

自适应滤波方法研究

张常云

(北京航空航天大学自动控制系, 北京, 100083)

APPROACH TO ADAPTIVE FILTERING ALGORITHM

Zhang Changyun

(Department of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100083)

摘 要 证明 Sage-Husa 的自适应卡尔曼滤波算法不能同时估计 Q 和 R , 并分析了该法导致滤波发散的原因。介绍了一种新的自适应卡尔曼滤波算法, 该法当 R (或 Q) 已知时可以准确地估计出 Q (或 R)。该法的独特之处在于对 Q (或 R) 进行修正估计时, 只采用矩阵的乘运算和求逆运算, 而不进行加减法运算, 因此消除了滤波发散现象。数字仿真表明效果良好。

关键词 自适应滤波 惯性导航 组合导航

中图分类号 V 249

Abstract This paper proves that Sage-Husa's adaptive Kalman filtering algorithm cannot estimate Q and R simultaneously, and analyses the reason why Sage-Husa's algorithm may lead to filtering divergence. A new algorithm of adaptive Kalman filter is introduced which can estimate Q (or R) accurately when R (or Q) is known. The most particular feature of this algorithm is that only matrix multiplication and inversion are performed while no summation or reduction is carried out in the phase of updating and improving the estimation of Q (or R), hence resulting in no filtering divergence. Digital simulation shows that it is remarkable.

Key words adaptive filtering, inertial navigation, integrated navigation

当数学模型不准确时, 人们采用自适应滤波来代替常规卡尔曼滤波以防止滤波精度下降。迄今人们已提出了多种自适应滤波方案, 其中 Sage 和 Husa 提出的极大后验估计器^[1]具有原理简单、实时性好的特点, 因此在许多领域包括惯性技术领域中得到广泛的推广应用^[2, 3]。

然而, Sage-Husa 的自适应算法也有一些缺陷和局限性, 如果使用不当, 有可能导致不理想的结果。本文的主要工作就是分析 Sage-Husa 算法的缺陷和局限性, 并介绍一种新的自适应滤波算法。

1 Sage-Husa 算法分析

考虑线性离散系统

$$X_{k+1} = \Psi_k X_k + W_k; \quad Z_k = H_k X_k + V_k \quad (1)$$

其中: W_k 和 V_k 是相互独立的白噪声, 且: $E[W_k] = q$; $E[V_k] = r$ 。

Sage-Husa 自适应滤波的流程如下

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{P}_{k+1/k} &= \Psi_k P_{k/k} \Psi_k^T + \hat{Q}_k; \hat{X}_{k+1/k} = \Psi_k \hat{X}_{k/k} + \hat{q}_k \\
 \hat{r}_{k+1} &= (1-d_k) \hat{r}_k + d_k (Z_{k+1} - H_{k+1} \hat{X}_{k+1/k}) \\
 \hat{\epsilon}_{k+1} &= Z_{k+1} - H_{k+1} \hat{X}_{k+1/k} - \hat{r}_{k+1} \\
 \hat{R}_{k+1} &= (1-d_k) \hat{R}_k + d_k (\hat{\epsilon}_{k+1} \hat{\epsilon}_{k+1}^T - H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T) \\
 \hat{K}_{k+1} &= P_{k+1/k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + \hat{R}_{k+1})^{-1} \\
 P_{k+1/k+1} &= (I - \hat{K}_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1/k} \\
 \hat{X}_{k+1/k+1} &= \hat{X}_{k+1/k} + \hat{K}_{k+1} \hat{\epsilon}_{k+1} \\
 \hat{q}_{k+1} &= (1-d_k) \hat{q}_k + d_k (\hat{X}_{k+1/k+1} - \Psi_k \hat{X}_{k/k}) \\
 \hat{Q}_{k+1} &= (1-d_k) \hat{Q}_k + d_k (\hat{K}_{k+1} \hat{\epsilon}_{k+1} \hat{\epsilon}_{k+1}^T + P_{k+1/k+1} - \Psi_k P_{k/k} \Psi_k^T)
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中: $d_k = (1-b)/(1-b^k)$, $0 < b < 1$ 。

