

文章编号: 1000-6893(2006)01-0067-04

结构可靠性分析的模糊概率积分法

蒋向华, 杨晓光, 王延荣

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

Fussy Probability Integral Method for Structural Reliability Evaluation

JIANG Xiang-hua, YANG Xiao-guang, WANG Yan-rong

(School of Jet Propulsion, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

摘 要: 针对传统应力-强度干涉法计算结构可靠度时求解材料疲劳强度分布困难的情况, 提出了一种利用模糊概率理论直接求解结构可靠度的算法——模糊概率积分法。对该方法进行了理论推导; 同时考虑到方法应用过程中可能出现方程重积分困难的情况, 又给出了以该方法为基础的数值抽样技术, 用以计算结构可靠度的近似值。最后给出一个在航空发动机上的应用算例, 计算结果表明该方法快速、有效, 适合于工程应用。

关键词: 结构可靠度; 模糊概率积分法; 应力强度干涉法; 疲劳寿命

中图分类号: V215.7 文献标识码: A

Abstract: Great difficulty exists in the process of reliability estimation by traditional stress strength interference method, therefore an approach named as Fussy Probability Integral (FPI) method is investigated. This approach is capable of evaluating structural reliability directly without the demand of strength distributions, which makes the approach itself fast and efficient. Details on this approach and its principle are presented. After that, a sampling method based on FPI is also studied to estimate an approximate value of the structure reliability in case of probably dual integral difficulties in the applications of FPI method. At the end, a real case of application on a turbine engine is presented to validate its applicability and reliability.

Key words: structure reliability; fussy probability integral; stress strength interference; fatigue life

对结构而言, 由于尺寸、材料、加工工艺及载荷的分散性, 使得结构中各个部位所承受的应力都是带一定分布的随机变量。通常人们采用应力-强度干涉模型法计算结构的失效概率或可靠性。然而, 而在应用干涉模型法时, 所遇到的最大困难是如何得到等寿命下的强度分布, 因为这一分布很难直接采用实验获得。

为了获得等寿命下的疲劳强度分布, 各国科学家做了大量的研究工作^[1-6], 本文提出了一种数学方法——模糊概率积分法(Fussy Probability Integral, FPI), 这种方法根据结构中关键位置的应力分布和材料的 $P-S-N$ 曲线, 直接计算不同寿命下结构的可靠度, 避免了应力-强度干涉模型法中对等寿命强度的求解。同时考虑到该方法计算过程中有可能出现重积分求解困难的情况, 还给出了采用数值抽样技术近似计算累积失效概率的方法。文中最后给出了一个 FPI 法在航空发动机中的应用算例, 说明该方法与应力-强度干涉法计算结果的一致性。

1 评定结构可靠度的 FPI 法

(1) FPI 法的理论推导 根据材料的 $P-S-N$ 曲线可知, 在一定温度及应力比下, 结构的寿命均值 N_{50} 与结构应力 S 是一一对应的, 并可以拟合成函数曲线 $N_{50} = h(S)$, 该函数为单调递减函数。设应力是服从某种分布 F 的连续型随机变量, 分布的概率密度函数为 f , 对应的结构均值寿命 N_{50} 服从某种分布 Q , 其概率密度函数为 q , 如图 1、图 2 所示, 则根据概率论原理, 寿命均值 N_{50} 出现在区间 $[N_{50} | s = s_2, N_{50} | s = s_1] = [h(S_2), h(S_1)]$ 的概率为^[5]

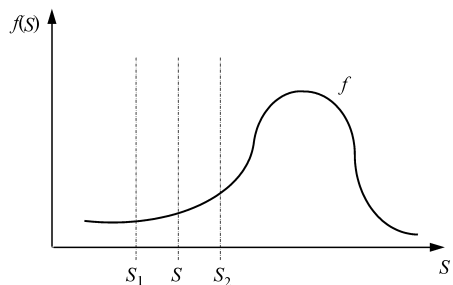
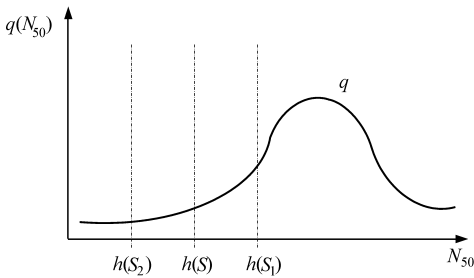


