

文章编号: 1000-6893(1999)06-0498-04

# 混沌时序的噪声降低技术研究

余建祖, 苏楠

(北京航空航天大学 飞行器设计及应用力学系, 北京 100083)

## NOISE REDUCTION METHOD FOR CHAOTIC TIME SERIES

YU Jian-zu, SU Nan

(Dept. of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics,

Beijing Univ. of Aero. and Astro., Beijing 100083, China)

**摘 要:** 介绍了噪声对混沌时序分析的影响, 回顾了混沌时序噪声降低方法的研究情况。在此基础上将 Takens 的嵌入理论拓展应用到具有噪声干扰的时间序列, 并结合非线性信号处理和非线性近似函数技术, 提出了一种把重构相空间同降低噪声干扰相结合的理论方法和处理技术, 并以受噪声污染的 Henon 映象时间序列为例, 说明了有关概念和应用结果。

**关键词:** 混沌; 时间序列; 噪声降低

**中图分类号:** O414.2; TH701 **文献标识码:** A

**Abstract:** The effects of noise on chaotic time series analysis were introduced and the previous studies associated with the noise reduction in chaotic time series data were reviewed as well. Moreover, extending Taken's Embedding Theorem to the time series in the presence of the noise and incorporating the techniques for nonlinear signal processing and nonlinear approximating functions, the authors raised a novel scheme for noise reduction in chaotic time series. As an example of noisy time series data, Henon time series were used to illustrate the underlying concepts.

**Key words:** chaos; time series; noise reduction

人类的科学实验和生产活动, 都离不开对信号(或数据)的检测和处理。例如, 在一个典型的实验中, 实验人员可以得到从一个或多个传感器输出的随时间变化的参数, 这些参数构成时间序列。在时间序列中不可避免地会包含有噪声, 包括系统噪声和观测噪声(或称为内部噪声和外部噪声)。研究表明, 观测噪声对混沌行为的影响和破坏, 要比系统噪声严重得多<sup>[1]</sup>。观测噪声直接干扰观察和测量, 它掩盖信号的真实性从而造成混乱和误解。本文主要研究观测噪声的降低技术研究。

为降低噪声水平, 提高从时间序列中获取信息的能力, 在对实验数据作进一步分析前, 须将其进行滤波或用其它方法进行预处理。一个常规的方法就是利用傅里叶分析, 把噪声视为一个高频分量集并从输入数据的功率谱(或傅里叶变换)中去掉它们。然而当数据是混沌态时, 功率谱分析用于描述动力学特性是不充分的。因为一个低维混沌信号的功率谱与噪声的功率谱相似, 某些频率的抑制可能改变滤波后的输出信号的动力学特

性。例如: 采用简单的低通滤波器, 会引入一个依赖于截止频率的附加的 Lyapunov 指数<sup>[2]</sup>; 如果截止频率充分低, 那么滤波器会增加重构吸引子的分维数。因此混沌系统抑制噪声问题变得更加复杂。

传统的信号处理是局限于基本线性假设的。然而现实世界的实际系统是非线性系统, 出现混沌和分岔是很普遍的现象。当实验数据是混沌序列时, 必须采用非线性和动力学的方法来进行处理才能获得好的降噪效果。

### 1 混沌时序的噪声降低概述

混沌时序噪声降低问题国外目前主要是从 3 个途径着手研究的: ① 利用影子性质; ② 流动平均数—最大似然估计法; ③ 重构吸引子。

影子定理: 混沌动力系统中在非精确的轨迹旁总存在一条精确的轨迹。

Hammel<sup>[3]</sup> 据此提出了一个用影子降噪的方法。他令  $\{x_k\}_{k=0}^N$  代表真实(无噪声)轨迹并满足映象  $x_{k+1} = f(x_k)$ ,  $0 \leq k \leq N-1$ , 令  $\{p_k\}_{k=0}^N$  代表混合轨道,  $p_k = x_{k+1} + G$ ,  $\|G\| < D$  代表附加噪

