

文章编号:1000-6893(2009)11-2023-08

# 考虑气动不确定性的气动弹性系统模型确认

黄丽丽, 韩景龙, 员海玮

(南京航空航天大学 航空宇航学院, 江苏 南京 210016)

## Model Validation of Aeroelastic Systems with Aerodynamic Uncertainties

Huang Lili, Han Jinglong, Yun Haiwei

(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,  
Nanjing 210016, China)

**摘要:**研究了机翼气动弹性系统的不确定性建模及其模型确认问题。结构的不确定性考虑为参数形式,气动力的不确定性分为未建模动力学和参数不确定性两种形式进行讨论。建立不确定气动弹性系统的线性分式变换(LFT)模型,给出了频域模型有效性检验方法,对有效模型集进行参数化并将不确定性幅值最小的模型集求解归结为优化问题。在建模中计入了实际存在的、未知但能量有界的外扰和噪声的影响,降低了结果的保守性。最后,根据模型确认的结果,使用结构奇异值 $\mu$ -分析方法进行不确定系统的鲁棒颤振分析。仿真计算结果表明了模型确认方法的有效性。

**关键词:**模型确认;不确定性建模;气动弹性系统;参数化; $\mu$ -分析方法;鲁棒颤振分析

**中图分类号:** V215.3      **文献标识码:** A

**Abstract:** The problems of uncertainty modeling and model validation of a wing aeroelastic system are investigated. The parametric uncertainties in structure are considered and both the parametric form and the unmodeled dynamic form which are used to represent the uncertainty in unsteady aerodynamic forces are discussed. The linear fractional transformation (LFT) representation of an uncertain aeroelastic system is formulated to perform model validation and robust flutter analysis. Easily computable tests in the frequency-domain for the existence of a model validating set are given, and then a parameterization of the model validating sets is implemented and the smallest uncertainty set is determined based on optimization algorithms. The influence is considered of exogenous disturbances and noise of unknown but energy bounded sources that actually exist in practice, and this could reduce the conservatism of the results. Finally, for an uncertain aeroelastic system with the obtained uncertainty magnitudes, a robust flutter analysis based on the structured singular value theory is performed to predict the robust stability boundary. Numerical results of the simulation demonstrate the validity of the developed method.

**Key words:** model validation; uncertainty modeling; aeroelastic systems; parameterization;  $\mu$ -analysis method; robust flutter analysis

颤振飞行试验是飞机研制中极为重要且必不可少的试验项目。如何在颤振飞行试验中安全、准确地预测颤振边界一直是人们的研究目标。近年来出现的基于鲁棒颤振分析的颤振试飞方法,以结构奇异值来衡量气动弹性系统的鲁棒稳定性,预测颤振裕度<sup>[1-2]</sup>,并能够考虑模型与真实系统之间的各种不确定性,如质量、刚度、阻尼、气动模型参数以及测量控制系统等。它不是单纯的理论分析或者试验技术,而是两者的结合。

根据气动弹性系统的特定的不确定性描述,

可以计算出最劣情况下的颤振边界<sup>[1-2]</sup>。不确定性描述应能够合理地表示出标称系统与真实系统之间的误差,既不过于保守也不过于乐观。鲁棒颤振边界是否具有实际意义,关键依赖于不确定性的描述,包括其来源、形式以及幅值等。不确定性来源和形式的选择可根据具体问题、实际系统特征、甚至工程经验加以确定;而不确定性幅值则需根据试验数据进行估计<sup>[3]</sup>。不确定性描述是鲁棒颤振分析的关键前提。模型确认就是对不确定模型的有效性进行检验和评估。

R. S. Smith等<sup>[4]</sup>最早提出了线性分式变换(LFT)描述的频域模型确认方法,在 $\mu$ 框架下通过一个二次最优化方法解决问题。随后,

J. Chen<sup>[5]</sup>等证明 R. S. Smith 的方法难以实现且只是部分可解,并提出了一种频域方法,考虑了非结构和结构不确定性两种模型,将问题简化为一种 Nevanlinna-Pick 的边界插值问题进行求解。K. B. Lim 等对于满复数块和重复标量块/实标量的不确定性问题,提出模型有效的条件,通过优化算法计算各个不确定性的幅值边界<sup>[6-7]</sup>。该方法要求具有不确定性的先验信息,其不确定性的对角化描述较为繁琐,不易处理。R. Lind 等首次提出了鲁棒颤振的概念<sup>[1-2]</sup>,利用结构奇异值方法( $\mu$ -分析方法)计算颤振边界,描述气动弹性模型中结构和气动力不确定性的建模以及如何进行模型确认。该方法只适用于单输入单输出系统的模型确认。在国内,吴志刚等<sup>[8-9]</sup>研究了气动伺服弹性系统的不确定性建模以及考虑物理参数摄动的静气动弹性鲁棒稳定性问题。员海玮等提出了飞行高度摄动的鲁棒颤振计算方法、定马赫数下鲁棒颤振预测的匹配点解法以及非线性气动弹性系统的鲁棒稳定性分析问题<sup>[10-12]</sup>。

本文首次将 Nevanlinna-Pick 矩阵插值定理成功应用于两种气动力的不确定性模型确认。根据气动弹性系统的特点,设定了结构和气动的不确定性,应用更为简洁的不确定性对角块结构,物理意义明确。相对于文献[1]的方法而言,本文考虑了不确定性的结构性信息,能够更为精细地分别对各个不确定性进行确认,有效地减少保守性,并可以应用于多输入多输出系统。本文提出的方法和所得结果,能为鲁棒颤振分析和飞行试验提供依据。