表面上看起来, 当系统噪声方差阵 Q 和测量噪声方差阵 R 未知时, 按照上述流程可以把 Q 和 R 同时估计出来, 而且相当多的作者在工作中也确实是这样做的。然而事实上 Sage-Husa 法不能在 Q 和 R 均未知时把它们估计出来。下面举一个极其简单的例子来说明之。

设有如下离散系统

$$X_{k+1} = W_k; \quad Z_k = X_k + V_k \quad (3)$$

显然, $\Psi = 0, H = 1, W_k, V_k$ 为零均白噪, 它们的真实方差值为 Q 和 R 。依照流程式 (2) 并利用 $E[\hat{\epsilon}_{k+1} \hat{\epsilon}_{k+1}^T] = Q + R$ 来代替 $\hat{\epsilon}_{k+1} \hat{\epsilon}_{k+1}^T$, 通过推导可以得到

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{P}_{k+1/k} &= \hat{Q}_k; \\
 \hat{R}_{k+1} &= \hat{R}_k + d_k (Q - \hat{Q}_k + R - \hat{R}_k) \\
 \hat{K}_{k+1} &= \frac{\hat{Q}_k}{\hat{Q}_k + \hat{R}_k + d_k (Q - \hat{Q}_k + R - \hat{R}_k)} \\
 P_{k+1/k+1} &= \hat{Q}_k - \frac{\hat{Q}_k^2}{\hat{Q}_k + \hat{R}_k + d_k (Q - \hat{Q}_k + R - \hat{R}_k)} \\
 \hat{Q}_{k+1} &= \hat{Q}_k + d_k \frac{\hat{Q}_k^2 (1-d_k) (Q - \hat{Q}_k + R - \hat{R}_k)}{[\hat{Q}_k + \hat{R}_k + d_k (Q - \hat{Q}_k + R - \hat{R}_k)]^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

用 Q 同时减去式 (4) 中第 5 式的两端并用 R 同时减去式 (4) 中第 2 式的两端, 化简后得到

$$\left. \begin{aligned}
 Q - \hat{Q}_{k+1} &= (1-\alpha) (Q - \hat{Q}_k) - \alpha_k (R - \hat{R}_k) \\
 R - \hat{R}_{k+1} &= -d_k (Q - \hat{Q}_k) + (1-d_k) (R - \hat{R}_k)
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

因此, 关于 $\{Q - \hat{Q}_k\}$ 与 $\{R - \hat{R}_k\}$ 的离散系统的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} Z - (1-\alpha) & \alpha_k \\ d_k & Z - (1-d_k) \end{vmatrix} = (z-1)(z-1+\alpha+d_k) \quad (6)$$

其中:
$$\alpha_k = \frac{d_k (1-d_k) \hat{Q}_k^2}{[\hat{Q}_k + \hat{R}_k + d_k (Q - \hat{Q}_k + R - \hat{R}_k)]^2} \quad (7)$$

在式 (6) 中有一个特征根为 1, 这表明由式 (4) 迭代递推出的 $\{\hat{Q}_k\}$ 和 $\{\hat{R}_k\}$ 序列将分别与 Q 和 R 有一个常值误差, 即不可能估计出真实的 Q 和 R 。仿真递推也证明了这一点。

取 $Q = 5, R = 2, \hat{Q}_0 = 10, \hat{R}_0 = 6, b = 0.9$, 在 Matlab 环境下对式 (4) 反复迭代 200 次, 得到 $\hat{Q} = 6.8198, \hat{R} = 0.1802$ 。但理论推导和仿真递推都表明当 Q (或 R) 已知时, 式 (4) 反复迭代可以估计出 R (或 Q)。

较高时容易出现滤波发散,并发现滤波发散时总伴随着 \hat{Q}_k 和 \hat{R}_k 失去半正定性和正定性。

从式(2)的第 5, 10 两式来看, \hat{Q}_k 和 \hat{R}_k 失去半正定性与正定性的唯一原因就在于该两式中存在减号。本文介绍的自适应滤波新算法^[5]中只有乘除法、没有加减法,因此保证了 \hat{Q}_k 和 \hat{R}_k 的半正定性和正定性,并能在 Q (或 R) 已知的条件下准确地估计出 R (或 Q)。

