

Riccati 传递矩阵——直接 积分法及其应用

南京航空学院 温卫东 西北工业大学 顾家柳

A COMBINED RICCATI TRANSFER MATRIX—DIRECT INTEGRATION
METHOD WITH ITS APPLICATIONS

Nanjing Aeronautical Institute

Wen Weidong

Northwestern Polytechnical University

Gu Jialiu

关键词 转子动力学, Riccati 传递矩阵, 直接积分, 发动机。

Abstract A combined Riccati transfer matrix—direct integration method is proposed in the present paper. Its principal distinguishment with the combined transfer matrix—direct integration method is to employ the Riccati transfer matrix to derive the equations of the motion of a “characteristic disk”. Therefore, it has the advantages of the combined transfer matrix—direct integration method. It is better than the combined transfer matrix—direct integration method in numerical stability and its precision. It is particularly adapted to calculate the modes and the response. The present method is used to study the dynamical behavior of the rotorbearing system. The equation of the motion of the twin-spool rotorbearing system are derived and an example is given to analyse the critical speeds and modes of a twin-spool engine. The results are satisfactory to compare with those of the transfer matrix method and the combined transfer matrix—direct integration method.

Key words rotor dynamics, Riccati transfer matrix, direct integration, engine.

本文在文献〔1, 2〕工作基础上, 提出用 Riccati 传递矩阵原理建立转子支承系统的特征盘运动微分方程, 并作了理论推导及实例分析。

1987年12月12日收到

一、特征盘运动微分方程的导出

为了一般起见, 设内、外转子的特征盘均为转子中间的某一盘, 如图 1 所示。设从左边界传递到此特征盘的左端面为 n 段, 从右边界传递到此特征盘的右端面为 N 段。

当从左向右递推时, 如图 2 (a) 所示, 设在 xoz 平面上 $i \sim i+1$ 截面内的传递矩阵为 $(T_x)_{i,i+1}$, 则有

$$\begin{aligned} & \{ \alpha \ \beta \ M_x \ Q_x \ ; \ \alpha' \ \beta' \ M'_x \ Q'_x \}^T_{i+1} \\ &= (T_x)_{i,i+1} \{ \alpha \ \beta \ M_x \ Q_x \ ; \ \alpha' \ \beta' \ M'_x \ Q'_x \}^T_i \\ &+ \{ 0 \ 0 \ M_{ux} \ F_{ux} \ ; \ 0 \ 0 \ M'_{ux} \ F'_{ux} \} \end{aligned} \quad (1)$$

其中 M_{ux} 、 F_{ux} 分别为 xoz 平面上的不平衡力矩及力。上标 “ \prime ” 表示 “内转子参量”, 否则表示外转子参量。 α 、 β 、 M_x 和 Q_x 分别为 xoz 平面上的位移、转角、弯矩及剪力。

