【其他研究】

一类 n 种群捕食竞争系统概周期解的全局稳定性

李晓艳

（兰州城市学院 数学学院，兰州　730070）

摘要：考虑一类非同步扩散的 n 种群捕食竞争系统，通过构造 Lyapunov 函数及微分不等式，得到该系统正概周期解的存在唯一性与全局稳定性的充分条件，该条件一定程度上蕴含了周期系统的结论。

关键词：扩散；捕食竞争系统；概周期解；全局稳定性

中图分类号：TP183　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006 - 0707(2011)02 - 0148 - 03

用数学模型的方法来研究种群生态学问题是常见的方法，由于具有扩散的种群模型周期解问题的结论较多，而概周期现象是一类比周期现象更普遍的现象，因此研究概周期解问题的重要性不言而喻。

讨论一般的 n 种群捕食竞争系统扩散生态模型，其中 $n-m$ 类相互竞争的种群以另外 m 类相互竞争的种群为食，且食饵种群可以在其 m 个斑块之间扩散，而 $n-m$ 个捕食种群只限定在 m 个斑块中的某一个内不能扩散；还考虑到捕食者的功能反应。许多文献考虑到同步扩散[1-3]，基于上述情况，下面考虑斑块间扩散不同步的情况，在文献[4]的基础上，得到系统正概周期解的存在唯一性与全局稳定性的充分条件。

1　模型建立

非自治捕食竞争系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i\left[b_i(t) - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j\right] + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{m}\left[b_{ij}(t)x_j - c_{ij}(t)x_i\right], i = 1,2,\cdots,m \\ \dot{x}_i = x_i\left[b_i(t) - \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{ij}(t)x_j + \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}(t)k_j(t)x_j\right], i = m+1,m+2,\cdots,n \end{cases} \tag{1}$$

式中：$x_i(i=1,2,\cdots m)$ 为食饵密度，$x_i(i=m+1,m+2,\cdots n)$ 为捕食者密度；b_{ij} 为食饵种群从斑块 j 到斑块 i 的迁入系数；c_{ij} 为食饵种群从斑块 i 到斑块 j 的迁出系数，系统中各系数均为连续的一致概周期函数；$k_j(t)(j=1,2,\cdots,m)$ 为转化系数。

定义：$f^M = \sup\limits_{t\geqslant 0} f(t)$，$f^L = \inf\limits_{t\geqslant 0} f(t)$，这里 $f(t)$ 是连续有界函数。

2　概周期解的存在唯一性与稳定性

引理 1[5]　设 D 是 R_+^2 的一个开集，函数 $V(t,x,y)$ 定义在 $R_+ \times D\times D$ 上满足：

1）$a\|x-y\| \leqslant V(t,x,y) \leqslant b\|x-y\|$，其中 $a(r)$ 和 $b(r)$ 为连续、递增的正定函数；

2）$\|V(t,x_1,y_1) - V(t,x_2,y_2)\| \leqslant k\{\|x_1-x_2\| + \|y_1-y_2\|\}$，$k>0$ 是一个常数；

3）$\dot{V}|_{(1)} \leqslant -CV(t,x,y)$，这里 $C>0$ 是一个常数；

4）若满足 $t\geqslant t_0>0$ 的解位于紧集 S 中，$S\subset D$。

则系统 1）在 D 中有唯一概周期解 $P(t)$；若 $P(t)$ 位于紧集 S 中，则该概周期解是一致渐进稳定的。

利用引理 1 对系统(1)作如下变换：$x_i^* = \ln(x_i(t))$，$i=1,2,\cdots,n$。则系统(1)可化为

收稿日期：2010 - 11 - 07

作者简介：李晓艳(1980—)，女，硕士研究生，讲师，主要从事运筹学与控制论研究。

$$\begin{cases}\dot{x}_i^* = b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)e^{x_j^*} + \sum_{j=1,j\neq i}^{m}[b_{ij}(t)e^{x_j^*-x_i^*} - c_{ij}(t)], i = 1,2,\cdots,m \\ \dot{x}_i^* = b_i(t) - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}(t)e^{x_j^*} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)k_j(t)e^{x_j^*}, i = m+1,\cdots,n\end{cases} \tag{2}$$

由文献[4]中定理2，可得：$\bar{S} = \{(x_1^*(t), x_2^*(t),\cdots,x_n^*(t)) \mid \ln m_3 \leqslant x_i^*(t) \leqslant \ln M\}$ 是系统(2)的最终有界正不变集。

引理 2[4] 若系统(1)满足条件：

$$(\mathrm{H}_2)\quad b_i^L > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}^M M^* + \sum_{j=1,j\neq i}^{m} c_{ij}^M, i = 1,2,\cdots,m;$$

$$(\mathrm{H}_3)\quad b_i^L + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^L k_i^L m_1^* > \sum_{j=m+1,j\neq i}^{n} a_{ij}^M M_2^*, i = m+1,\cdots,n。$$

