

文章编号: 0000-6893(1999)94-0358-04

# 频域不确定性系统加权混合灵敏度函数频域整形

王 曦, 曾庆福

(西北工业大学 数据处理中心, 陕西 西安 710072)

## FREQUENCY SHAPING OF MIXED WEIGHTED SENSITIVITY FUNCTION FOR FREQUENCY UNCERTAINTY SYSTEMS

WANG Xi, ZENG Qing-fu

(Data Processing Center, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**摘 要:** 针对输出端乘性不确定性系统如何决定加权混合灵敏度函数的问题, 将来源于经典控制理论的频域回路成形法推广到多变量混合灵敏度  $H$  控制设计中, 提出了带宽可调的加权函数频域整形的公式化构造法, 使频域  $H$  控制设计中可同时兼顾和折衷时域和频域性能指标, 并通过调整带宽可改善控制系统的性能。所述方法在某型双转子涡轮喷气发动机气动热力学非线性模型上对抗干扰性和目标跟踪进行了仿真验证。

**关键词:** 频域不确定性系统; 鲁棒稳定性; 加权混合灵敏度函数; 带宽; 航空发动机控制

中图分类号: V 249.12 文献标识码: A

**Abstract** This paper focuses on the problem of determining the mixed weighted sensitivity function for the plant uncertainty with multiplicative output perturbation, extends the loop-shaping approach derived from classical control theory to the control design of the multivariable mixed weighted sensitivity, and presents a constructed method of the equation with an adjustable bandwidth for the frequency shaping of the weighted function which can trade-off the design specifications between time and frequency domains. It is shown that the performance of a control system can be improved by means of tuning the bandwidth. Simulations on the nonlinear model of the twin-spool turbojet engine aerothermodynamics are conducted to verify the disturbance rejection and tracking performance.

**Key words:** frequency uncertainty systems; robust stabilization; mixed weighted sensitivity function; bandwidth; aeroengine control

混合灵敏度  $H$  优化法是一种多变量鲁棒控制器设计的有效方法之一。Safonov<sup>[1]</sup>在1988年最早将这一成果成功地应用于飞控系统中。随后, 许多文献报道了这一设计法在飞控系统和航空发动机控制系统的研究成果。然而, 确定加权函数这一关键技术在很大程度上依赖于设计者的经验, 应用  $H$  方法的主要难点在于怎样将闭环性能指标要求表示在结构尽量简单的加权中<sup>[2]</sup>, 基于此, 本文探讨了加权函数一般化构造的可能性。

### 1 频域不确定性系统分析

分析图1所示的频域不确定性反馈控制系统的鲁棒稳定性问题。图中  $r$  为参考输入;  $d$  为干扰输入;  $n$  为噪声输入;  $y$  为控制输出;  $e$  为控制误差;  $u$  为控制器输出;  $m$  为未建模动态输入, 定义被控对象的集合为

$$M(P_0, W_m) = \{P(s) = [I + \Delta_m(s)]P_0(s) \cdot$$

$$[\sigma\{\Delta_m(j\omega)\} \quad |W_m(j\omega)| : \forall \omega\}$$

式中:  $P_0(s)$  为被控对象的标称模型;  $\Delta_m(s)$  为不确定性相对误差, 表示了被控对象的未建模动态;  $W_m(s)$  为稳定真有理函数, 表示未建模动态的幅值界限, 其鲁棒稳定性判据如下:

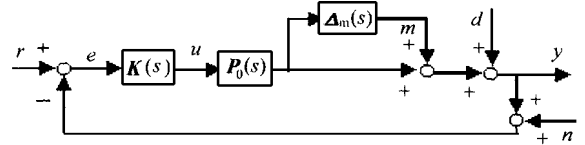


图1 频域不确定性反馈控制系统

**引理 1<sup>[3]</sup>** 给定  $M(P_0, W_m)$  及控制器  $K(s)$ , 若对于任意  $P(s) \in M(P_0, W_m)$ , 闭环系统稳定, 则系统是鲁棒稳定的。当  $P(s)$  与  $P_0(s)$  在  $S$  闭右半平面的极点个数相同时, 闭环系统鲁棒稳定的充分必要条件是  $\Delta_m(s) = 0$  时系统稳定, 且满足下式

$$W_m(s) [I + P_0(s)K(s)]^{-1} P_0(s)K(s) < 1$$

设  $L(s) = P_0(s)K(s)$  为开环传递函数阵;  $S(s) = (I + L(s))^{-1}$  为闭环系统的灵敏度函数阵,

收稿日期: 1998-06-08; 修订日期: 1998-07-10  
基金项目: 航空科学基金资助项目(96C53040)