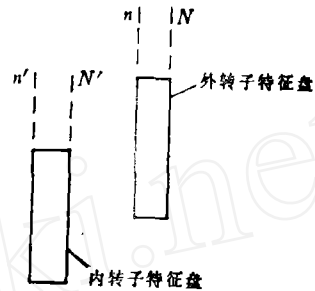


图 1 内、外转子的特征盘

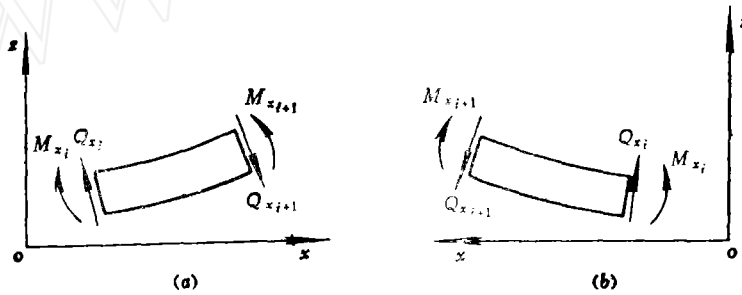


图 2 轴段两端面的受力分析

将 (1) 式改写成

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix}_{i+1} &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} F_e \\ F_f \end{Bmatrix}_i \quad (2) \\ \{U\}_i &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} T_{x11} & T_{x12} & T_{x15} & T_{x16} & T_{x13} & T_{x14} & T_{x17} & T_{x18} \\ T_{x21} & T_{x22} & T_{x25} & T_{x26} & T_{x23} & T_{x24} & T_{x27} & T_{x28} \\ T_{x51} & T_{x52} & T_{x55} & T_{x56} & T_{x53} & T_{x54} & T_{x57} & T_{x58} \\ T_{x61} & T_{x62} & T_{x65} & T_{x66} & T_{x63} & T_{x64} & T_{x67} & T_{x68} \\ T_{x31} & T_{x32} & T_{x35} & T_{x36} & T_{x33} & T_{x34} & T_{x37} & T_{x38} \\ T_{x41} & T_{x42} & T_{x45} & T_{x46} & T_{x43} & T_{x44} & T_{x47} & T_{x48} \\ T_{x71} & T_{x72} & T_{x75} & T_{x76} & T_{x73} & T_{x74} & T_{x77} & T_{x78} \\ T_{x81} & T_{x82} & T_{x85} & T_{x86} & T_{x83} & T_{x84} & T_{x87} & T_{x88} \end{bmatrix}_{i,i+1} \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\{e\} = \{\alpha \ \beta \ \alpha' \ \beta'\}^T$, $\{f\} = \{M_x \ Q_x \ M'_x \ Q'_x\}^T$, $\{F_f\} = \{M_{ux} \ F_{ux} \ M'_{ux} \ F'_{ux}\}^T$, 一般有 $\{F_e\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ 。

当 $i = 0$ 时, 有边界条件 $\{f\}_0 = \{0\}$, 从 (2) 式可得

$$\{e\}_1 = [u_{11}]_0 \{e\}_0 + \{F_e\}_0$$

$$\{f\}_1 = [s]_1 \{e\}_1 + \{P_f\}_1 \quad (4)$$

其中 $[s]_1 = [u_{21}]_0 [u_{11}]_0^{-1}$, $\{P_f\}_1 = \{F_f\}_0 - [s]_1 \{F_e\}_0$ 。当 $i = 1$ 时, 从 (2) 式和 (4) 式得

$$\{f\}_2 = [s]_2 \{e\}_2 + \{P_f\}_2 \quad (5)$$

其中 $[s]_2 = [u_{21} + u_{22}s]_1 [u_{11} + u_{12}s]_1^{-1}$, $\{P_f\}_2 = [u_{22}P_f + F_f]_1 - [s]_2 [u_{12}P_f + F_e]_1$ 。由数学归纳法, 有下述关系式

$$\{f\}_{i+1} = [s]_{i+1} \{e\}_{i+1} + \{P_f\}_{i+1} \quad (6)$$

其中 $[s]_{i+1} = [u_{21} + u_{22}s]_i [u_{11} + u_{12}s]_i^{-1}$, $\{P_f\}_{i+1} = [u_{22}P_f + F_f]_i - [s]_{i+1} [u_{12}P_f + F_e]_i$ 。如此递推下去, 一直递推至特征盘的左端面 nn' 时, 可推得关系式

$$\{f\}_n = [s]_n \{e\}_n + \{P_f\}_n \quad (7)$$

当从转子右端边界作为 oo' 截面开始递推时, 由图 2(b) 的力学和几何关系, 可导出类似于 (1)、(2) 式的传递矩阵关系式。因此, (6) 式的 Riccati 传递矩阵, 同样适用于转子右端边界开始递推的情况。当图 2(b) 参数统一到图 2(a) 坐标系中时, 必须用 $-Q$ 、 $-Q'$ 、 $-\beta$ 和 $-\beta'$ 代替原来截面参数 Q 、 Q' 、 β 和 β' 。利用右端边界条件 $\{f\}_0 = \{0\}$, 可递推得从右端 oo' 截面至特征盘右端面 NN' 截面的 Riccati 传递矩阵关系

$$\{f\}_N = [s]_N \{e\}_N + \{P_f\}_N \quad (8)$$

其中 $\{f\}_N = \{M - QM' - Q'\}_N$, $\{e\}_N = \{x - \beta x' - \beta'\}_N$ 。

若上标横杠 “-” 表示特征盘左或右截面上的参数, 且特征盘为薄盘, 则有 $\{\bar{e}\}_n \approx \{\bar{e}\}_N$ 。由图 3 的受力条件, 可得特征盘的力平衡方程