声(由测量或舍入(截断)误差产生), 这样他把降噪问题转化为找出一个靠近  $\{p_k\}_{k=0}^N$  且具有较小噪声的轨道(即影子轨道)的问题。

Farmer 和 Sidorowich<sup>[4]</sup> 采用求流动平均数—最大似然估计的标准方法来减弱噪声。其原理是: 为了在时刻  $t$  产生较小噪声值, 通过对过去点的观测值  $x_{t-1}$  采用非线性映象  $f$  (向前推) 获得一个新值  $x_t$ ; 再通过对将来点的观测值  $x_{t+1}$  采用逆映象  $f^{-1}$  (向后拉) 产生新值  $x_t$ , 然后取  $x_t$  和  $x_t$  的平均值而获得净化值  $x_t$ 。多次重复上述过程可获得满意的干净轨道。

Kostelich 和 Yorke<sup>[5]</sup> 提出的重构吸引子的方法是根据预测时间序列的局部近似法的相同原理。假定有一可观察量  $s(t)$ , 在一个  $2d+1$  维的嵌入空间中重构其轨迹。对吸引子上每个参考点  $x$  定义一个邻域, 并设在该邻域内映象  $f$  近似是线性的, 即

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n + b \quad (1)$$

这种方法采用局部线性近似并结合最小二乘法, 通过多次迭代, 来逼近吸引子的动力学特性, 以获得干净的轨道。

上述 3 种降噪方法中, 前两种需要知道映象  $x_{n+1} = f(x_n)$ , 即要求知道产生混沌时序的动力学系统的精确模型, 这一点实际上是很难做到的。换句话说, 作者回避了如何从原始信号的离散采样值拟合出重构吸引子的非线性映象的精确形式这一困难问题。

第 3 种方法不必需要知道映象  $f$ , 但它假定映象是线性的, 即  $x_{n+1} = f(x_n) = ax_n + b$ , 它采用了局部线性近似法。其过分简化的线性化处理未能充分刻画混沌时序的非线性动力学特性, 因而导致较大误差。此外, 这种方法需要较庞大的数字单元和计算时间。

本文将 Takens 的嵌入理论拓展应用到具有噪声干扰的时间序列, 并结合非线性信号处理及近似函数技术, 探索一种把重构相空间同降低噪声干扰相结合的理论方法和处理技术, 以保证混沌时间序列的分析、预测和其它混沌理论研究和工程应用问题的有效性和准确性。

## 2 从时序数据中提取动力学特性

一个物理系统通常存在于一个无限维空间, 然而其长期行为有可能归属于一个有限维吸引子, 而在实验过程中, 往往根据测量数据只能得到一维的时间序列

$$\{x_n\} = \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \quad (2)$$

其中  $N$  很大。

如何从  $\{x_n\}$  所提供的信息, 获得对应未知动力系统的近似模型呢?

非线性动力学的研究指出: 动力系统的任一分量是由与之相互作用的其它分量决定的, 这些相关分量的信息隐含在任一分量的发展过程中。Takens 据此提出了他的“嵌入理论”: 从一个有限自由度的动力系统所获得的典型时间序列, 存在某个有限整数  $m$  和一个函数  $F$ , 满足

$$x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m+1}) \quad (3)$$

且由  $F$  产生的动力学特性等同于形成序列  $\{x_n\}$  的动力系统特性。式中整数  $m$  即是嵌入维, 且  $m \leq 2d+1$ <sup>[6]</sup>,  $d$  是动力系统的维数(状态变量数)。与式(1)中传统的线性自回归模型  $f$  不同, 式(3)中  $F$  是  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m+1}$  的非线性组合。以一个著名的二维系统——Henon 映象为例来予以说明:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \quad (4a)$$

$$y_{n+1} = bx_n \quad (4b)$$

Henon 映象混沌态典型参量取值为  $a=1.4$ ,  $b=0.3$ 。图 1 所示为  $\{x_n\}$  取 1000 个值的图象。如果知道状态  $(x_n, y_n)$ , 则利用方程(4)可得到  $x_{n+1}$  和  $y_{n+1}$ , 但是我们假定仅仅只观测到  $\{x_n\}$ , 未获得  $\{y_n\}$  的消息。在这种情况下, 为达到模拟动力学特性的目的, 通过将方程(4b)代入(4a), 消去  $y_n$  而