2 自适应滤波新算法

考虑如下线性离散系统

$$X_{k+1} = \Psi_k X_k + \Gamma_k W_k; \quad Z_k = H_k X_k + V_k \quad (8)$$

设系统噪声和测量噪声的方差阵分别为 Q 和 R , 其中 R 已知、 Q 未知,因此在自适应滤波中采用 \hat{Q}_k 来代替并逼近 Q 。在这种条件下,滤波增益阵的递推过程和滤波时的真实方差阵传递过程分别如式(9)和式(10)所示

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}_{k+1/k} &= \Psi_k \hat{P}_{k/k} \Psi_k^T + \Gamma_k \hat{Q}_k \Gamma_k^T \\ \hat{D}_{k+1} &= H_{k+1} \hat{P}_{k+1/k} H_{k+1}^T + R \\ \hat{K}_{k+1} &= \hat{P}_{k+1/k} H_{k+1}^T (H_{k+1} \hat{P}_{k+1/k} H_{k+1}^T + R)^{-1} \\ \hat{P}_{k+1/k+1} &= (I - \hat{K}_{k+1} H_{k+1}) \hat{P}_{k+1/k} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{k+1/k} &= \Psi_k P_{k/k} \Psi_k^T + \Gamma_k Q \Gamma_k^T; \quad \hat{X}_{k+1/k} = \Psi_k \hat{X}_{k/k} \\ \epsilon_{k+1} &= Z_{k+1} - H_{k+1} \hat{X}_{k+1/k}; \quad \hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k} + \hat{K}_{k+1} \epsilon_{k+1} \\ D_{k+1} &= E[\epsilon_{k+1} \epsilon_{k+1}^T] = H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R \\ P_{k+1/k+1} &= (I - \hat{K}_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1/k} (I - \hat{K}_{k+1} H_{k+1})^T + \hat{K}_{k+1} R \hat{K}_{k+1}^T \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

下面,为方便起见,用 Ψ, H, Γ 来表示 $\Psi_k, H_{k+1}, \Gamma_{k+1}$, 并设矩阵 $[(H\Gamma)^T H\Gamma]$ 可逆。分别构造 2 个新矩阵如下

$$G = [(H\Gamma)^T H\Gamma]^{-1} (H\Gamma)^T D_{k+1} (H\Gamma) [(H\Gamma)^T H\Gamma]^{-1} \quad (11)$$

$$\hat{G} = [(H\Gamma)^T H\Gamma]^{-1} (H\Gamma)^T \hat{D}_{k+1} (H\Gamma) [(H\Gamma)^T H\Gamma]^{-1} \quad (12)$$

将式(9)、式(10)中的相应等式代入并整理得

$$G = [(H\Gamma)^T H\Gamma]^{-1} (H\Gamma)^T (H\Psi P_{k/k} \Psi^T H^T + R) (H\Gamma) [(H\Gamma)^T H\Gamma]^{-1} + \hat{Q} \quad (13)$$

$$\hat{G} = [(H\Gamma)^T H\Gamma]^{-1} (H\Gamma)^T (H\Psi \hat{P}_{k/k} \Psi^T H^T + R) (H\Gamma) [(H\Gamma)^T H\Gamma]^{-1} + \hat{Q} \quad (14)$$

$$\text{即} \quad G \quad \hat{G} \quad Q \quad \hat{Q}_k \quad (15)$$

$$\text{令:} \quad G = UU^T; \quad \hat{G} = U_k U_k^T; \quad \hat{Q}_{k+1} = UU_k^{-1} \hat{Q}_k U_k^{-T} U^T \quad (16)$$

则由式(15)知 \hat{Q}_{k+1} 比 \hat{Q}_k 更逼近 Q 。任意选取正定矩阵 Q 和 R , 对式(9) ~ 式(12)、式(16)进行反复迭代递推,最终都可使 \hat{Q} 无穷逼近 Q 。