图 1 应力分布的概率密度函数

Fig 1 Probability density function for stress

收稿日期: 2005-03-13; 修订日期: 2005-08-09

图 2 结构寿命 N_{50} 的概率密度函数Fig. 2 Probability density function for N_{50}

$$P(N_{50} | s = s_2 \leq N_{50} \leq N_{50} | s = s_1) = P\{h(S_2) \leq h(S) \leq h(S_1)\} = P(S_1 \leq S \leq S_2) = \int_{S_1}^{S_2} f(S) dS \quad (1)$$

当 $[S_1, S_2]$ 为 S 应力的无穷小邻域 dS , 对应的 $[h(S_2), h(S_1)]$ 即为寿命的无穷小邻域 dN , 则由式(1) 可得寿命均值 N_{50} 出现在 dN 的概率为

$$P(N_{50} \in dN) = f(S) dS \quad (2)$$

另一方面, 设结构受某一给定的应力 S_0 作用时, 结构寿命服从某种分布 G , 其概率密度函数为 g , G 分布的均值即为 N_{50} 。对于给定的某个寿命 N^* , 由概率论原理可知寿命分布 G 中寿命小于或等于某个给定寿命 N^* 的概率为

$$P(N \leq N^* | S = S_0) = c(N^*, S_0) \quad (3)$$

其中: $c(N^*, S)$ 为 G 分布在 N^* 处的累积概率。

由此, 根据模糊数学原理, 可定义模糊事件 \bar{A} 为: 寿命均值 N_{50} 可能出现在无穷小邻域 dN 时寿命分布 G 中寿命小于某个寿命 N^* 的事件。 \bar{A} 的普通概率为寿命 N_{50} 完全属于无穷小邻域 dN 时, 寿命分布 G 中所有小于给定的某个寿命 N^* 的概率, 即式(3); \bar{A} 的模糊概率为寿命均值 N_{50} 属于该无穷小邻域 dN 的概率, 即式(2)。根据模糊概率原理^[7], 可得模糊事件 \bar{A} 发生的概率为

$$P(N \leq N^* | S \in dS) = c(N^*, S) f(S) dS \quad (4)$$

由式(4) 积分可得到寿命 N_{50} 出现在全寿命空间 $(-\infty, +\infty)$ 时结构寿命小于给定某个寿命 N^* 的概率, 亦即在随机应力作用下结构在寿命 N^* 时的累积失效概率

$$P(N \leq N^*) = P(N \leq N^* | -\infty < S < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(N^*, S) f(S) dS \quad (5)$$

当 N^* 取 $-\infty$ 时, 由于

$$\lim_{N^* \rightarrow -\infty} (c(N^*, S)) = 1$$

即应力 S 作用下, 寿命趋于无穷大时所有结构将

失效, 代入式(5) 得

$$\lim_{N^* \rightarrow -\infty} \{P(N \leq N^*)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(S) dS = 1$$

故式(5) 的积分有上界: $\lim_{N^* \rightarrow -\infty} \sup\{P(N \leq N^*)\} = 1$, 即寿命趋于无穷大时所有结构将必定失效。易知式(5) 的积分有下界: $\lim_{N^* \rightarrow -\infty} \inf\{P(N \leq N^*)\} = 0$ 。

而结构在给定寿命 N^* 时的可靠度即为

$$R(N^*) = 1 - P(N \leq N^*) \quad (6)$$

例如: 某结构关键部位的应力是服从正态分布的连续型随机变量(均值为 μ_s , 标准差为 σ_s), 结构寿命在所有给定的应力下均服从对数正态分布, 则该结构在给定寿命 N^* 时的结构可靠度为(其中 $\mu_N = h(S)$, $\sigma_N = u(S)$)

$$R(N^*) = 1 - P(N \leq N^*) = 1 - P(t \leq \lg N^*) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{u(S)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lg N^*} e^{-\frac{(t-h(S))^2}{2u^2(S)}} dt \right] \left[\frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(S-\mu_s)^2}{2\sigma_s^2}} \right] dS \quad (7)$$