表示  $d$  到  $y$  和  $e, r$  到  $e$  的传递函数阵;  $T(s) = L(s)(I + L(s))^{-1}$  为闭环系统的补灵敏度函数阵, 表示  $n$  到  $y$  和  $e, r$  到  $y$  的传递函数阵, 由此可提出如下期望性能设计指标:

(1) 为抑制干扰不确定信号对控制误差的影响, 应尽可能降低  $S(s)$  的增益;

(2) 为抑制噪声不确定信号对控制误差的影响, 应尽可能降低  $T(s)$  的增益;

(3) 为削弱模型不确定相对误差对系统的影响, 应尽可能降低  $T(s)$  的增益;

(4) 为保证控制输出对参考输入的跟踪精度, 且达到完全渐近跟踪阶跃输入, 应使  $\bar{\sigma}(T) = \bar{\sigma}(T) = 1$  且  $S(0) = 0$ .

在相同的频段, 由于  $S(s) + T(s) = I$  的限制, 不可能同时降低  $S(s)$  和  $T(s)$ 。但干扰和参考输入多为低频信号, 未建模动态和噪声多为高频信号, 采用分频段折衷设计方法可解决这一矛盾。引入加权灵敏度函数  $W_S(s)$  和加权补灵敏度函数  $W_T(s)$ , 将  $\bar{\sigma}(W_S^{-1}(s))$  和  $\bar{\sigma}(W_T^{-1}(s))$  分别作为设计  $S(s)$  和  $T(s)$  的上界, 则期望性能设计指标归结为一个  $H$  范数的  $\gamma$  抑制问题

$$\left\| \begin{bmatrix} \rho W_S(s) S(s) \\ W_T(s) T(s) \end{bmatrix} \right\| < \gamma$$

其中:  $\gamma > 1$  为性能优化指标,  $\gamma$  小则抗干扰能力强, 鲁棒稳定性好;  $\rho$  为调节灵敏度参数。

图 2 中  $w$  为信号  $d, n, m$  的集合, 设  $P_0(s), W_S(s), W_T(s)$  为稳定真有理函数阵, 其状态空间

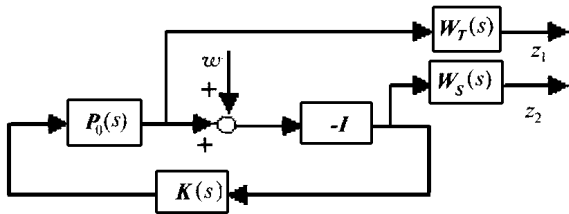


图 2 含加权函数的反馈系统

实现为  $P_0(s) = \{A_0, B_0, C_0, D_0\}$ ;  $W_S(s) = \{A_S, B_S, C_S, D_S\}$ ;  $W_T(s) = \{A_T, B_T, C_T, D_T\}$ , 则可求出广义被控对象  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ -B_S C_0 & A_S & 0 \\ B_T C_0 & 0 & A_T \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & B_0 \\ -B_S & -B_S D_0 \\ 0 & B_T D_0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\rho D_S C_0 & \rho C_S & 0 \\ D_T C_0 & 0 & C_T \\ -C_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -\rho D_S & -\rho D_S D_0 \\ 0 & D_T D_0 \\ -I & -D_0 \end{bmatrix}$$