其中：$M = \max\{M_1, M_2\}$；$M^* = \max\{M_1^*, M_2^*\}$，则系统(1)中各种群永久持续生存。

定理 1 系统(1)除了满足条件 $(H_1)-(H_3)$[4]，还满足条件

$$(\mathrm{H}_4)\quad a_{ii}^L > \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left(a_{ij}^M + \frac{b_{ij}^M}{m^*}\right) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^M k_j^M$$

其中：当 $i \leqslant m$ 时，$k_j = 0$；当 $i > m$ 或 $j > m$ 或 $i = j$ 时，$b_{ij} = 0$；$m^* = \min\{m_1^*, m_2^*\}$；$m_3 = \min\{m_1, m_2\}$，则系统(1)在 S 中有唯一全局渐进稳定的正概周期解。

证明： 由文献[4]中的定理 3 知

$$0 < m_1 < m_1^* = \min_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{\frac{b_i^L - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}^M(t)M^* - \sum_{j=1,j\neq i}^{m} c_{ij}^M}{a_{ii}^M}\right\}$$

$$0 < m_2 < m_2^* = \min_{i=m+1,\cdots,n}\left\{\frac{b_i^L + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^L k_j^L m_1^* - \sum_{j=m+1,j\neq i}^{n} a_{ij}^M M_2^*}{a_{ii}^M}\right\}$$

系统(1)的伴随系统：

$$\begin{cases}\dot{x}_i = x_i[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j] + \sum_{j=1,j\neq i}^{m}[b_{ij}(t)x_j - c_{ij}(t)x_i], i = 1,2,\cdots,m \\ \dot{x}_i = x_i[b_i(t) - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}(t)x_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)k_j(t)x_j], i = m+1,\cdots,n \\ \dot{y}_i = y_i[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)y_j] + \sum_{j=1,j\neq i}^{m}[b_{ij}(t)x_j - c_{ij}(t)y_i], i = 1,2,\cdots,m \\ \dot{y}_i = y_i[b_i(t) - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}(t)y_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)k_j(t)y_j], i = m+1,\cdots,n\end{cases} \tag{3}$$

对系统(3)的解 $(X(t), Y(t)) \in S\times S$，其中 $X(t) = (x_1(t),\cdots,x_n(t))$，$Y(t) = (y_1(t),\cdots,y_n(t))$，令 $x_i^*(t) = \ln x_i(t)$，$y_i^*(t) = \ln y_i(t)$，$i = 1,2,\cdots,n$。证明系统(1)的概周期解的存在性等价于证明系统(2)的概周期解的存在性。

取 Lyapunov 函数 $V(t) = \sum_{i=1}^{n}|x_i^* - y_i^*|$，$a(s) = b(s) = \sum_{i=1}^{n}|x_i^* - y_i^*|$，则 $a(s)$，$b(s)$ 是正定、连续递增函数；又

$$\left|\sum_{i=1}^{n}|x_{i1}^* - y_{i1}^*| - \sum_{i=1}^{n}|x_{i2}^* - y_{i2}^*|\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(|x_{i1}^* - x_{i2}^*| + |y_{i1}^* - y_{i2}^*|)$$

所以，$V(t)$ 满足引理 1 的条件 1)和 2)，下证 $V(t)$ 满足引理 1 的条件 3)和 4)。

由微分中值定理得 $|x_i(t) - y_i(t)| = |e^{x_i(t)} - e^{y_i(t)}| = e^{\xi_i(t)}|x_i^*(t) - y_i^*(t)|$，$i = 1,2,\cdots,n$，其中 $\ln m_3 \leqslant \xi_i(t) \leqslant \ln M$。所以

$$m_3|x_i^*(t) - y_i^*(t)| \leqslant |x_i(t) - y_i(t)| \leqslant M|x_i^*(t) - y_i^*(t)|, i = 1,2,\cdots,n$$

由式(3)的解，求

$$D^+V(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\dot{x}_i}{x_i} - \frac{\dot{y}_i}{y_i}\right)\mathrm{sgn}(x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{m}\mathrm{sgn}(x_i - y_i)\left[-\sum_{j=1,i\leqslant m}^{n} a_{ij}(t)(x_j - y_j) + \sum_{\substack{j=1,i\leqslant m\\ j\neq i}}^{m} b_{ij}\frac{y_i x_j - y_j x_i}{y_i x_i}\right] +$$

$$\sum_{i=m+1}^{n}\mathrm{sgn}(x_i - y_i)\left[-\sum_{\substack{j=m+1\\ m+1\leqslant i\leqslant n}}^{n} a_{ij}(t)(x_j - y_j) + \sum_{\substack{j=1\\ m+1\leqslant i\leqslant n}}^{m} a_{ij}(t)k_j(t)(x_j - y_j)\right] \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m}[-a_{ii}(t)|x_i-y_i|+\sum_{j=1,i\leqslant m}^{n}(a_{ij}^M+\frac{b_{ij}^M}{m^*})|x_j-y_j|]+\sum_{i=m+1}^{n}[-a_{ii}(t)|x_i-y_i|+$$

$$\sum_{\substack{j=m+1\\ m+1\leqslant i\leqslant n}}^{n}a_{ij}^M|x_j-y_j|+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(t)k_j(t)|x_j-y_j|]$$

