

# GPS 定位解的可信度研究

常 青 柳重堪 张其善

(北京航空航天大学电子工程系, 北京, 100083)

## STUDY OF RELIABILITY DEGREE OF GPS POSITIONING SOLUTION

Chang Qing, Liu Zhongkan, Zhang Qishan

(Department of Electronic Engineering, Beijing University  
of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100083)

**摘 要** 基于模糊数学理论的研究方法,给出了 GPS 定位解的可信度的定义。然后给出了可信度的解析表达式,并利用可信度的解析表达式对可信度的性质进行了研究。最后探讨了可信度可能的应用。

**关键词** 全球定位系统 模糊数学 可信度

**中图分类号** V474.2

**Abstract** GPS positioning error is decided by 2 factors: PDOP and SNR<sub>3</sub> (the sum of signal to noise ratio of three baseframe satellites). To give the positioning solution a more reasonable assessment, it is necessary to consider these 2 factors simultaneously. This paper presents firstly the fuzzy membership function of PDOP and SNR<sub>3</sub>, and then uses the fuzzy comprehensive judgement to generate the definition of reliability degree of GPS positioning solution. Based on the definition, an analytical expression of reliability degree of GPS positioning solution is obtained. By utilizing the analytical expression, the properties of reliability degree of GPS positioning solution are studied. The calculated results show that the reliability degree of GPS positioning solution can accurately reflect the actual situation of positioning solution. Finally, this paper also seeks to investigate the possible application of reliability degree of GPS positioning solution.

**Key words** GPS, fuzzy mathematics, reliability degree

GPS 系统(Global Positioning System)是美国国防部研制的第 2 代卫星导航与定位系统<sup>[1]</sup>。它能为全球的用户提供全天候、连续、实时的高精度位置、速度和时间信息,因此,在军事、民事方面都具有重要的意义和应用价值。目前 GPS 已在飞机、水面船只和陆地车辆的导航定位系统中得到了广泛的应用。GPS 的定位误差受很多因素的影响,包括卫星时钟和星历误差、美国政府的保密措施-选择可用性(SA)、电离层延迟、对流层延迟、多径延迟和热噪声等,其中电离层延迟和 SA 是两个最大的误差源。在这些误差因素的影响下,普通 C/A 码接收机的定位精度仅为 100m 左右。这样的精度远不能满足某些民事用户对定位精度的要求,于是人们提出了差分 GPS(DGPS),但其设备比较昂贵。因此提高普通 C/A 码接收机的定位精度是一件非常有意义的工作。文献[2]利用模糊数据处理方法首次提出了 GPS 定位解的可信度的概念。在此基础上又进一步提出了模糊定位解的概念。计算结果表明模糊定位解的精度比最

小 PDOP(位置精度因子)定位解的精度高得多。这不仅为评价 GPS 定位解提供了一个新的标准,也为提高普通 C/A 码接收机的定位精度开辟了一个新的途径。但文献[2]的工作还处于比较初级的阶段,它没有给出可信度的解析表达式,因而不仅给可信度的计算带来了困难,也无法对可信度的性质加以研究。

### 1 定位解的可信度的定义

假设接收机对四星定位星座的每一颗卫星的伪距测量是独立的等误差测量,误差方差均为  $R^2$ ,测距误差序列是正态白噪声序列,则有<sup>[1]</sup>

$$R = PDOP R_0 \quad (1)$$

其中:  $R$  为用户定位误差;  $PDOP$  为位置精度因子,它仅与接收机和卫星构成的几何图形有关。

计算表明<sup>[3]</sup>,当四星定位星座的顶座星位于天顶时,其余 3 颗底座星的高度角越小,方位角分布越均匀,  $PDOP$  越小。但是随着 3 颗底座星高度角的减小,其信噪比也相应减小<sup>[2,4]</sup>,而信噪比的减小意味着测距误差的增大<sup>[2]</sup>,因此改善定位误差不能仅考虑某一个因素,必须对  $PDOP$  和 3 颗

底座星的信噪比的和(以  $SNR_3$  表示)这两个因素进行综合考虑。另外,式(1)给出的关系是在某些特定的假设下得到的。在实际中,由于种种误差因素的影响,定位误差、PDOP、测距误差三者之间并没有式(1)那样清晰的关系,而是呈现出明显的模糊性<sup>[2]</sup>。因此为了综合  $SNR_3$  和 PDOP 这 2 个因素对定位解作出一个合理的评价,应采用模糊处理方法。为此先定义如下的模糊隶属度函数。