(2) 采用数值抽样技术计算结构累积失效概率 由于式(6) 是一个双重积分, 有可能出现没有解析积分的情况。下面给出一种数值抽样方法, 用以求得式(6) 的近似值, 其过程如图 3 所示。

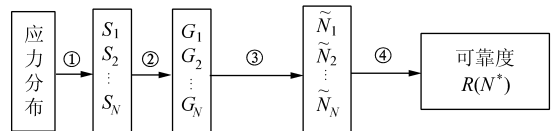


图 3 数值抽样计算结构可靠度的流程

Fig. 3 Flow chart of sampling method

其中标号 ①~ ④分别表示:

- ① 由应力分布抽取 n 个应力样本;
- ② 根据 $P-S-N$ 曲线确定 n 个寿命分布;
- ③ 每个寿命分布中抽取一个寿命样本;
- ④ 寿命样本中大于给定寿命 N^* 的比例

$R(N^*)$ 即为所求可靠度的一个近似值, 且随着样本数 N 的增加, $R(N^*)$ 将趋近于式(6) 所得到的解析值。

其理论依据如下:

根据应力分布 F (概率密度函数为 f) 抽取 n 个应力样本 $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ 。如图 4 所示, 任意选出 3 个相邻的应力样本 $S = S_{i-1}$, $S = S_i$ 和 $S = S_{i+1}$, 定义应力样本 $S = S_i$ 的上、下半邻域为图中 $L_3 = 0.5 \times (L_1 + L_2)$ 所代表的区域

$[S_i^-, S_i^+]$, 则 $S = S_i$ 落在这个邻域的概率可由式 (2) 计算得

$$P(S_i^- \leq S \leq S_i^+) = \int_{S_i^-}^{S_i^+} f(S) dS \quad (8)$$

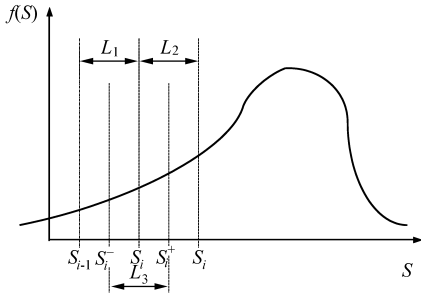


图 4 上、下半邻域

Fig 4 Upper and lower half neighborhoods

在样本左边界, 即当中间点 $S = S_i$ 为 S_1 时, $S = S_{i-1}$ 可取 $-\infty$; 同理在样本右边界, 即中间点 $S = S_i$ 为 S_n 时, 可取 $S = S_{i+1}$ 为 $+\infty$ 。这样 $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ 的所有上、下半邻域就构成了无覆盖亦无间隙的全应力空间 $(-\infty, +\infty)$, 从而可以推出

$$\sum_{i=1}^n P(S_i^- \leq S_i \leq S_i^+) = \sum_{i=1}^n \left[\int_{S_i^-}^{S_i^+} f(S) dS \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(S) dS = 1 \quad (9)$$

另一方面, 设结构受某一应力样本 $S = S_i$ 作用时, 结构寿命服从某种分布为 G_i , 则对于给定的某个寿命 N^* , 由概率理论可知在寿命分布 G_i 中随机抽取一个寿命值 \bar{N}_i , 则这个寿命值小于所给定寿命 N^* 的概率为 G_i 分布在 N^* 处的累积概率

$$P(N \leq N^* | S = S_i) = c(N^*, S_i) \quad (10)$$

参照 (1) 节, 根据模糊数学原理, 定义模糊事件 \bar{A} 为: 寿命均值 N_{50} 可能出现在寿命区间 $[h(S_i^-), h(S_i^+)]$ 时在寿命分布 G_i 中抽取一个寿命值 \bar{N}_i , 出现该寿命值小于某个给定寿命 N^* 的事件。 \bar{A} 的普通概率为寿命均值 N_{50} 完全属于寿命区间 $[h(S_i^-), h(S_i^+)]$ 时在寿命分布 G_i 中抽取一个寿命值 \bar{N}_i , 这个寿命值小于给定寿命 N^* 的概率, 即式 (10); \bar{A} 的模糊概率为寿命 N_{50} 属于这个寿命区间的概率, 即式 (8)。根据模糊概率原理, 可得模糊事件 \bar{A} 发生的概率为

