第 26 卷　第 1 期　　航 空 学 报　　Vol. 26 No. 1
2005 年　　1 月　　ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA　　Jan.　2005

文章编号:1000-6893(2005)01-0040-04

随机结构孤立特征值的统计特性

黄　斌, 瞿伟廉
(武汉理工大学 土木工程与建筑学院, 湖北 武汉　430070)

Statistics of Isolated Eigenvalues of Random Structures

HUANG Bin, QU Wei-lian
(School of Civil Engineering and Architecture, Wuhan University of Technology, Wuhan　430070, China)

摘　要: 研究了随机结构的孤立特征值问题。将材料物理量的随机场扩展为 K-L (Karhunen-Loeve) 正交展式,采用非正交多项式混沌展式表达孤立特征值,建立了和摄动法类似的一系列确定的递推方程,并通过确定性有限元方法求解了这些递推方程,得到了特征值的均值和方差。在算例中用蒙特卡洛方法验证了本方法的正确性。

关键词: 随机结构; 孤立特征值; K-L 正交展式; 非正交多项式混沌; 摄动法
中图分类号: V214.3$^+$3　　**文献标识码**: A

Abstract: A new random finite element method for solving eigenvalue problems involving material variability is given. The random material properties, such as the modulus of elasticity, are represented by Karhunun-Loeve expansion. Random structural eigenvalues are expressed as nonorthogonal polynomials chaos. With the aid of the finite element method, a set of deterministic recursive equations is set up to deal with eigenvalue problems through nonorthogonal polynomials of the same order. The statistics of eigenvalues is derived. A beam problem and a plate problem are investigated by the new method. The derived second-order statistics of eigenvalues is found in good agreement with those obtained by Monte-Carlo simulation.

Key words: random structure; isolated eigenvalue; Karhunen-Loeve expansion; nonorthogonal polynomials chaos; perturbation method

自从 20 世纪 70 年代 M. Shinozuka 等人研究了结构的随机特征值以来,这个问题就引起了国内外学者越来越多的关注。许多文献用蒙特卡洛方法、随机摄动法或两者的结合来研究随机特征值[1,2]。当采用直接的蒙特卡洛模拟方法时,如文献[1],则比较耗时,特别对大自由度系统更是如此。而采用摄动法或摄动随机有限元方法时,如文献[2],则只对具有小变异随机变量的问题有效,并且当随机场随机变量数量较多时,计算量也不小。文献[3,4]将随机有限元方法和蒙特卡洛模拟方法相结合,通常比直接的模拟法具有更高的效率,特别是文献[3]利用了正交的多项式混沌展式,从而可以更快地解决大变异随机变量的特征值问题。

和以上不同的是,本文采用非正交多项式混沌展式表达特征值,运用合并同类项,建立了和摄动法类似的一系列确定的有限元递推方程。通过求解这些递推方程,可以得到孤立特征值的统计特征表达式。该方法同样能解决较大变异随机变量的特征值问题,而且由于没有采用蒙特卡洛模拟而可节省大量的计算时间。在算例中用蒙特卡洛方法验证了本文方法的正确性和有效性。

1　随机场的 K-L 扩展

设 $R(x)$ 为关于坐标位置 x 的随机场, $\overline{R}$ 为其期望值,根据文献[5]将随机场 $R(x)$ 用如下的 K-L 正交展式表示

$$R(x) = \overline{R}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cdot \sqrt{\lambda_i} \Phi_i(x) \qquad (1)$$

式中: ξ_i 为零均值的正交随机变量,它可为任意分布; λ_i 和 Φ_i 分别是随机场协方差核的特征值和特征函数。当随机场采用上述谱分解时,可用较少的随机变量模拟随机场的概率特性,如果协方差核难于直接得到时,可采用离散的求解方法。

2　特征值的非正交多项式混沌展式

当采用摄动随机有限元方法求解孤立特征值问题时,它是将特征值表示为关于小变异随机变

收稿日期:2003-12-09; **修订日期**:2004-04-08
基金项目:国家自然科学基金(50208016)资助项目

量的摄动展开或泰勒展开,而文献[5]是以随机空间中的埃尔米特多项式为基函数将任意未知随机场展为多项式混沌,这种展式已由 Cameron-Martin 定理证明为二阶收敛的。需强调的是,这里的多项式混沌是指多项式的一种组合方式,和通常的非线性动力学中"混沌"概念不同。本文采用如下的非正交多项式的混沌展式表示随机场

$$S(x) = a_0(x)\phi_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1}(x)\phi_1(\xi_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2}(x)\phi_2(\xi_{i_1},\xi_{i_2}) + \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{i_1}\sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3}(x)\phi_3(\xi_{i_1},\xi_{i_2},\xi_{i_3}) + \cdots \quad (2)$$