## 2 加权函数的频域整形

由经典回路成形法可知, 为抗干扰性强, 目标跟踪好, 在低频段  $L(s)$  的斜率至少应为  $-20\text{dB}/\text{dec}$ ; 为抑制噪声, 降低未建模误差的影响, 在高频段  $L(s)$  衰减越快越好, 斜率应为  $-20\text{dB}/\text{dec} \sim -60\text{dB}/\text{dec}$ ; 为保证系统的鲁棒稳定性, 在中频段  $L(s)$  的斜率应在相当宽的频段上保持  $-20\text{dB}/\text{dec}$ , 且在截止频率处穿越  $0\text{dB}$  线。从  $\bar{\sigma}(L(s)) = 1 / \bar{\sigma}(S(s)) = \bar{\sigma}(L(s)) + 1$  关系可知, 在  $\bar{\sigma}(L(s)) \gg 1$  的低频段, 存在  $\bar{\sigma}(S(s)) = \bar{\sigma}(L^{-1}(s))$ , 在  $\bar{\sigma}(L(s)) \ll 1$  的高频段存在  $\bar{\sigma}(T(s)) = \bar{\sigma}(L(s))$ , 因而可将这一方法推广到多变量频域整形中, 间接用  $S(s), T(s)$  的整形来获得  $L(s)$  的整形。若选择  $W_S^{-1}(s), W_T^{-1}(s)$  分别与  $S(s), T(s)$  的频域形状大致相近, 且能满足  $\bar{\sigma}(S(s)) = \bar{\sigma}(W_S^{-1}(s)), \bar{\sigma}(T(s)) = \bar{\sigma}(W_T^{-1}(s))$ , 则根据  $L(s)$  的整形要求, 再兼顾时域与频域特性关系, 由对数幅频特性 Bode 图分频段叠加原理, 可导出推论 1 与推论 2。

时域与频域特性关系。设闭环传递函数可近似为一惯性环节  $T(s) = 1/(\tau s + 1)$ , 其单位阶跃响应为  $h(t) = 1 - e^{-t/\tau}$ , 在  $t_r$  时刻,  $h(t_r)$  要达到终值的  $m\%$ , 由带宽  $\omega$  与  $\tau$  的反比关系可得

$$\omega = -\ln(1 - m\%) / t_r \quad (1)$$

推论 1 多变量系统中, 给定  $t_r$  及  $m\%$ , 由式 (1) 确定  $\omega$ , 在每个回路上, 加权函数按式 (2) 确定, 则可获得图 3 所示的频域整形 (图中  $\alpha = \beta = 1$ )

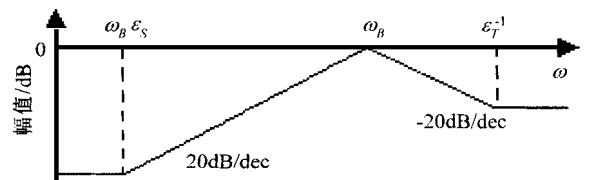


图 3 推论 1 中的  $W_S^{-1}(s), W_T^{-1}(s)$  频域整形

$$W_S(s) = \alpha \frac{s + \omega_b}{s + \omega_b \epsilon_S}$$

$$W_T(s) = \beta \frac{s + \omega_b}{\epsilon_T \omega_b s + \omega_b}$$

$$(0 < \alpha, \beta < 1, 0 < \epsilon_S, \epsilon_T < 1) \quad (2)$$

推论 2 多变量系统中, 在每个回路上, 加权函数按式 (3) 确定, 则可获得图 4 所示的频域整形 (图中  $\alpha = \beta = 1$ )