$$P(N \leq N^* | S_i^- < S < S_i^+) = c(N^*, S_i) \cdot \int_{S_i^-}^{S_i^+} f(S) dS \quad (11)$$

对式 (11) 的求和即为寿命均值 N_{50} 出现在全寿命空间 $(-\infty, +\infty)$ 时, 结构寿命小于给定寿命 N^*

的概率, 亦即结构在 N^* 寿命时的累积失效概率 $P(N \leq N^*) = P(N \leq N^* | -\infty < S < +\infty) = \sum_{i=1}^n c(N^*, S_i) \cdot \int_{S_i^-}^{S_i^+} f(S) dS$ (12)

当 n 不断增大并趋近于 $+\infty$ 时, 根据积分原理, 式 (12) 即为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{P(N \leq N^*)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n [c(N^*, S_i) \cdot \int_{S_i^-}^{S_i^+} f(S) dS] \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} c(N^*, S) f(S) dS \quad (13)$$

比较式 (13) 与式 (5) 可以看出两式的右端项完全相同, 说明 n 增大时, 寿命样本 $\{\bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots, \bar{N}_n\}$ 中小于或等于给定寿命 N^* 的比率将趋于式 (5) 所得的结构累积失效概率。

2 数值算例

某型航空发动机涡轮盘, 有限元模型采用轴对称单元, 如图 5 所示, 材料为 GH4169。涡轮盘受离心载荷和温度载荷共同作用。经过确定性有限元计算, 得知涡轮盘中应力极大值点为 P , 该点温度为 500°C , 受 $R = 0$ 的恒幅疲劳载荷作用, 塑性应变很小, 可采用应力-寿命关系进行疲劳寿命分析。并认为在一定应力下, 材料的寿命满足对数正态分布的要求。

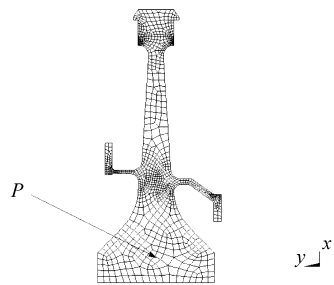


图 5 涡轮转子有限元网格

Fig 5 The finite element mesh of turbine rotor

现只考虑涡轮盘转速和材料强度存在的随机性, 采用 FPI 方法计算该此时涡轮盘中 P 点的可靠度。经过 ANSYS 的 PDS 模块计算, 获知 P 点的应力 (单位: MPa) 基本服从正态分布 ($\mu_s = 1074.07$, $\sigma_s = 40.32$)。材料 500°C 时的 P - S - N 曲线如图 6 所示^[8], 根据该曲线, 对材料对数寿命及标准差进行拟合得:

$$h(S) = 12.087 - 0.00628S \quad (14)$$

$$u(S) = -0.11523 + 0.000728S \quad (15)$$

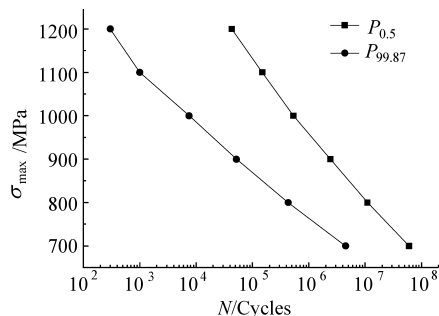


图6 500℃时材料P-S-N曲线

Fig. 6 Material P-S-N curves at 500°C

将应力分布参数及式(14)、(15)代入式(7)即可求得可靠度值。为校核计算结果的有效性,又采用传统的应力-强度干涉法做对比计算,计算结果如表1所示,由表可以看出,两种方法的结果是一致的,仅存在微小的数值误差;图7更为直观地显示了两种结果的一致性。计算过程中,FPI方法计算耗时3s,干涉模型法耗时46s,前者在计算速度上表现出较大的优势。