非正交多项式 $\phi_n(\cdot)$ 的前三阶量可以写为

$$\phi_0 = 1$$
$$\phi_1(\xi_{i_1}) = \xi_{i_1}$$
$$\phi_2(\xi_{i_1},\xi_{i_2}) = \xi_{i_1}\xi_{i_2}$$
$$\phi_3(\xi_{i_1},\xi_{i_2},\xi_{i_3}) = \xi_{i_1}\xi_{i_2}\xi_{i_3}$$

这里的非正交是相对正交而言的,即不同的多项式基的乘积经加权求积分后不再等于零。

3　特征值问题的求解

相对于确定的特征值问题,这里假设结构材料性质的物理量为空间随机场,那么利用 K-L 正交展式,该结构相应的随机刚度矩阵可由下式表示

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_0 + \sum_{i=1}^{n}\xi_i \mathrm{K}_i \quad (3)$$

式中:K_0 为均值弹模对应的结构刚度矩阵;K_i 为和式(1)右边第 2 项相应的刚度矩阵。参照式(2),随机特征值的非正交多项式混沌展式为

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n}\xi_i\lambda_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\xi_i\xi_j\lambda_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}\xi_i\xi_j\xi_k\lambda_{ijk} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}\sum_{l=1}^{k}\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l\lambda_{ijkl} + \cdots \quad (4)$$

将式(4)中特征值符号 λ 换成 x,就为特征向量的展式。

将以上展式带入特征值方程 $(\mathrm{K} - \lambda\mathrm{M})\mathrm{x} = 0$,按照 ξ_0, ξ_i, $\xi_i\xi_j$, $\xi_i\xi_j\xi_k$ 和 $\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l$ 项获得一系列递推方程。合并同类项后,首先可以得到对应 ξ_0 项的方程

$$(\mathrm{K}_0 - \lambda_0\mathrm{M})\mathrm{x}_0 = \mathbf{0} \quad (5)$$

对应 ξ_i 项,有

$$\mathrm{K}_0\mathrm{x}_i + \mathrm{K}_i\mathrm{x}_0 - (\lambda_0\mathrm{M}\mathrm{x}_i + \lambda_i\mathrm{M}\mathrm{x}_0) = \mathbf{0}\ (i = 1, \cdots, n) \quad (6)$$

于是得到下面一阶展式系数的表达式

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_i = \mathrm{x}_0^{\mathrm{T}}\mathrm{K}_i\mathrm{x}_0 \\ &(\mathrm{K}_0 - \lambda_0\mathrm{M})\mathrm{x}_i = -(\mathrm{K}_i - \lambda_i\mathrm{M})\mathrm{x}_0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

为了消除式(7)中第 2 式左边矩阵 $(\mathrm{K}_0 - \lambda_0\mathrm{M})$ 求逆时的奇异性,还要考虑如下根据模态归一化而加的补充方程

$$\left(\mathrm{x}_0 + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i\xi_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\mathrm{x}_{ij}\xi_i\xi_j \cdots\right)\cdot M \cdot\left(\mathrm{x}_0 + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i\xi_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\mathrm{x}_{ij}\xi_i\xi_j + \cdots\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{I} \quad (8)$$

如果要求 $\mathrm{x}_0\mathrm{M}\mathrm{x}_0^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}$ 时,可有下式成立

$$\mathrm{M}\mathrm{x}_0\mathrm{x}_0^{\mathrm{T}}\mathrm{M} = 0 \quad (9)$$

于是在式(7)中第 2 式左边加入 $\lambda_0\mathrm{M}\mathrm{x}_0\mathrm{x}_0^{\mathrm{T}}\mathrm{M}$ 项后得到[6]

$$\mathrm{x}_i = -(\mathrm{K}_0 - \lambda_0\mathrm{M} + \lambda_0\mathrm{M}\mathrm{x}_0\mathrm{x}_0^{\mathrm{T}}\mathrm{M})^{-1}\cdot(\mathrm{K}_i - \lambda_i\mathrm{M})\mathrm{x}_0 \quad (10)$$