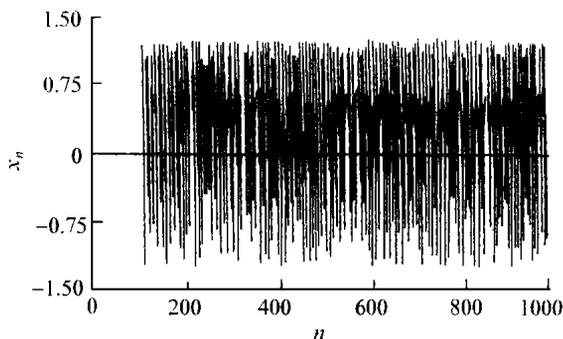


图 1 由无噪声污染的 Henon 映象得到的时间序列  $\{x_n\}$  (头 100 个值未示出)

得到

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + bx_{n-1} \quad (5)$$

由此得到一个对应序列  $\{x_n\}$  的二阶非线性自回归模型。根据方程(5), 可由  $x_0$  和  $x_1$  的消息获得和预测序列  $\{x_n\}$ , 并可进一步利用有关  $x_n$  的先前的信息(即  $x_{n-1}$  的值)来取代另一个状态变量  $y_n$  的消息。

对 Henon 映象 ( $d=2$ ), 由于  $y_{n+1}$  明显地依赖于  $x_n$ , 因而嵌入维  $m=2$  已可充分满足。但对一般典型的二维映象, 一个序列中可最多需要 5 个相邻的数据以确定该序列中下一个数据。

Takens 的嵌入理论提供了一种根据时间序列可重构相空间并找出奇怪吸引子的思想。但可惜的是, 他的理论只是肯定了嵌入维  $m$  及映象  $F$  的存在, 而没有提供求  $F$  和  $m$  的方法。本文随后将介绍如何利用标准非线性近似技术估算  $F$ , 并通过相关维  $D_c$  的计算以鉴别混沌并计算  $m$ 。

### 3 混沌识别

对于一个给定的复杂时间序列  $\{x_n\}$ , 如何知道它是来源于一个确定的混沌系统, 还是来源于一个纯随机过程呢? 这即是要判断是否出现混沌的问题。这个问题原则上可以通过计算 Lyapunov 指数  $K$  或相关维 (Correlation dimension)  $D_c$  来确定。由于相关维  $D_c$  的实际计算要简单些并且易于找出和嵌入维  $m$  的关系, 所以拟通过计算相关维  $D_c$  来判断是否出现混沌现象并计算嵌入维  $m$ 。

从标量序列  $\{x_n\}$  可构造出矢量序列  $T_n = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m+1})$ 。而相关维旨在测量在  $m$  维空间中点  $\{T_n\}$  所在集合的维数, 因而总有  $0 \leq D_c(m) \leq m$ 。相关维的定义式是

$$D_c = \lim_{E \rightarrow 0} \frac{\log C(E)}{\log E} \quad (6)$$

式中:  $C(E) = N(E)/N^2$ , 其中  $N(E)$  表示当把所研究点系的有限采样值  $\{T_1, \dots, T_N\}$  组成  $N^2$  个点  $(T_i, T_j)$  时, 其中彼此距离在  $E$  范围内的点对数。

从几何意义上讲, 画出  $\log C(E)$  相对  $\log E$  的关系曲线然后求其斜率, 即得  $D_c$  值。

由于嵌入时间序列所需要的  $m$  值实际上是未知的, 因此须选择不同的  $m$  值, 计算相关维  $D_c(m)$ 。当  $m$  太小时, 点集  $\{T_n\}$  将完全充满嵌入空间, 此时可得到  $D_c(m) \mu m$ 。但是只要  $m$  充分大, 所计算  $D_c(m)$  将稳定在动力系统的实际相关维值上。例如, 对上述 Henon 映象, 可得  $D_c(1) \mu 1$  及  $D_c(2) \mu D_c(3) \mu D_c(4) \mu 1.21$ , 此即 Henon 吸引子的正确维数。

$D_c$  是非整数, 就如同 Lyapunov 是正数一样, 是混沌的标志。

如果发生  $D_c(m)$  继续随  $m$  增大的情况, 这即表明时间序列  $\{x_n\}$  是由真正的随机过程产生, 而不是由确定混沌系统产生。对如白噪声这样的随机过程, 可求得  $D_c = \infty$ ; 相反, 对正规周期时间序

