指数型单元组成。 N 个单元为成败型时: 第 i 个单元的实际试验次数为 n_i , 其中失败次数的观测值为 f_i , 成功次数的观测值为 S_i ($S_i = n_i - f_i$); N 个单元为指数型时: 第 i 个单元的实际失效次数为 Z_i , 任务时间为 t_{0i} , 总试验时间为 S , 失效率为 K , 等效任务数 $G = S/t_{0i}$ 。

将组成系统的所有单元的全部试验信息分别综合为“成败型”的系统等量折合的二项

“试验”信息或“指数型”的系统等量折合的有替换定时截尾指数寿命“试验”信息, 综合时利用的条件为系统的所有单元在全部实际试验中所提供的总信息量与系统在全部折合“试验”中应提供的总信息量相等。具体的公式推导见文献[1]第 1 部分, 本文不再详述, 下面直接给出两种综合情况下, 系统等量折合的“试验”信息计算公式。

1.1 二项“试验”信息

可将组成系统的所有单元的全部试验信息综合为“成败型”的系统等量折合的二项“试验”信息。

设: 系统折合的“试验”次数为 n , 失败次数为 f , 成功次数为 $S(S = n - f)$; 系统在其每次折合“试验”中出现成功消息的概率, 即系统可靠度为 P 。

对由 N 个相互独立的同成败型单元组成的 $k/N(G)$ 系统

$$n = \frac{\sum_{i=1}^N (S_i \ln S_i + f_i \ln f_i - n_i \ln n_i)}{P \ln P + (1 - P) \ln(1 - P)} \quad (1a)$$

对由 N 个相互独立的同指数型单元组成的 $k/N(G)$ 系统

$$n = \frac{\sum_{i=1}^N G \left\{ -\frac{Z_i}{G} \exp\left[-\frac{Z_i}{G}\right] + \left[1 - \exp\left[-\frac{Z_i}{G}\right]\right] \ln\left[1 - \exp\left[-\frac{Z_i}{G}\right]\right] \right\}}{P \ln P + (1 - P) \ln(1 - P)} \quad (1b)$$

对以上 2 种 $k/N(G)$ 系统均有

$$f = n(1 - P), \quad S = nP \quad (1c)$$

式(1a) ~ 式(1c)即为文献[1]中的式(12a) ~ 式(12c), 式中的 P 需根据 $k/N(G)$ 系统的具体可靠性模型结构而写出, 详见下面第 2 部分。

1.2 有替换定时截尾指数寿命“试验”信息

可将组成系统的所有单元的全部试验信息综合为“指数型”的系统等量折合的有替换定时截尾指数寿命“试验”信息。

设: 系统折合的“试验”失效次数为 Z , 任务时间为 t_0 , 总试验时间为 S , 失效率为 K , 折合等效任务数 $G = S/t_0$ 。

对由 N 个相互独立的同成败型单元或同指数型单元组成的 $k/N(G)$ 系统

$$G = n \quad (2a)$$

$$Z = -GnP \quad (2b)$$

式(2a)、式(2b)即为文献[1]中的式(17a)、式(17b); 式(2a)表示 G 值与同型单元组成系统的 n 值相等, 式(2b)中的 P 同式(1a) ~ 式(1c)中的 P 。

2 k/N(G) 系统的可靠度

由可靠性工程理论可知: 若 $k/N(G)$ 系统由 N 个相互独立的同单元组成, 第 i 个单元的可靠度为 $R_i (i = \overline{1, N})$, 记 $R_0 = \prod_{i=1}^N R_i$, 则该系统可靠度 P 的一般表达式为

$$P = R_0 + \sum_{i=1}^N \frac{R_0}{R_i} (1 - R_i) + \sum_{i=1}^N \frac{R_0}{R_i R_j} (1 - R_i) (1 - R_j) + \dots$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-k} \frac{R_0}{R_i R_j \dots R_{N-k}} (1 - R_i)(1 - R_j) \dots (1 - R_{N-k}) \quad (3)$$