然后,由对应 ξ_{ij} 项的方程可得

$$\lambda_{ij} = \mathrm{x}_0^{\mathrm{T}}[(\mathrm{K}_i\mathrm{x}_j + \mathrm{K}_j\mathrm{x}_i)(1 - \delta_{ij}/2) - (\lambda_i\mathrm{M}\mathrm{x}_j + \lambda_j\mathrm{M}\mathrm{x}_i)(1 - \delta_{ij}/2)] \quad (11)$$

$$\mathrm{x}_{ij} = (\mathrm{K}_0 - \lambda_0\mathrm{M} + \lambda_0\mathrm{M}\mathrm{x}_0\mathrm{x}_0^{\mathrm{T}}\mathrm{M})^{-1}\cdot[\lambda_{ij}\mathrm{M}\mathrm{x}_0 - (\mathrm{K}_i\mathrm{x}_j + \mathrm{K}_j\mathrm{x}_i)(1 - \delta_{ij}/2) + (\lambda_i\mathrm{M}\mathrm{x}_j + \lambda_j\mathrm{M}\mathrm{x}_i)(1 - \delta_{ij}/2)] \quad (12)$$

这里 $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, i$;同样式(12)中已考虑了补充方程。

同理可以得到关于 $\xi_i\xi_j\xi_k$, $\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l$ 等项的一系列确定的递推方程。需要注意的是,上面求解特征值扩展系数的处理方法和摄动法是类似的,不同点在于本文方法可处理大变异随机变量的情况,这是因为前面随机场的离散没有限制随机参数的变异性,而且特征值的非正交多项式展式又是二阶收敛的。由于在随机特征值问题中,很难对随机特征值方程在正交混沌基上投影后求期望,文献[3]不得不结合蒙特卡洛方法求解,但这将增加计算的工作量。在按以上步骤求得特征值展开的系数项后,可以方便获得特征值的均值和方差。

4　算　例

(1)考虑两端固支梁(图 1),长 $L = 6\mathrm{m}$,分布质量 $m = 1000\mathrm{kg/m^3}$,设其截面抗弯刚度为高斯分布的随机场,截面抗弯刚度的均值 $\overline{EI} = 1\mathrm{kN/m^2}$,其归一化协方差函数为指数型:$C(x_1, x_2) = \sigma^2 e^{-|x_1 - x_2|/l}$,其中 $l = 1\mathrm{m}$。

图1 两端固支的随机梁

Fig. 1 Random beam with two end clamped

首先将梁划分为12个单元,每个节点含有挠度和扭转2个自由度。根据前面,截面抗弯刚度随机场的K-L正交展式取前4项已足够,并在此基础上利用本文方法和蒙特卡洛方法对梁的振动特征值进行了求解。图2、图3显示了一阶特征值均值与均方差随抗弯刚度变异系数变化的结果。从图中可看出,本文的方法和蒙特卡洛模拟法的结果较为吻合,这验证了本文方法的正确性。

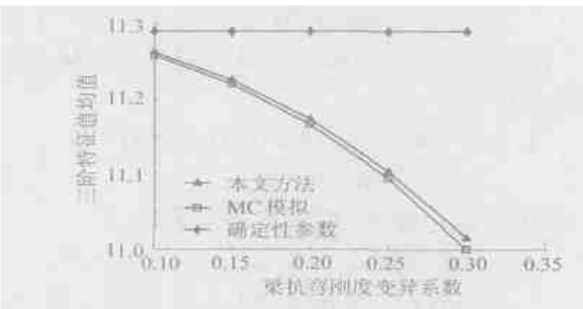

图2 三阶特征值均值与变异系数关系

Fig. 2 Relationship between mean of the three order eigenvalue and coefficient of variation

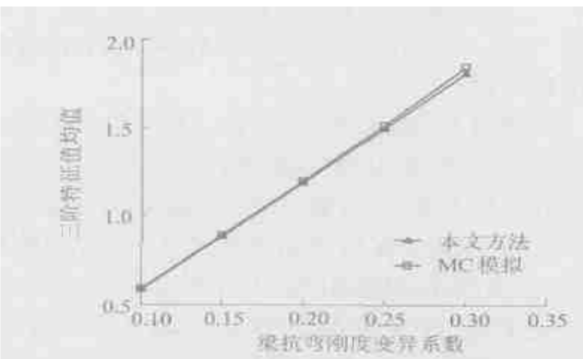

图3 三阶特征值均方差与变异系数关系

Fig. 3 Relationship between variance of the three order eigenvalue and coefficient of variation

(2) 考虑四边固支的正方形薄板弯曲自由振动问题(图4)。板的边长为3m,厚度0.1m,泊松比为0.3,假设薄板的弹性模量为随机场,其均值为10^5kN/m^4,其归一化协方差函数为指数型:

$$C(x_1,y_1;x_2,y_2)=\sigma^2 e^{-(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|)/l}$$