列有  $D_c = 0$ 。概括地说, 随着  $D_c$  的增加, 将会看到愈来愈复杂的系统行为。

以上计算  $D_c$  的程序可得到一个副产品, 即得到能充分代表系统动力学特性的最小嵌入维。

### 4 利用非线性近似技术逼近与混沌时序相符的动力系统

在  $m$  值确定后, 下一步的工作即是构造一个被嵌入的动力学特性模型。换句话说, 即是要构造一个近似函数  $\tilde{F}$ , 逼近  $F$  [ $F$  满足  $F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m+1}) = x_{n+1}$ ]。可能用的近似技术有: <sup>1</sup> 全局近似技术 (Global approximation techniques); <sup>0</sup> 局域近似技术 (Local approximation techniques);  $\gg$  径向基准函数 (Radial basis functions) 等。

仍以 Henon 映象为例, 说明方法 $\gg$ , 即径向基准函数近似技术的应用。

对 Henon 映象, 因  $m=2$ , 这样要找出一个两变量函数  $F(X, Y)$ , 在  $X = X_n, Y = X_{n-1}$ , 对所有的  $n$ , 其值为  $x_{n+1}$ 。在这个特殊例子中, 碰巧已知  $F(X, Y) = 1 - aX^2 + bY$  ( $a = 1.4, b = 0.3$ ), 现在假定尚不知道这个函数式, 仅仅只被给予采样时序  $\{x_n\}$ 。

显然, 可用三维空间中表面  $Z = F(X, Y)$  来表示  $F$ 。如果对所有的  $n$  值, 取时间序列并画出点  $(X, Y, Z) = (x_n, x_{n-1}, x_{n+1})$ , 那么他们将全部落在这个表面上。因此所寻求的近似函数  $\tilde{F}$  即相当于要发现一个通过 (或至少是接近) 所有采样点  $(x_n, x_{n-1}, x_{n+1})$  的平滑表面。

径向基准方法将这个平面近似为

$$\tilde{F}(X, Y) = \sum_{i=1}^{N-1} K U[(X - x_i)^2 + (Y - x_{i-1})^2]^{1/2} \quad (7)$$

式中:  $\{x_0, \dots, x_N\}$  是已知的时序采样值;  $K$  是未知参数;  $U(r)$  即是径向基准函数。为方便起见, 可取  $U(r) = (r^2 + c)^{1/2}$ ,  $c$  是一个大于 0 的常数。 $K$  的值由  $F(x_n, x_{n-1}) = x_{n+1}$  的必要条件确定, 由此得线性矩阵方程

$$z = 5 + \quad (8)$$

式中:  $z$  是矢量  $z = (x_2 \dots x_N)$ ;  $5$  是矩阵, 其第  $(i, j)$  项是  $5_{ij} = U(r_{ij})$ , 此处  $r_{ij}$  是点  $(x_i, x_{i-1})$  和  $(x_j, x_{j-1})$  之间的几何距离;  $+$  是矢量  $+= (K, \dots, K_{N-1})$ 。可利用解线性方程的任何标准方法, 通过  $5$  的逆变换, 解方程 (8) 而求出  $+$ 。

对图 1 中全部 Henon 时间序列, 直接用实际的时间序列数据对  $(x_n, x_{n-1})$  向前预测一个时间

步长(称为一步预测法),然后同正确值  $x_{n+1}$  比较,所得相对预测误差如图2所示。由图可看出,采用径向基准函数的方法,可获得非常精确结果,各处相对误差小于  $10^{-4}$ 。

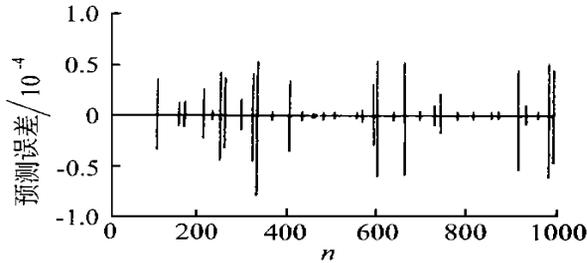


图2 Henon 时间序列一步预测的误差

## 5 降噪算法及其应用结果

在大多数实际应用场合,不大可能获得如图1所示纯混沌信号,而是要处理由混沌时序  $\{x_n\}$  和噪声  $\{s_n\}$  叠加而成的混合信号  $p_n = x_n + s_n$ 。