为便于实际应用,对可靠性工程中常见的 $N=3(k=2)$, $4(k=2,3)$ 的 $k/N(G)$ 系统,直接给出如下的、用于可靠性焯法评定的该类系统可靠度实用计算公式。

2.1 2/3(G)系统(三中取二系统)

$$P = \sum_{i=1}^3 R_i \left[\sum_{j=1}^3 (R_j)^{-1} - 2 \right] = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 - 2 R_1 R_2 R_3 \quad (4)$$

对组成 2/3(G) 系统的 3 个相互独立的不同成败型单元的成功概率,即可靠度 $R_i (i=1, 3)$ 取其极大似然估计(MLE) \hat{R}_i

$$R_i = \hat{R}_i = \frac{S_i}{n_i} \quad (\text{对成败型单元}) \quad (5)$$

将式(5)代入式(4),即可得出由成败型单元组成的系统可靠度

$$P = \sum_{i=1}^3 \frac{S_i}{n_i} \left[\sum_{j=1}^3 \left(\frac{n_j}{S_j} \right) - 2 \right] = \frac{S_1 S_2}{n_1 n_2} + \frac{S_2 S_3}{n_2 n_3} + \frac{S_1 S_3}{n_1 n_3} - \frac{2 S_1 S_2 S_3}{n_1 n_2 n_3} \quad (6)$$

对组成 2/3(G) 系统的 3 个相互独立的不同指数型单元的失效率 K_i 取其 MLE \hat{K}_i $K_i = \hat{K}_i = Z_i / S = Z_i / (G t_{0i})$, 则单元在每个等效任务数内所具有的相等的可靠度 $R_i (t_{0i}$ 为^[1])

$$R_i = \exp(-K_i t_{0i}) = \exp(-\hat{K}_i t_{0i}) = \exp\left[-\frac{Z_i}{G}\right] \quad (\text{对指数型单元}) \quad (7)$$

将式(7)代入式(4),即可得出由指数型单元组成的系统可靠度

$$P = \exp\left[-\sum_{i=1}^3 \left(\frac{Z_i}{G}\right)\right] \left[\sum_{j=1}^3 \exp\left(\frac{Z_j}{G}\right) - 2 \right] = \exp\left[-\left(\frac{Z_1}{G} + \frac{Z_2}{G}\right)\right] + \exp\left[-\left(\frac{Z_2}{G} + \frac{Z_3}{G}\right)\right] + \exp\left[-\left(\frac{Z_1}{G} + \frac{Z_3}{G}\right)\right] - 2 \exp\left[-\left(\frac{Z_1}{G} + \frac{Z_2}{G} + \frac{Z_3}{G}\right)\right] \quad (8)$$

2.2 2/4(G)系统(四中取二系统)

$$P = \sum_{i=1}^4 R_i \left[\sum_{j=2}^4 (R_j)^{-1} + (R_2)^{-1} \sum_{k=3}^4 (R_k)^{-1} + (R_3 R_4)^{-1} - 2 \sum_{l=1}^4 (R_l)^{-1} + 3 \right] \quad (9)$$

同以上 2.1 节,可分别得出由成败型或指数型单元组成的系统可靠度

$$P = \sum_{i=1}^4 \frac{S_i}{n_i} \left[\sum_{j=2}^4 \left(\frac{n_j}{S_j} \right) + \frac{n_2}{S_2} \sum_{k=3}^4 \left(\frac{n_k}{S_k} \right) + \frac{n_3 n_4}{S_3 S_4} - 2 \sum_{l=1}^4 \left(\frac{n_l}{S_l} \right) + 3 \right] \quad (10)$$

$$P = \exp\left[-\sum_{i=1}^4 \left(\frac{Z_i}{G}\right)\right] \left[\exp\left(\frac{Z_1}{G}\right) \sum_{j=2}^4 \exp\left(\frac{Z_j}{G}\right) + \exp\left(\frac{Z_2}{G}\right) \sum_{k=3}^4 \exp\left(\frac{Z_k}{G}\right) + \exp\left(\frac{Z_3}{G} + \frac{Z_4}{G}\right) - 2 \sum_{l=1}^4 \exp\left(\frac{Z_l}{G}\right) + 3 \right] \quad (11)$$