其中 $l=1$m。将薄板划分为144个单元,每个节点含有竖向挠度和两个方向扭转3个自由度。

由于本例板的对称性而出现重特征值,这里只给出了板一阶特征值的统计结果。图5、图6结果显示,本文的方法和蒙特卡洛模拟法的结果吻合很好,再次验证了本文方法的正确性。

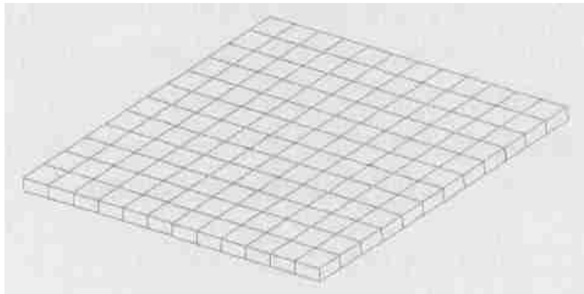

图4 四边固支的随机方形薄板

Fig. 4 Random plate with four side clamped

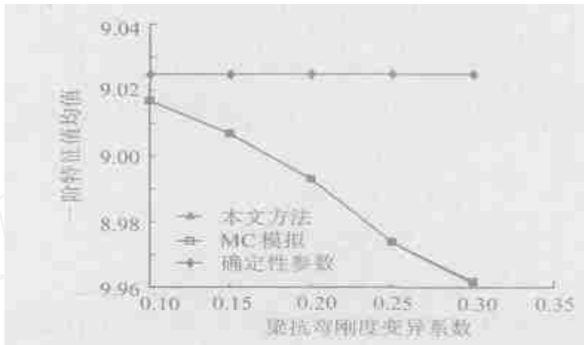

图5 一阶特征值均值与变异系数关系

Fig. 5 Relationship between mean of the first order eigenvalue and coefficient of variation

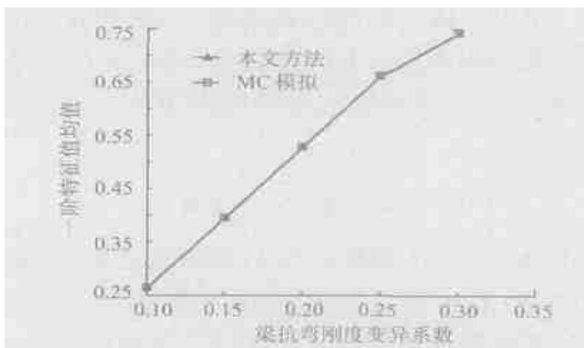

图6 一阶特征值均方差与变异系数关系

Fig. 6 Relationship between variance of the first order eigenvalue and coefficient of variation

5 结 论

本文将材料物理量随机场表示为K-L正交展式,采用非正交多项式混沌展式表达孤立特征值,运用合并同类项,建立了和摄动法类似的一系列确定的有限元递推方程,从而得到了孤立特征值的统计特征。和随机摄动法相比,本文方法在计算理论上并没有限制结构随机参数变异性的大小。和文献[6]相比,本文利用了递推方程的求解特点和随机函数中随机量的概念,将随机特征值

方程的求解顺利地转化成了确定性方程的求解。在梁和固支方板的算例中,本文方法和蒙特卡洛模拟的结果吻合较好,这验证了本文方法的正确性;同时算例结果也显示,本方法同样能解决较大变异随机变量的特征值问题。该方法由于没有采用蒙特卡洛模拟而节省了大量计算时间。

参 考 文 献

[1] Shinozuka, M, Astill J. Random eigenvalue problem in Structural Mechanics[J]. AIAA Journal, 1972, 10(4): 456 - 462.

[2] 朱位秋,吴伟强. 基于随机场局部平均的随机有限元法在实特征值问题中的应用[J]. 航空学报,1989,10(2):20 - 26.
Zhu W Q, Wu W Q. Applications of stochastic FEM based on the local average of random field in random eigenvalue problems[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1989, 10 (2):20 - 26. (in Chinese)

[3] Ghanem R, Red-Horse J R, Sarkar A. Modal properties of space-frame with localized system uncertainties[A], 8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic and Structural Reliability [C]. 2000. 266 - 270.

[4] Pradlwarter H J, Schuëller G I, Székely G S. Random eigenvalue problems for large systems[J]. Computers and Structures, 2002, 80: 2415 - 2424.

[5] Ghanem R, Spanos P. Stochastic finite elements: a spectral approach[M]. Springer-Verlag, 1991.

[6] 胡海昌. 多自由度结构固有振动理论[M],北京:科学出版社,1987.
Hu H C. Natural vibration theory of structures with multiple degrees of freedom [M]. Beijing: Science Press, 1987. (in Chinese)

作者简介:

黄 斌(1968 -) 男,湖北人,武汉理工大学工程结构振动研究中心副教授,博士,1999 年毕业于华中理工大学土木系,主要从事随机结构力学与防灾减灾工程的研究。

(责任编辑:李铁柏)