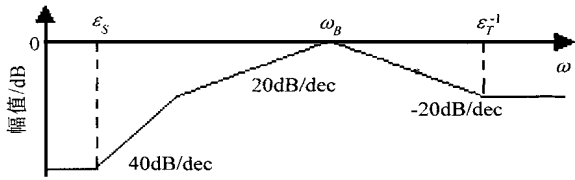


图4 推论2中的  $W_S^{-1}(s)$ ,  $W_T^{-1}(s)$  频域整形

$$W_S(s) = \alpha \frac{(s + \omega_b)(s + \omega_b)}{(s + \epsilon_s)^2}$$

$$W_T(s) = \beta \frac{(s + \omega_b)(s + \omega_b)}{[(\omega_b + \omega_b)s + \omega_b \omega_b](\epsilon_T s + 1)}$$

$$(0 < \alpha, \beta < 1, 0 < \epsilon_s, \epsilon_T \ll 1)$$

标,但间接调整带宽  $\omega_b$ ,可获得期望的过渡响应。

### 3 航空发动机频域不确定性系统实例验证

在飞行包线内,航空发动机属多变量频域不确定系统,调节规律选主供油量  $W_f$  和尾喷口面积  $A_8$  为控制量,低压转子转速  $N_1$  和低压涡轮出口总温  $T_6$  为被控参数,外界环境(飞行高度  $H$ 、飞行马赫数  $Ma$ ) 视为扰动。在系统中加入前馈补偿器以提高动态品质,为完全渐近跟踪目标,使  $s(0) = 0$ ,由内模原理法可知,应将两个积分器分别加到两个控制回路中,选  $t_{r1} = 1s$ ,  $t_{r2} = 2s$ ,  $m_1\% = m_2\% = 97\%$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $\beta = 0.2$ , 则  $\omega_{b1} = 3.5 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{b2} = 1.7 \text{ rad/s}$ ,按推论1构造加权函数如下

$$W_S(s) = \begin{bmatrix} 0.6 \frac{s+3.5}{s+0.00035} & 0 \\ 0 & 0.2 \frac{s+1.7}{s+0.00017} \end{bmatrix}$$

$$W_T(s) = \begin{bmatrix} 0.6 \frac{s+3.5}{0.00035s+3.5} & 0 \\ 0 & 0.2 \frac{s+1.7}{0.00017s+1.7} \end{bmatrix}$$

注意到由于积分器的引入,  $D_{12}$ 非列满秩,  $G_{21}(s)$ 在虚轴上出现零点,按文献[3]对  $G(s)$ 修正,使其满足 Glover-Doyle 法<sup>[4]</sup>的假设条件,选优化指标  $\gamma = 0.8$ ,迭代求解  $\rho = 1.2$ ,最后按混合灵敏度设计问题可求出  $K(s)$ 。

抗干扰性能验证(对  $H$  和  $Ma$  的突变分别验证)。图5为  $N_1 = 11156 \text{ r/min}$  和  $Ma = 1.2$  不变,在5s时  $H$  由4km突然降到3km,要求  $N_1$  和  $T_6 = 980 \text{ K}$  不变,绝对误差  $\delta N_1$  和  $\delta T_6$  的输出响应,图6为  $N_1 = 11156 \text{ r/min}$  和  $H = 3 \text{ km}$  不变,在5s时  $Ma$  由1.1突然升到1.2,要求  $N_1$  和  $T_6 = 980 \text{ K}$  不变,  $\delta N_1$  和  $\delta T_6$  的输出响应。从图可知,干扰对输出影响很小。

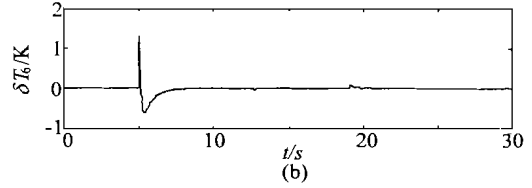
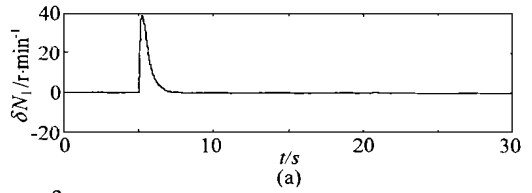


图5  $H$  突变时  $\delta N_1$  和  $\delta T_6$  的输出

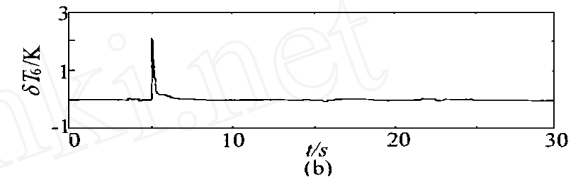
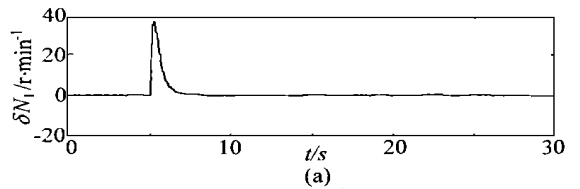