2.3 3/4(G)系统(四中取三系统)

$$P = \sum_{i=1}^4 R_i \left[\sum_{j=1}^4 (R_j)^{-1} - 3 \right] \quad (12)$$

同以上 2.1 节,由成败型或指数型单元组成的系统可靠度分别为

$$P = \sum_{i=1}^4 \frac{S_i}{n_i} \left[\sum_{j=1}^4 \left(\frac{n_j}{S_j} \right) - 3 \right] \quad (13)$$

$$P = \exp\left[- \prod_{i=1}^4 \left(\frac{Z_i}{G}\right)\right] \left[\prod_{j=1}^4 \exp\left(\frac{Z_j}{G}\right) - 3 \right] \quad (14)$$

3 熵法近似限

3.1 第一近似下限

对由成败型单元组成的 k/N(G) 系统, 将式(6)、式(10)、式(13)等代入式(1a); 对由指数型单元组成的 k/N(G) 系统, 将式(8)、式(11)、式(14)等代入式(1b), 就可求出 n₀。再由式(1c)求得 f 与 S 后, 利用单元可靠性评定方法中二项单元的非随机化最优置信经典下限的计算公式, 就可得出熵(法)第一近似下限 $\bar{R}_{L,S}$ 。

$$\bar{R}_{L,S} = \left[1 + \frac{f+1}{S} F_{2f+2, 2S; C} \right]^{-1} \quad (15)$$

式中: $F_{2f+2, 2S; C}$ 是自由度为(2f + 2, 2S)的 F 分布的 C 分位数, C 为预先指定的置信度。

3.2 第二近似下限

对由成败型单元组成的 k/N(G) 系统, 将式(6)、式(10)、式(13)等代入式(2a)、式(1a); 对由指数型单元组成的 k/N(G) 系统, 将式(8)、式(11)、式(14)等代入式(2a)、式(1b), 就可求出 G₀。再由式(2b)求得 Z 后, 利用单元可靠性评定方法中指数单元有替换定时截尾的失效率非随机化最优置信上限计算公式, 就可得出熵(法)第二近似下限 $\bar{R}_{L,S}$ 。

$$\bar{R}_{L,S} = \exp(- \sqrt{2Z+2, C} / 2G) \quad (16)$$

式中: $\sqrt{2Z+2, C}$ 是自由度为(2Z + 2)的 χ^2 分布的 C 分位数。

4 应用实例

由 3 个不同指数型单元组成的 2/3(G) 系统, 已知 (Z₁, G) = (1, 22), (Z₂, G) = (3, 28), (Z₃, G) = (2, 17), 求 C = 0.8 时的系统可靠度近似下限 R_L (本例取自文献[2]中的例 2)。

解: 将已知数据代入式(8), 可求得 P = 0.980278334。将已知数据及求得的 P 值代入式(1b), 本例 N = 3, 可求出 n = - 19.12593862 / - 0.096953900 = 197.2683773; 由式(1c)可求出 f = n(1 - P) = 3.890460971。利用二项可靠性非随机化最优置信下限表, 经线性插值可计算出本例 2/3(G) 系统的可靠性评定熵(法)第一近似下限 $\bar{R}_{L,S}$ 值, 如表 1 所示。

表 1 $\bar{R}_{L,S}$ 的插值计算 (C = 0.8)

| f | | 3 | 3.890460971 | 4 |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|
| n | 180 | 0.96957 | | 0.96294 |
| | 197.2683773 | 0.972186159 | 0.966782149 | 0.966117381 |
| | 200 | 0.97260 | | 0.96662 |