降噪算法可归结为分解混合信号  $\{p_n\}$  成2个分量:混沌时序  $\{x_n\}$  和噪声  $\{s_n\}$ ,并使  $\{s_n\}$  极小化。这可通过前面提到的“流动平均数法”(Moving Average(MA))来实现;也可通过“一步预测法”(One Step Prediction)来完成,如对二维系统可通过减小差值  $\tilde{F}(p_n, p_{n-1}) - p_{n+1}$  来降低  $\{s_n\}$ ;或是通过定义一个与状态协方差成比例的畸变矩阵(Distortion Matrix),并找出一个合适的把畸变与噪声幅值换算的规律(Scaling Law),那么通过减小畸变即可降低噪声。

本文采用如图2所示的一步预测并检验误差值  $e_n = \|\tilde{F}(p_n, p_{n-1}) - p_{n+1}\|$ ,如果噪声  $s_n, s_{n-1}$  和  $s_{n+1}$  的值偏大,则误差值  $e_n$  也偏大;反之,如果  $s_n$  的各项值均是零,  $e_n$  则可忽略不计(如图2)。进行数值试验的结果也的确如此,因而可由误差  $\{e_n\}$  估算噪声  $\{s_n\}$  的值。

作为上述降噪算法的应用实例,把2.5%噪声加到图2所示的  $\{x_n\}$  信号上去,所得被噪声污染的轨道如图3所示( $N = 10\ 000$ )。采用降噪算法后已被“简洁”的轨道表示在图4中。可以看出,图4中所刻划 Henon 吸引子的流形结构是明显的。

本方法的降噪效果明显优于传统的线性信号处理技术(如线性自回归和流动平均数法等)。而且有意义的是,在一定范围内,这种方法的效果是随着混沌时序信噪比的减小而增加的。

最后要说明的是,整个径向基准函数的结构及上述降噪方法,可以很方便地扩展到嵌入维  $m$

$> 2$  的情况。可从混沌时序构成若干  $m$  维中心点  $(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-m+1})$ ,而方程(7)中  $U$  的自变量  $r$  则是想要计算  $F$  值的点与相关中心点之间的距离。

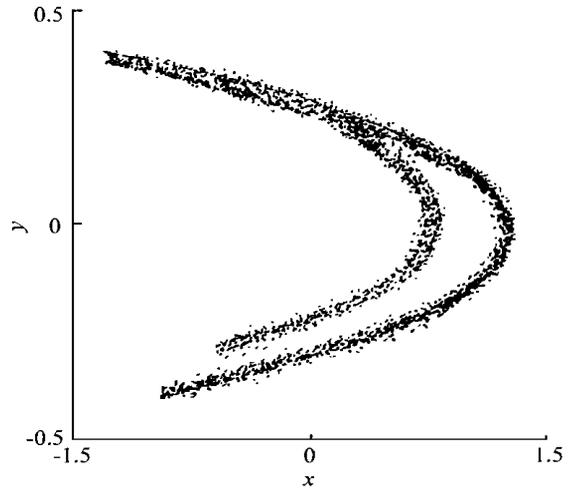


图3 被噪声污染的 Henon 映象的轨道

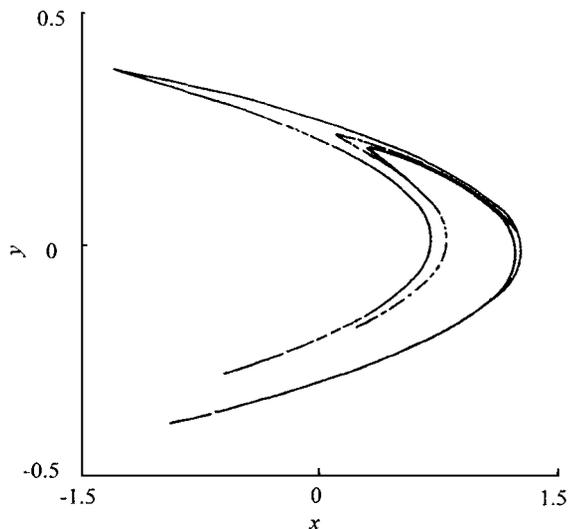


图4 经过噪声降低处理后的 Henon 映象的轨道

## 6 结论

本文利用 Takens 的嵌入理论,结合非线性信号处理及非线性近似函数技术,提出了一种把从混沌时序数据构造非线性预测模型同降低噪声干扰相结合的有效方法。

本文研究成果不仅对混沌时序的分析和行为预测具有重要作用,而且还可扩展到其它领域。例如:机械装置的振动监控或探伤(裂纹的形成会导致所观测时间序列的细微变化);在通信系统中用于减弱噪声以加强对一些微弱信号的检测(多程信号传播往往具有混沌动力学特性);与此