以 PDOP 值作为论域  $X$ , 令  $L_{p_h}(x)$ ,  $L_{p_z}(x)$ ,  $L_{p_c}(x)$ ,  $L_{p_{hc}}(x)$  分别为  $x$ (PDOP 值)隶属于模糊子集“PDOP 好”, “PDOP 中”, “PDOP 差”, “PDOP 很差”的隶属度。由于 PDOP 越小越好, 故可将  $L_{p_h}(x)$ ,  $L_{p_z}(x)$ ,  $L_{p_c}(x)$ ,  $L_{p_{hc}}(x)$  取为

$$L_{p_h}(x) = \begin{cases} 0.1(10 - 2x) & 0 \leq x < 5 \\ 0 & x \geq 5 \end{cases}$$

$$L_{p_z}(x) = \begin{cases} 0.2x & 0 \leq x < 5 \\ -0.2(x - 10) & 5 \leq x < 10 \\ 0 & x \geq 10 \end{cases}$$

$$L_{p_c}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 5 \\ 0.2(x - 5) & 5 \leq x < 10 \\ -0.2(x - 15) & 10 \leq x < 15 \\ 0 & x \geq 15 \end{cases}$$

$$L_{p_{hc}}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 10 \\ 0.2(x - 10) & 10 \leq x < 15 \\ 1 & x \geq 15 \end{cases}$$

以  $SNR_3$  作为论域  $Y$ , 令  $L_{s_h}(y)$ ,  $L_{s_z}(y)$ ,  $L_{s_c}(y)$ ,  $L_{s_{hc}}(y)$  分别为  $y$ ( $SNR_3$  值)隶属于模糊子集“ $SNR_3$  好”, “ $SNR_3$  中”, “ $SNR_3$  差”, “ $SNR_3$  很差”的隶属度。由于  $SNR_3$  越大越好, 故可将令  $L_{s_h}(y)$ ,  $L_{s_z}(y)$ ,  $L_{s_c}(y)$ ,  $L_{s_{hc}}(y)$  取为

$$L_{s_h}(y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq y < 50 \\ 0.1(y - 50) & 50 \leq y < 60 \\ 1 & y \geq 60 \end{cases}$$

$$L_{s_z}(y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq y < 40 \\ 0.1(y - 40) & 40 \leq y < 50 \\ -0.1(y - 60) & 50 \leq y < 60 \\ 0 & y \geq 60 \end{cases}$$

$$L_{s_c}(y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq y < 30 \\ 0.1(y - 30) & 30 \leq y < 40 \\ -0.1(y - 50) & 50 \leq y < 50 \\ 0 & y \geq 50 \end{cases}$$

$$L_{s_{hc}}(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y < 30 \\ -0.1(y - 40) & 30 \leq y < 40 \\ 0 & y \geq 40 \end{cases}$$

以上各隶属度函数的图形分别如图 1、图 2 所示。

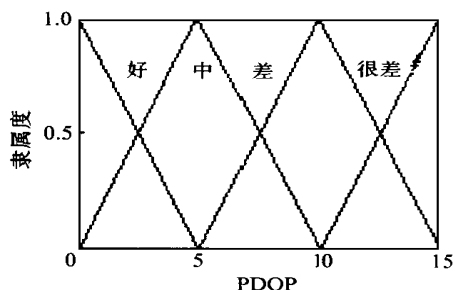


图 1 以 PDOP 为论域的隶属度函数的曲线

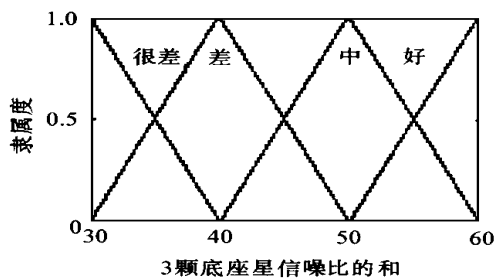


图 2 以  $SNR_3$  为论域的隶属度函数的曲线

以上述的隶属度函数为基础,可以对定位误差作出综合评判。以定位误差作为论域  $U$ , 其元素  $u$  与  $X$  和  $Y$  的笛卡尔乘积集

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

的元素  $(x, y)$  相对应, 即  $u$  与两个因素有关。因此, 对  $u$  作综合评判时, 因素集可取为  $E = \{x, y\}$ , 评语集可取为  $F = \{\text{好}, \text{中}, \text{差}, \text{很差}\}$ 。有了  $E$  与  $F$ , 对  $u$  的综合评判可分为以下 3 个步骤:

(1) 对定位误差  $u$  进行单因素评价, 然后利用单因素评价结果构造表示  $E$  与  $F$  之间模糊关系的模糊矩阵。设对因素  $x$  的单因素评价结果为模糊向量  $R_1 = [L_{p_h}(x), L_{p_z}(x), L_{p_c}(x), L_{p_{hc}}(x)]$ , 对因素  $y$  的单因素评价结果为模糊向量  $R_2 = [L_{s_h}(y), L_{s_z}(y), L_{s_c}(y), L_{s_{hc}}(y)]$ , 将以上两个模糊向量合在一起, 便得到表示  $E$  与  $F$  之间模糊关系的模糊矩阵  $R = [R_1^T \ R_2^T]^T$ 。

(2) 确定权向量  $P = [p_1, p_2]$ , 其中  $p_1, p_2$  为因素  $x, y$  在  $u$  中的重要程度,  $p_1 + p_2 = 1$ 。

(3) 作模糊变换  $Q = P \cdot R$ 。模糊向量  $Q$  就是被评判对象  $u$  在评语集合  $F$  上的评判结果, 其各个分量分别表示定位误差“好”, “中”, “差”, “很差”的程度。

以定位解作为被评判对象,  $Q$  的各分量作为定位解的指标, 取权向量

$$P' = [p'_1 \ p'_2 \ p'_3 \ p'_4]$$

其中:  $p'_i$  为  $Q$  的相应分量的权重;  $\sum_{i=1}^4 p'_i = 1$ 。将

$P'$ 与 $Q^T$ 相乘,得

$$L = P' u Q^T \quad (2)$$

称 $L$ 为定位解的可信度。

以上的综合评判涉及的模糊矩阵乘法“ $\circ$ ”一般可采取两种算子,即“最大 $\vee$ 与最小 $\wedge$ ”和“有界和 $\oplus$ 与普通实数乘法 $\times$ ”算子。算子 $(\vee, \wedge)$ 为主因素突出型,即采用此算子的运算,结果能突出综合评判中那个主要因素。算子 $(\oplus, \times)$ 为加权平均型,即采用此算子的运算,结果兼顾了各种因素。当权向量各分量之和为1时,运算 $\oplus$ 蜕化为一般的实数加法,于是算子 $(\oplus, \times)$ 又可改写为 $(+, \times)$ 。在这种情况下,两个模糊矩阵的乘法与普通矩阵的乘法完全一样。除了上面提到的两种算子,还有很多算子可供选择。由于算子的多样性,使得综合评判有各种复杂的模型<sup>[5]</sup>。前面使用的模型是其中最简单的一种。

## 2 可信度的解析表达式与性质

以算子 $(+, \times)$ 作为模糊矩阵乘法算子,权向量 $P$ 取为 $P = [0.5, 0.5]$ ,  $P'$ 取为 $P' = [0.5, 0.3, 0.15, 0.05]$ ,通过计算可以得到可信度 $L$ 的解析表达式(仅以 $0 \leq x < 5$ ,  $5 \leq x < 10$ 为例, $x$ 处于其它区间时的 $L$ 的解析表达式类似可得)。当 $0 \leq x < 5$ 时,

$$L(x, y) = \begin{cases} -0.02x + 0.275 & 0 \leq y < 30 \\ -0.02x + 0.005y + 0.125 & 30 \leq y < 40 \\ -0.02x + 0.0075y + 0.025 & 40 \leq y < 50 \\ -0.02x + 0.01y - 0.1 & 50 \leq y < 60 \\ -0.02x + 0.5 & y \geq 60 \end{cases}$$

当 $5 \leq x < 10$ 时,

$$L(x, y) =$$

$$\begin{cases} -0.015x + 0.25 & 0 \leq y < 30 \\ -0.015x + 0.005y + 0.1 & 30 \leq y < 40 \\ -0.015x + 0.0075y & 40 \leq y < 50 \\ -0.015x + 0.01y - 0.125 & 50 \leq y < 60 \\ -0.015x + 0.475 & y \geq 60 \end{cases}$$