图6  $Ma$  突变时  $\delta N_1$  和  $\delta T_6$  的输出

渐近跟踪目标验证(对  $N_1$  和  $T_6$  的阶跃变化分别验证)。图7为  $Ma = 1.2$ ,  $H = 4 \text{ km}$ ,  $T_6 = 950 \text{ K}$  不变,  $N_1$  由  $10933 \text{ r/min}$  阶跃升到  $11156 \text{ r/min}$  时,跟踪  $N_1$  的输出结果,图8为  $Ma = 1.2$ ,

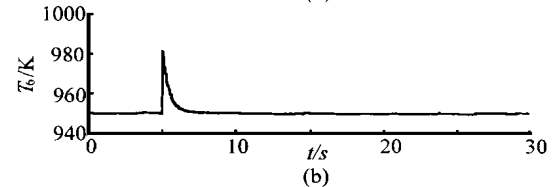
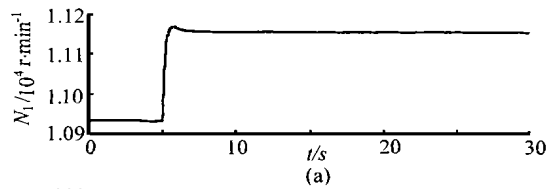


图7 跟踪  $N_1$  且  $N_1$  突变时  $N_1$  和  $T_6$  的输出

$H = 4 \text{ km}$ ,  $N_1 = 11156 \text{ r/min}$  不变,  $T_6$  由  $950 \text{ K}$  阶跃升到  $980 \text{ K}$  时,跟踪  $T_6$  的输出结果。从图可知,控制系统实现了无静差跟踪。

调整带宽验证。将  $\omega_{b1}$  调到  $25 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{b2}$  调节到  $8 \text{ rad/s}$  后,在动态品质被提高的同时仍能保证抗干扰能力,可见调节带宽可改善系统的性能,仿真图略。

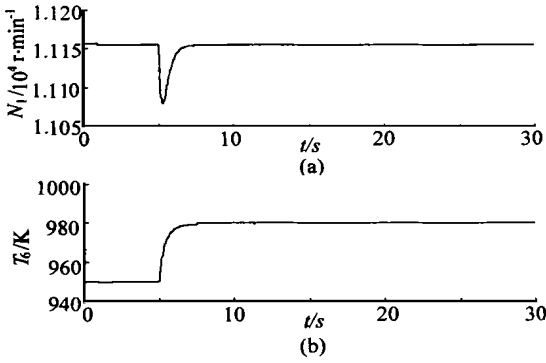


图8 跟踪  $T_6$  且  $T_6$  突变时  $N_1$  和  $T_6$  的输出

参 考 文 献

[1] Safonov M G, Chiang R Y. CACSD using the state-space  $L$  theory—a design example [J]. IEEE Trans Automat Contr, 1988, 33(5): 477~ 479  
 [2] 王炎生, 陈宗基 H 方法在鲁棒飞控系统中的应用

[J]. 航空学报, 1996, 17(2): 129~ 136

[3] 申铁龙 H 控制理论及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996 108~ 136  
 [4] Glover K, Doyle J C. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H$  norm bound and relations to sensitivity [J]. Systems & Control Letters, 1988, 11: 167~ 172

作者简介:



王 曦 1961 年生, 1998 年于西北工业大学获博士学位, 主要研究方向: 鲁棒控制, 计算机控制, 航空发动机控制及仿真。

曾庆福 1937 年生, 西北工业大学航空发动机系教授, 主要研究领域: 航空动力装置数字电子控制, 推进系统仿真技术, 鲁棒控制。

www.cnki.net