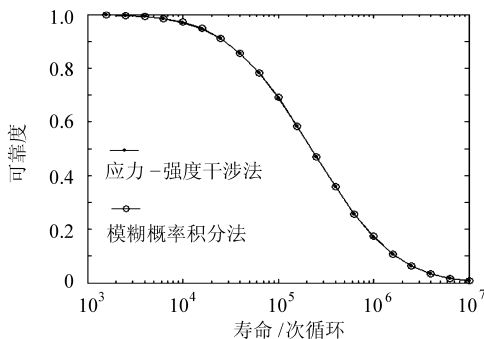


图7 可靠度计算结果

Fig. 7 Results of reliability evaluation

表1 可靠度计算结果

Table 1 Results of reliability evaluation

方法	寿命/次循环				
	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	10 ⁷
模糊概率积分法	0.9992	0.9676	0.6879	0.1785	0.0086
应力-强度干涉法	0.9985	0.9668	0.6872	0.1783	0.0085

3 总结

模糊概率积分(FPI)方法避免了应力-强度干涉模型法对等寿命强度分布的求解,为计算随机应力作用下的结构可靠度提供了一条新的途径;数值抽样技术更为FPI法在可能遇到多重积分困难时给出了一种近似计算结构可靠度的方法。最后给出的航空发动机涡轮盘结构算例,表明FPI方法与传统应力-强度干涉法的计算结

果是一致的,且计算速度更快;时至今日,复杂结构的结构可靠性计算仍然是一项非常在耗时的的工作,FPI方法的有效性和快速性使得该方法在实际计算中具有一定的优势,适合于在工程应用。

参考文献

- [1] Dixon W J, Mood A M. A method for obtaining and analyzing sensitivity data[J]. Journal of the American Statistical Association, 1948, 43: 109-126.
- [2] Weibull W. Fatigue testing and analysis of results[M]. London: Pergamon Press, 1961.
- [3] Tanaka T. Data base on fatigue strength and statistical distribution characteristics of fatigue life and fatigue strength [A]. Proc of Fatigue 84[C]. 1984, 15(5): 323-341.
- [4] 张骏华. 结构可靠性计算与分析[M]. 北京: 宇航出版社, 1989.
Zhang J H. Structure reliability evaluation and analysis [M]. Beijing: Aerospace Press, 1989. (in Chinese)
- [5] 傅惠民. 疲劳强度概率分布[D]. 北京: 北京航空航天大学, 1986.
Fu H M. Probability density function of fatigue strength [D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1986. (in Chinese)
- [6] Patel M, Nagpal K. Estimation of probability distribution of degraded material resistance and risk of failure under cyclic loading and high temperatures[R]. AIAA-2000-3104, 2000.
- [7] 胡毓仁, 陈伯真. 船舶及海洋工程结构疲劳可靠性分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 1996. 280-283.
Hu Y R, Chen B Z. Fatigue reliability analysis for ship and ocean engineering [M]. Beijing: China Communications Press, 1996. 280-283. (in Chinese)
- [8] 北京航空材料研究所. 航空发动机设计用材料数据手册(第二册)[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.
Beijing Institute of Aeronautical Material. Material handbook for aero-engine design (Vol. 2) [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1993. (in Chinese)

作者简介:

蒋向华(1976-) 男,北京航空航天大学博士研究生。E-mail: uniboy@buaa.edu.cn

杨晓光(1962-) 男,北京航空航天大学教授、博士生导师。主要研究方向为高温结构强度、热障涂层结构强度。E-mail: yxg@buaa.edu.cn



王延荣(1965-) 男,北京航空航天大学教授、博士生导师。主要研究方向为涡轮机械流固耦合振动、高温疲劳与断裂、CAE和可靠性工程。电话:(010)82316362, E-mail: yrwang@buaa.edu.cn

(责任编辑:李铁柏)