对 $L$ 求偏导数可知:在 $L$ 的任意一个分段表达式上均有 $\partial L / \partial x \leq 0$ ,  $\partial L / \partial y \geq 0$ 。进一步可以证明,当 $x$ 固定时,在整个实数轴上 $L$ 随 $y$ 的增加单调递增;当 $y$ 固定时,在整个实数轴上 $L$ 随 $x$ 的增加单调递减。这就是说,当PDOP和SNR<sub>3</sub>中一个固定,另一个变“好”时,定位解的可信度都要变大,这恰与定位解的实际情况相符合。

借助于可信度的解析表达式,通过计算可以得到可信度的分布特性(见表1)。表1中每一列左边的数字为在 $x, y$ 取值范围内的可信度的最小值,右边的数字为在 $x, y$ 取值范围内的可信度的最大值。另外,表1列出的可信度并非直接的计算结果,而是利用所有可信度中的最大值去除每一个原始可信度而得到的标准化可信度。由表1可以看出,可信度并不仅受某一个因素的影响,而是受两个因素的综合影响。当一个因素“好”,另一个因素“差”时,可信度并不是达到最大,而只处于中等水平。显然可信度的这种分布是合理的。由表1还可以看出本文定义的可信度的分布特性与文献[2]使用的可信度的产生原则基本一致。这就是说对于一系列的定位解,如果采用两种方法计算定位解的可信度,那么得到的结果在大小排列顺序上基本一致。在实际中两个因素不可能同时达到“好”,而是当一个因素达到“好”时,另一个因素就会变“差”。在这种情况下,由表1可知,当两个因素都适“中”时,可信度较大。

表1 可信度的分布

y \ x		很差		差		中		好
		(0, 30)	(30, 35)	(35, 40)	(40, 45)	(45, 50)	(50, 55)	(55, 60)
好	(0, 2.5)	0.45, 0.55	0.45, 0.60	0.50, 0.65	0.55, 0.73	0.63, 0.80	0.70, 0.90	0.80, 1
	(2.5, 5)	0.35, 0.45	0.35, 0.50	0.40, 0.55	0.45, 0.63	0.53, 0.70	0.60, 0.80	0.70, 0.90
中	(5, 7.5)	0.28, 0.35	0.28, 0.40	0.33, 0.45	0.38, 0.53	0.45, 0.60	0.53, 0.70	0.63, 0.80
	(7.5, 10)	0.20, 0.28	0.20, 0.33	0.25, 0.38	0.30, 0.45	0.38, 0.53	0.45, 0.63	0.55, 0.73
差	(10, 12.5)	0.15, 0.20	0.15, 0.25	0.20, 0.30	0.25, 0.38	0.33, 0.45	0.40, 0.55	0.50, 0.65
	(12.5, 15)	0.10, 0.15	0.10, 0.20	0.15, 0.25	0.20, 0.33	0.28, 0.40	0.35, 0.50	0.45, 0.60

## 3 计算结果分析

接收机(Trimble4000SSE-GSS)采集的数据。利用可信度的解析表达式,对这7颗卫星的不同四星组合的定位解的可信度进行了计算,结果列于表

文献[2]给出了可见卫星数为7时,由GPS

2. 当可见卫星数为 7 时, 可能的四星组合数为 35, 表 2 只列出了对其中部分组合的处理结果, 其余组合由于可信度较差没有列出。表 2 列出的可信度并非直接的计算结果, 而是利用所有 35 个可信度中的最大值去除每一个原始可信度而得到的标准化可信度。由表 2 可以看出, 前 10 个较大的可信度对应的四星定位星座均是以高度角最大的 31 号星作为顶座星, 这与文献[2]给出的结果(见文献[2]的表 4)是一致的。其主要原因是: 若以高度角最大的卫星作为顶座星, 那么底座星的选择余地就更大, 从而也就更有可能使 PDOP 和 SNR<sub>3</sub> 都达到适“中”。表 2 给出的结果与文献[2]