由式(2a)、式(2b)可求出 G = n = 197.2683773, Z = - GnP = 3.929336126。利用 χ^2 分布分位数表, 经线性插值可求得 $\sqrt{2Z+2, C} = \sqrt{2, 858672252, 0.8} = 13.27239356$; 再由式(16)可计算出本例 2/3(G) 系统的可靠性评定熵(法)第二近似下限 $\bar{R}_{L,S}$ 值。 $\bar{R}_{L,S} = \exp(- \sqrt{2Z+2, C} / 2G) = 0.966919099$ 。

本例结果与其它几种评定方法的结果(取自文献[2])比较见表 2。

表2 几种评定结果比较

| R_L | $R_{L,F}$ (信赖解) | $R_{L,H}^{[2]}$ | $\tilde{R}_{L,S}$ | $\bar{R}_{L,S}$ | $R_{L,B}$ (Bayes解) |
|-------|-----------------|-----------------|-------------------|-----------------|--------------------|
| 结果 | 0.9550 | 0.9658 | 0.9668 | 0.9669 | 0.9710 |

对于由相同单元组成的 $k/N(G)$ 系统,在可靠性工程实践中往往仅给出单个单元的试验信息,而其余 $(N-1)$ 个单元并没有做试验,也即没有提供任何信息量。对此类特殊系统,在进行可靠性熵法评定时需注意信息量的算法,我们拟专文加以研讨。

参 考 文 献

- 1 施军. 系统可靠性评定的熵(法)近似限. 航空学报, 1996, 17(5): 543 ~ 548
- 2 王振邦. $k/N(G)$ 系统可靠性综合评定的 H- 熵法. 战略防御, 1990, (2): 79 ~ 83

学术会议报道

第二届全国航空装备失效分析研讨会在张家界召开

1997年10月6日到10日,由空军装备技术部、中国航空工业总公司、海军航空兵后勤技术部、中国民用航空维修委员会与中国航空学会联合主办,空军飞行事故调查和失效分析中心与中国航空学会失效分析专业分会筹办的“第二届全国航空装备失效分析研讨会”在湖南张家界市大庸航空工业学校召开。来自航空、航天、空军、民航、海航、劳动部各厂、所、院校的80余名专家、代表参加了会议。

大会由空军外场部金慰康处长主持,中科院院士颜鸣皋教授、空军外场部副部长吕刚、中国航空学会失效分析分会主任、北京航空材料研究院总工程师吴学仁研究员等分别讲了话。

本次大会共收到120余篇失效分析论文,经中国工程院张福泽院士为主任的编委会评审,其中81篇编入《第二届全国航空装备失效分析会议论文集》,空军装备技术部部长刘凤山、中国航空工业总公司副总经理王秦平以及海军航空兵后勤技术部副部长杨瑞忠等为论文集题了词。在研讨会上,吴学仁研究员、钟群鹏教授及王仁智研究员等8位著名教授、学者分别就失效分析的历史发展、航空装备失效分析的展望、失效分析的目标、疲劳损伤及其预防等作了大会特邀报告。与会其他代表也分组进行了充分、广泛的学术交流。为鼓励与会代表积极发言,中国航空工业总公司失效分析中心以及空军事事故调查和失效分析中心分别给大会及小组交流发言的代表赠送新出版的失效分析专著两部。与会期间,中国航空学会失效分析专业分会召开了第二次全体委员会扩大会议,会议总结了失效分析分会成立以来的工作,并就失效分析分会委员换届及近期的主要工作等进行了讨论。

建议明年适当时候召开“失效分析发展前景”主题研讨会,就航空装备失效分析面临的急待解决的问题——如何加强合作及失效发展前景进行专题讨论。同时决定,第三届全国航空装备失效分析研讨会将于2000年举办,由中国民航维修委员会有关单位负责组织。

(李铁柏)