类似, 可用在声纳和雷达系统中提高信噪比。随着混沌理论研究和工程实际应用问题的提出, 混沌系统噪声降低技术的研究将会越来越受到学术界的普遍重视。

**致谢** 感谢美国亚利桑那大学 T. L. Vincent 教授提供的帮助。

### 参 考 文 献

- [1] Tetsuya Kawata, Takchiko Horita, Saburo Terachi, et al. Effect of noise on chaotic behavior in roessler-type nonlinear system[J]. International Journal of Intelligent Systems. 1997, 12: 341~357.
- [2] Badll R, et al. Dimension increase in filtered chaotic signals[J]. Phys Rev Lett, 1988, 60: 979~983.
- [3] Hammel S M. A noise reduction method for chaotic system

[J]. Phys Lett, A, 1990, 148(8, 9): 421~428.

- [4] Farmer J D, Sidorowich J J. Optimal shadowing and noise reduction[J]. Physica D, 1991, 47: 373~392.
- [5] Kostelich E J, Yorke J A. Noise reduction: finding the simplest dynamical system consistent with the data[J]. Phys D, 1990, 41: 183~196.
- [6] 刘秉正. 非线性动力学与混沌基础[M]. 长春: 东北师范大学出版社, 1994. 161~162.

作者简介:



**余建祖** 男, 55岁, 教授, 1967年毕业于北京航空学院。研究方向为: 传热传质, 环境控制, 混沌理论应用等。发表论文和科技报告50余篇。曾主持或作为主要完成人共完成型号项目、国防预研项目、基金项目十余项, 获国家科技进步三等奖2项, 部级科技进步一等奖2项。联系电话(010)82314687。

## 中国航空学会第二届青年电子技术 学术交流会在北京召开

由中国航空学会、北京航空航天大学、陕西省航空学会、江苏省航空学会、中国人民解放军装备指挥技术学院联合召开的中国航空学会第二届青年电子技术学术交流会于1999年7月25日至28日在北京怀柔举行。中国航空学会王玉春副秘书长、中国航空工业第一集团公司科技发展部张聚恩副部长、中国航空工业第二集团科技发展部徐炳伦副部长出席会议并发表了讲话, 航空学会电子分会主任翟春惠致开幕词, 并对航空电子的发展动向发表了意见。参加会议的有来自国内高等院校、科研院所等单位的55名代表和来宾, 其中博士生、硕士生占了多数。

参加会议宣读和书面交流的论文共53篇, 参会代表对交流的论文进行了认真热烈的交流和讨论。会议经投票及专家评审评选出青年优秀论文两篇, 上报总会审批。会议期间许多同志对交流和如何发展航空电子以及如何开展青年电子技术学术交流会提出了许多宝贵意见。

1. 电子信息技术属高技术领域, 对国家经济综合实力和军事实力的增强具有极为重要的作用, 航空电子对发展航空工业及提高军事装备综合效能具有支撑作用。因此, 必须重视航空电子的发展, 加大投资力度, 集中力量, 突破关键技术, 并形成中国自己的航空电子装备的制造业。

2. 大力发展航空电子事业, 一个极为重要的问题就是迅速培养和造就航空电子专业人才。培养高层次优秀人才、培养跨世纪高素质创新人才是我们面临的战略任务。参会代表认为, 召开青年电子技术交流会是鼓励青年一代脱颖而出的好形式。建议今后有关部门应大力支持青年一代的学术交流会, 支持青年人参加学术交流活动, 在学术交流会上专门设置青年优秀论文评选, 鼓励青年人自己承办青年学术交流会议。

3. 会议建议航空学会青年电子技术学术交流会二年举行一次, 第三届青年电子技术学术交流会拟在2001年举行, 承办单位由电子分会负责协调。

(李铁柏)