表 2 可信度的计算结果

四星星座序号	卫星号	PDOP	SNR <sub>3</sub>	标准化可信度
1	19, 28, 31, 15	4.9	53	1.000
2	27, 28, 31, 15	4.0	48	0.919
3	19, 31, 21, 15	3.7	47	0.914
4	19, 22, 31, 15	4.0	46	0.873
5	27, 22, 31, 15	2.6	41	0.845
6	27, 19, 28, 31	4.5	46	0.843
7	27, 31, 21, 15	3.0	42	0.843
8	27, 19, 31, 21	3.7	40	0.756
9	27, 19, 22, 31	3.5	39	0.753
10	19, 31, 15, 27	12.38	54	0.726
11	27, 22, 28, 15	3.0	33	0.693
12	19, 22, 28, 15	4.3	38	0.690
13	27, 19, 22, 28	4.5	33	0.602
14	27, 22, 28, 31	4.5	33	0.602
15	27, 22, 31, 21	3.1	27	0.596
16	19, 22, 31, 21	4.4	32	0.593
17	19, 28, 21, 15	7.0	39	0.572
18	19, 22, 21, 15	4.9	32	0.563
19	27, 22, 21, 15	3.7	27	0.560
20	19, 22, 28, 31	8.0	38	0.512
21	27, 28, 21, 15	6.7	34	0.506
22	27, 19, 28, 21	7.1	34	0.492
23	27, 19, 22, 21	6.1	27	0.477
24	27, 22, 28, 21	6.5	27	0.459
25	19, 22, 28, 21	7.5	26	0.414
26	22, 31, 21, 15	11.9	34	0.304
27	22, 28, 21, 15	10.7	26	0.280

给出的结果的另一共同点是可信度比较强烈地依赖于 SNR<sub>3</sub>(见图 3)。对此可利用可信度的偏导数加以解释。以 0 < x < 5, 30 < y < 40 为例, 当 x, y 处于上述范围内时 5L/5x = - 0.02, 5L/5y = 0.005, 因此, 当 y 减小 1 时, x 必须减小 0.25 才能保证可信度不变。在实际中, 由于 SNR<sub>3</sub> 的数值变化较大, 而 PDOP 的数值变化较小, PDOP 的变化不足以抵消的 SNR<sub>3</sub> 变化, 这样可信度就会表现出比较强烈地依赖于 SNR<sub>3</sub> 的趋势。这一趋

势与定位误差随 SNR<sub>3</sub> 的变化趋势(见文献[2]的图 3)是一致的。表 2 给出的结果与文献[2]给出的结果的不同点是可信度的大小排列次序略有不同, 表 2 中的排列更加合理。如文献[2]中 L(8, 38) ≈ 3L(4.5, 33), 而表 2 中 L(4.5, 33) 比 L(8, 38) 略大。之所以会有这种比较合理的调整, 主要原因是定义可信度的方法及所用的算子不同。由表 2 还可以看出 PDOP 最小的定位解的可信度并不是最好的, 这与文献[2]的图 4 所示的定位解的实际分布也是一致的。由以上分析可知, 本文定义的可信度能非常准确地反映出定位解的实际情况。

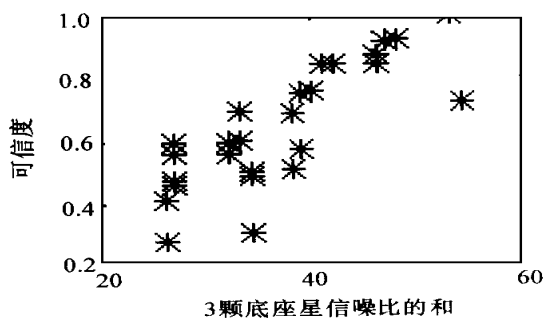


图 3 可信度随 SNR<sub>3</sub> 变化的趋势

#### 4 可信度的应用——模糊定位解

假设某一时刻可见卫星数为 n, 则可能的四星定位解的个数为 C<sub>n</sub><sup>4</sup>。若以 r<sub>i</sub> 表示第 i 个四星解, 其可信度记为 L<sub>i</sub>, 那么对所有的 r<sub>i</sub> 作加权平均, 得到

$$r = \sum_{i=1}^{C_n^4} \frac{L_i}{A} r_i \quad (3)$$

其中: A =  $\sum_{i=1}^{C_n^4} L_i$ ; r 称为模糊定位解。文献[2]利用式(3)对模糊定位解进行了计算, 得到了比较好的结果, r 的定位精度比最小 PDOP 解的精度高得多。之所以会有这样的结果, 一方面是因为在式(3)的加权平均中给可信度较大的定位解分配了较大的权重; 另一方面是因为文献[2]定义的可信度随 PDOP 和 SNR<sub>3</sub> 的变“差”很快接近于零, 这样式(3)的加权平均等价于只对具有较大可信度的定位解进行加权平均, 而 PDOP 和 SNR<sub>3</sub> 较“差”的定位解则被忽略。这也说明了可信度较大的定位解确实具有较高的定位精度。由于利用式(3)求模糊定位解时必须求出所有可能的四星定位解及其可信度, 因此利用式(3)求模糊定位解会大量涉及矩阵的乘法与求逆。考虑到本文定义的