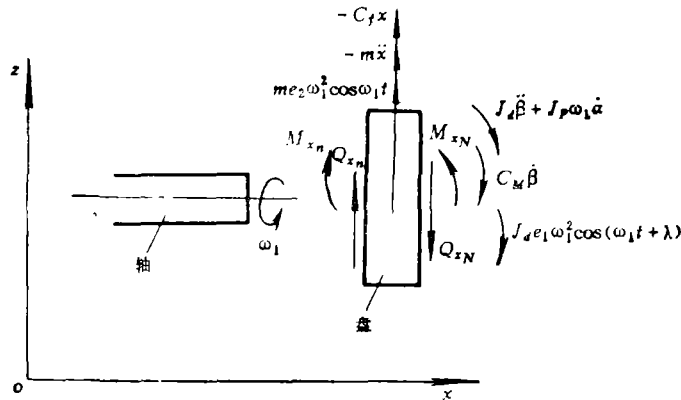


图 3 特征盘的受力分析

$$\{\bar{f}\}_n - \{\bar{f}\}_N + \left\{ \begin{array}{l} J_d \ddot{\beta} + J_p \omega_1 \ddot{\alpha} + c_M \dot{\beta} + J_d e_1 \omega_1^2 \cos(\omega_1 t + \lambda) \\ -m \ddot{x} - c_f \dot{x} + \omega_1 m e_2 \cos \omega_1 t \\ J'_d \ddot{\beta}' + J'_p \omega_2 \ddot{\alpha}' + c'_M \dot{\beta}' + J'_d e'_1 \omega_2^2 \cos(\omega_2 t + \lambda') \\ -m' \ddot{x}' - c'_f \dot{x}' + \omega_2 m' e'_2 \cos \omega_2 t \end{array} \right\} = \{0\} \quad (9)$$

其中 J_d 和 J_p 分别为直径和极转动惯量, m 为质量, c_f 和 c_M 分别为平动和转动的阻尼系数, $J_d e_1$ 和 $m e_2$ 分别为力矩和力不平衡量, t 为时间, λ 为初相角, ω_1 和 ω_2 分别为外和内转子的转动角频率, 上标 “-” 为对 t 的导数。从图 3 还可得到

$$\left. \begin{aligned} \{e\}_n &= \{\bar{e}\}_n & \{f\}_n &= \{\bar{f}\}_n \\ [H]\{f\}_N &= \{f\}_N & [H]\{\bar{e}\}_N &= \{e\}_N \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

利用 (10) 式, 并由 (7)、(8) 和 (9) 式, 得

$$[[s]_n - [H]^{-1}[s]_N[H]]\{e\}_n + \{P_f\}_n - [H]^{-1}\{P_f\}_N + \left\{ \begin{aligned} & J_d \ddot{\beta} + J_p \omega_1 \dot{\alpha} + c_M \dot{\beta} + J_d e_1 \omega_1^2 \cos(\omega_1 t + \lambda) \\ & - m \ddot{x} - c_f \dot{x} + m e_2 \omega_1 \cos \omega_1 t \\ & J'_d \ddot{\beta}' + J'_p \omega_2 \dot{\alpha}' + c'_M \dot{\beta}' + J'_p e'_1 \omega_2^2 \cos(\omega_2 t + \lambda') \\ & - m' \ddot{x}' - c'_f \dot{x}' + \omega_2 m' e'_2 \cos \omega_2 t \end{aligned} \right\} = \{0\} \quad (11)$$

上式即为双转子支承系统的特征盘对的运动微分方程。这一方程可以进行稳定性分析, 确定临界转速、不平衡响应及解非协调进动等问题。当转子系统为非轴对称时, 可相仿地求得 yoz 平面上的其余 4 个方程式, 与 xoz 平面上的方程一并求解。当只求临界转速、稳态不平衡响应及振型时, 可将运动微分方程的稳态解代入 (11) 式, 可得类似于文献 [2] 中的一组线性方程组, 所求问题即可解决。