当 $i>m$ 或 $j>m$ 或 $i=j$ 时，$b_{ij}=0$。

$$D^+V(t)\leqslant\sum_{i=1}^{n}[-a_{ii}|x_i-y_i|+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}|x_i-y_i|+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}^M}{m^*}|x_i-y_i|+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}k_j|x_i-y_i|]$$

当 $i\leqslant m$ 时，$k_ja_{ij}=0$，即 $k_j=0$。

$$D^+V(t)=\sum_{i=1}^{n}D^+|x_i^*-y_i^*|\leqslant-\sum_{i=1}^{n}[a_{ii}-\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^M+\frac{b_{ij}^M}{m^*})-\sum_{j=1}^{m}a_{ij}k_j]|x_i-y_i|\leqslant$$

$$-m_3\sum_{i=1}^{n}[a_{ii}^L-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(a_{ij}^M+\frac{b_{ij}^M}{m^*})-\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^Mk_j]|x_i^*-y_i^*|\leqslant-Q\sum_{i=1}^{n}|x_i^*-y_i^*|$$

由(H_4)，当 $m_1\to m_1^*$，$m_2\to m_2^*$，$m_3\to m^*$ 时，得

$$Q=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{m_3[a_{ii}^L-\sum_{j=1,i\neq j}^{n}(a_{ij}^M+\frac{b_{ij}^M}{m_3})-\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^Mk_j^M]\}>0$$

故 $V(t)$ 满足引理 1 的条件 3)。因此必存在唯一一致渐进稳定的概周期解 $g(t)$，同时定理的证明过程蕴涵了正概周期解的全局渐进性，所以系统 1) 在 S 中存在唯一全局渐进稳定的正概周期解。

推论 1 若 $b_{ij}(t)=c_{ij}(t)\neq0$，系统 1) 可化为文献[5]中的模型：

$$\begin{cases}\dot{x}_i=x_i(b_i(t)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j)+\sum_{j=1,j\neq i}^{m}b_{ij}(t)(x_j-x_i),i=1,2,\cdots,m\\ \dot{x}_i=x_i(b_i(t)-\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}(t)x_j+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(t)x_j),i=m+1,\cdots,n\end{cases}\tag{4}$$

结论 1 若系统 4) 满足条件(H_2)－(H_4)，则系统中各种群永久持续生存且存在唯一全局渐进稳定的正概周期解，蕴涵了文献[5]中周期系统的结论。

推论 2 若 $b_{ij}(t)=c_{ij}(t)=0$，系统(1)可化为 Lotka-Volterra 捕食－竞争模型：

$$\begin{cases}\dot{x}_i=x_i[b_i(t)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j],i=1,2,\cdots,m\\ \dot{x}_i=x_i[b_i(t)-\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}(t)x_j+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(t)x_j],i=m+1,\cdots,n\end{cases}\tag{5}$$

结论 2 若系统(5)满足条件(H_2)－(H_4)(H_2-H_4 中 b_{ij} 和 c_{ij} 都为零)，则系统(5)中各种群永久持续生存且存在唯一全局渐进稳定的正概周期解，蕴涵了文献[6]中周期系统的结论，同时文献[7]中的模型是 $b_{ij}(t)=c_{ij}(t)=0$ 时的特殊情况。

参考文献：

[1] Wang H, Zhang S. Permanence and Existence of Periodic Solutions of a Predator－Prey Patchy Model with Dispersal and Time Delay[J]. Journal of Biomathematics, 2007, 22(1): 25－36.
[2] 陈超，纪昆. 具有 Holling III 类功能性反应的多种群捕食竞争系统的周期解[J]. 应用数学学报，2006，29(4)：756－765.
[3] 韩思远，贾建文. 具有时滞和扩散的基于比例的捕食系统的正概周期解[J]. 陕西师范大学学报，2008，4(21)：18－21.
[4] 李晓艳，姚频. 一类非同步扩散的 n 种群捕食竞争系统的持久性[J]. 四川兵工学报，2010，6(31)：142－145.
[5] 孟新柱，王学蕾. 具有周期系数的捕食－竞争扩散系统的持久与全局渐进稳定性[J]. 潍坊学院学报，2002，4(2)：11－16.
[6] 赵建东. 多种群周期捕食竞争系统的周期解[J]. 鲁东大学学报，2007，23(1)：1－3.
[7] 滕志东，陈兰荪. 非自治竞争 Lotka-Volterra 系统的持续生存和全局稳定[J]. 高校应用数学学报，1998，14(2)：140－146.
[8] 陆征一，周义仓. 数学生物学进展[M]. 北京：科学出版社，2006.
[9] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究[M]. 合肥：安徽教育出版社，2000.
[10] 马知恩，周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京：科学出版社，2001.

（**责任编辑** 陈 松）