可信度其数值变化较缓慢,直接按式(3)计算模糊定位解起不到突出具有较大可信度的定位解的作用,同时也为了减小计算量,应当对式(3)进行改进。具体做法是:<sup>1</sup> 设定  $SNR_3$  的下限  $S$ , 顶座星高度角的下限  $A$  及标准化可信度的下限  $L'$  (比如可取  $A=50^\circ$ ,  $S=35$ , 即  $SNR_3$  不能达到“很差”);<sup>2</sup> 以高度角最大的卫星作为顶座星, 然后选出  $SNR_3$  大于  $S$  的所有的底座星。计算每一组底座星和顶座星构成的四星定位星座的 PDOP 值, 然后按前面给出的可信度的解析表达式计算可信度;<sup>3</sup> 将顶座星去掉, 判断余下的卫星中的高度角的最大值是否大于  $A$ , 若是, 以具有该高度角的卫星作为顶座星转到步骤(2), 若不是, 停止;<sup>4</sup> 用前面求出的可信度的最大值将求出的可信度标准化, 然后计算标准化可信度大于  $L'$  的定位解;<sup>5</sup> 设步骤<sup>4</sup> 中求得的定位解为  $r_i (i=1, 2, \dots, M)$ ,  $r_i$  的可信度为  $L_i (i=1, 2, \dots, M)$ , 按

$$r = \sum_{i=1}^M \frac{L_i}{A} r_i \quad (4)$$

计算模糊定位解  $r$ 。其中  $A' = \sum_{i=1}^M L_i$ 。按照以上方法求模糊定位解能够将具有较小数值的可信度及其定位解忽略, 这样既可减小计算量, 又有利于提高模糊定位解的精度。以上方法中的参数  $S$ ,  $A$  及  $L'$  取多少较合适需要由实验确定。

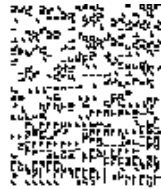
#### 4 结束语

前面对 GPS 定位解的可信度进行了系统的研究, 并给出了求模糊定位解的方法。由于该方法只要求在软件上加以改进, 并无其它的硬件要求, 因而对大多数的 C/A 码接收机来说是可以办到的。另外本文已给出了可信度的解析表达式, 从而为软件的改进提供了极其便利的条件。将以上方法移植到 C/A 码接收机中并验证其可行性的工作正处于筹划之中。如果这种方法得以验证并在

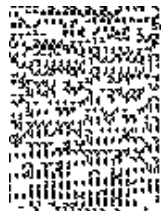
实际导航定位中应用, 将大大提高普通 C/A 码接收机的定位精度, 这对于只具有 C/A 码接收机的民用用户来说是很有价值的。

#### 参 考 文 献

- 1 刘基余, 李征航, 王跃虎, 等. 全球定位系统原理及其应用. 北京: 测绘出版社, 1993. 1~130
- 2 Koremura K, Asakura M, Matsumoto C. Position accuracy improvement using fuzzy processing on GPS data. In: Proceedings of GPS-94. Alexandria, Virginia: The Institute of Navigation, 1994. 165~172
- 3 Phillips A H. Geometrical determination of PDOP. Navigation, 1990, 37(4): 379~391
- 4 唐金元, 郭龙, 贾绍文, 等. 全球不同地区 GPS 卫星可跟踪星数的一种观测方法及结果. 导航, 1997, 35(3): 62~66
- 5 陈贻源. 模糊数学. 武汉: 华中工学院出版社, 1984. 154~160



常青, 1962年生, 1998年9月毕业于北京航空航天大学电子工程系, 并获工学博士学位, 现已被北京大学录取, 攻读博士后, 主要研究方向为通信与信息系统。Tel: 022-27412702



柳重堪, 1941年生, 1962年毕业于山东大学数学系, 现为北京航空航天大学理学院教授, 信息与通信工程学科博士生导师, 主要研究方向为信号与信息处理。Tel: 823315025



张其善, 1936年生, 现为北京航空航天大学电子工程系教授, 信息与通信工程学科博士生导师, 主要研究方向为通信与信息系统。Tel: 82317238