本算法还有几种变型,分别用于对 Q 和 R 进行自适应估计^[5]。

3 应用举例

以惯性/GPS 组合导航系统为例,其卡尔曼滤波的状态方程为连续形式的惯性导航误差方程,状态向量一般应包括惯导系统的三维姿态误差、三维位置误差、三维速度误差以及 6 个惯性元件的误差等,通常不少于 15 维。

为了减少计算量以提高速度,本例将系统由 15 阶降为 6 阶,仅取东向速度误差 δV_x 、北向速度误差 δV_y 、天向速度误差 δV_z 、纬度误差 δL 、经度误差 $\delta \lambda$ 以及高度误差 δh 作为状态向量,即: $X = [\delta V_x \quad \delta V_y \quad \delta V_z \quad \delta L \quad \delta \lambda \quad \delta h]^T$ (17)

简化后的系统误差方程为

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{V}_x &= \nabla_x; & \delta \dot{V}_y &= \nabla_y; & \delta \dot{V}_z &= \nabla_z \\ \delta \dot{L} &= \delta V_y / r; & \delta \dot{\lambda} &= \delta V_x / (r \cos L); & \delta \dot{h} &= \delta V_z \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中: $\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z$ 为加速度计误差; L 为地理纬度; r 为地球半径。

观测方程由惯导输出的纬度、经度、高度分别减去 GPS 输出的纬度、经度、高度而得到。

系统降阶造成的不确定性模型误差与加速度计误差共同构成未知的系统噪声, 而测量噪声即为 GPS 的误差, 其统计特性可以通过实验测知, 即 R 已知, Q 未知, 因而可以采用上一章介绍的自适应滤波新算法来估计惯导的位置误差和速度误差。

本例设飞机以 200m/s 的速度沿赤道自西向东水平匀速飞行, GPS 水平误差的均方根为 50m, 垂直误差均方根为 100m。每 15 个滤波周期更新一次 \hat{Q}_k , 其中前 5 个周期用于使滤波器稳定, 后 10 个周期对 ϵ 进行采样以估计 D_{k+1} 矩阵。自适应滤波和 $Q = 10^{-8} \times I_3$ 时的常规卡尔曼滤波结果对比如图 1 所示, 而 Sage-Husa 算法的速度误差估计结果很差, 因而图中未画出。

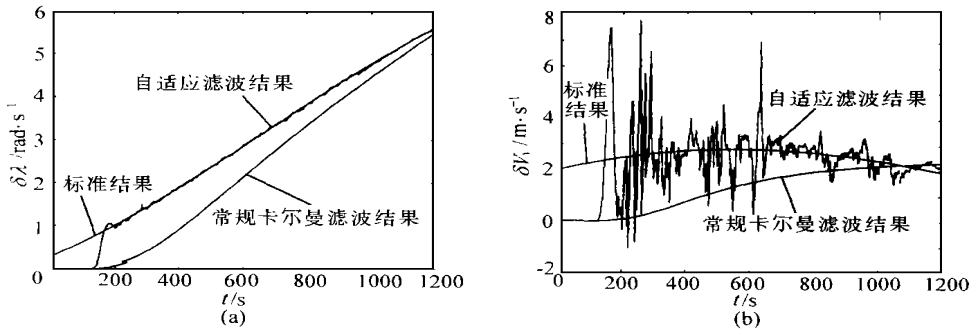


图 1 自适应滤波与卡尔曼滤波结果
(a) 经度误差 $\delta\lambda$; (b) 北向速度误差 δV_y

参 考 文 献

- 1 Sage A P, Husa G W. Adaptive filtering with unknown prior statistics. Proceedings of Joint Automatic Control Conference, 1969. 760 ~ 769
- 2 邓自立, 郭一新. 油田产油量、产水量动态预报. 自动化学报, 1983, 9(2): 121 ~ 125
- 3 邹志勤. 自适应惯性位置组合导航技术研究. 导航, 1994(3): 31 ~ 41
- 4 张汉国. 分散化估计方法及其在容错组合导航系统中的应用: [学位论文]. 北京: 北京航空航天大学, 1991
- 5 张常云. 超视距空导弹复合制导理论研究: [学位论文]. 北京: 北京航空航天大学, 1994