二、实例分析与讨论

以某双转子发动机为例, 其内外转子支承系统简化模型如图 4 所示。轴简化为若干均质轴段, 低压涡轮转子与压气机转子之间的球头套齿联轴器简化成扭簧刚度为 K_n 的

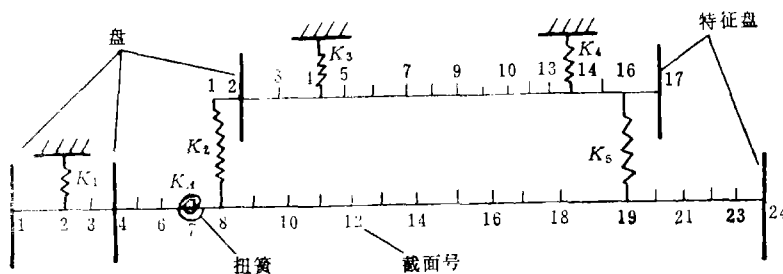


图 4 某双转子发动机简化模型

弹性联接。不考虑整个系统的阻尼。支承刚度 K_1 、 K_2 、 K_3 、 K_4 和 K_5 分别为 0.943×10^6 、 0.2×10^7 、 0.1103×10^7 、 0.5128×10^6 、 0.4×10^7 N/cm。 K_n 为 21.33×10^7 N/cm。

表 1 结论是当 $\omega_2/\omega_1=0.9$, $\omega_1=\Omega$ (进动圆频率) 时, 共振转速的计算值。可见,

表 1 内/外转子共振转速(r/min)

阶次	方法	文献[4]方法	文献[2]方法	本文方法
1		4023.54/ 4470.60	4023.54/ 4470.60	4023.58/ 4470.65
2		6979.12/ 7754.57	6979.12/ 7754.57	6981.62/ 7757.35
3		10151.6/ 11279.5	10151.6/ 11279.5	10151.6/ 11279.6

文献〔2〕方法与文献〔4〕方法的计算结果一致, 这表明二者数值精度相同。上述两方法与本文方法的计算结果相当吻合。

本文对图 4 模型的计算结果与文献〔3〕的计算结果见表 2。由表 1 可知, 本文方法

表 2 某发动机临界转速结果对比(r/min)

阶次	本文结果		文献〔3〕结果	
	$\omega_1 = \Omega$	$\omega_2 = \Omega$	$\omega_1 = \Omega$	$\omega_2 = \Omega$
1	3384/4456	4584/6926		4466/6631
2	5177/7495	8034/9393	5550/7673	8170/9468
3	11228/ 11495	11559/ 11724	10066/ 10605	10830/ 11211

在计算临界转速时, 其结果与用传递矩阵法计算结果基本一致。因此, 表 2 中的结果差别, 可认为是本文的球头套齿联轴器简化模型与文献〔3〕的不同所致。

三、结 论

本文提出了 Riccati 传递矩阵——直接积分法, 并用于双转子发动机的实例分析, 结果表明, 它不仅具有传递矩阵——直接积分法的优点, 而且建立方程更简捷, 数值解的稳定性和精度更好。

参 考 文 献

- 〔1〕 顾家柳. 传递矩阵——直接积分法及其应用. 航空学报, 1983, 4; (4), 48~56
- 〔2〕 Gu Jialiu. An-Improved Transfer Matrix——Direct Integration Method for Rotor Dynamics, J. of Vibration, Acoustics, Stress, And Reliability in Design, 1986, April, 108; 182~188
- 〔3〕 黄致政、许世安、厦昌礼. 双转子——支承——机匣系统不平衡响应计算及在某发动机上的应用. 航空部第624研究所, YK 8-1 W028, 1984, 6
- 〔4〕 Lund J W, Oreutt F K, Calculations And Experiments on The Unbalance Response of A Flexible Rotor. J. of Eng. for Industry, 1967, 89; 78.~796