## 1 模型确认原理

### 1.1 模型确认框架

基本的模型确认问题可以描述为:给出不确定性模型或者模型集合,在范数有界的外扰影响下,如果可以重新生成已测得的试验输入和输出数据,则称该模型为有效模型或者非伪模型。模型确认就是结合已知的输入和输出数据,通过一定的辨识机制来确认不确定性的幅值大小。事实上,没有任何的模型能够被有限的试验数据完全确认,因为新的测量数据可能推翻之前的结论,所以只能以此证明模型不是无效的,即非伪的<sup>[13]</sup>。

图1给出了模型确认中基本的 LFT 框架及其标准形式。

图中: $u$ 为系统的输入信号; $y$ 为系统实际的

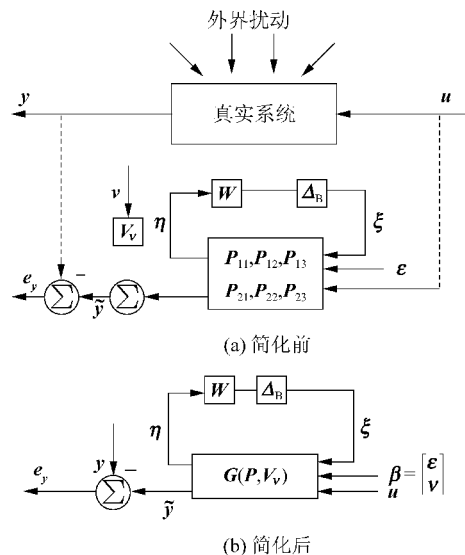


图1 模型确认框架和标准形式

Fig. 1 Model validation framework and canonical form

测量输出信号; $\tilde{y}$ 为计算输出信号; $e_y = y - \tilde{y}$ 为输出误差; $\Delta$ 为结构不确定性模型,定义见式(1); $W$ 为对角矩阵,表示不确定性的权重,每个对角元素代表相应的不确定性的上界; $\eta$ 和 $\xi$ 分别为不确定性输入和输出信号; $\varepsilon$ 和 $v$ 分别为外扰和输出测量噪声,设定 $\varepsilon$ 和 $v$ 是 $L_2$ 范数有界的,即 $\|\varepsilon\| \leq 1$ 、 $\|v\| \leq 1$ ;  $P_{ij}$  ( $i=1,2; j=1,2,3$ )为相应信号的传递函数矩阵,它们组成了增广标称系统 $P$ ;  $V_v$ 为噪声传递函数矩阵,对应于扰动 $\varepsilon$ 的传递函数矩阵 $V_\varepsilon$ 认为已经被计入到增广标称系统 $P$ 的分块 $P_{12}$ 和 $P_{22}$ 中。令 $\beta = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ v \end{bmatrix}$ ,基于数学处理的方便,近似取 $\|\beta\| \leq 1$ <sup>[14]</sup>。在每个离散频率点 $\omega$ 上,真实的外扰信号可以认为是 $\hat{\beta} \approx V_\beta \beta$ ,其中 $V_\beta = \begin{bmatrix} V_\varepsilon & 0 \\ 0 & V_v \end{bmatrix}$ 。当采用外扰信号 $\beta$ 后,图1(a)可简化为图1(b),并相应地有传递函数矩阵 $G_{ij}$  ( $i=1,2; j=1,2,3$ ),即

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \end{bmatrix}$$

显然 $G$ 是由 $P$ 和 $V_v$ 决定的。假定输入 $u$ 已知,当输出误差 $e_y = y - \tilde{y} = 0$ ,认为输入误差也等于0,因此仅考虑输出误差即可。定义结构不确定性:

$$D = \{ \Delta \in \mathbf{C}^{m \times n} : \Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{n_1}, \dots, \delta_r I_{n_r}, \Delta_{r+1}, \dots, \Delta_r), \delta_i \in \mathbf{F}_i, \Delta_i \in \mathbf{C}^{m_i \times n_i} \} \quad (1)$$

$$W = \text{diag}(w_1 I_1, w_2 I_2, \dots, w_r I_r) \quad (2)$$

$$D_w = \{ \Delta \in D : \Delta = \Delta_B W, \sigma(\Delta_B) \leq 1 \} \quad (3)$$

式中:  $\tau$  为不确定性块的数目;  $F_i$  表示实数域  $\mathbf{R}$  或复数域  $\mathbf{C}$ 。由图 1 可得如下的传递关系:

$$\xi = \Delta \eta = \Delta_B W \eta \quad (4)$$

$$\eta = G_{11} \xi + G_{12} \beta + G_{13} u \quad (5)$$

$$\tilde{y} = G_{21} \xi + G_{22} \beta + G_{23} u \quad (6)$$

$$e_y = y - \tilde{y} = e_y^0 - G_{21} \xi - G_{22} \beta \quad (7)$$

定义  $e_y^0 = y - G_{23} u$  为标称输出误差。由式(7)可以看到不确定性项  $G_{21} \xi$  和外扰项  $G_{22} \beta$  共同来抵消误差  $e_y^0$ 。若实际系统的输出数据受到了外扰的污染,而模型中没有计入外扰的影响,必然导致识别出的不确定性幅值将过大,鲁棒计算结果也将过于保守。

在模型确认之前,需要确定传递函数阵  $V_\beta$ 。这里以噪声信号为例,假定知道了真实噪声信号  $v_{true}$  的方差和均方值等先验信息,可以用具有同样方差和均方值的高斯白噪声来模拟生成仿真信号  $v_{sim}$ ,再由该仿真信号求得传递函数阵  $V_v$ ,有

$$V_v = \sqrt{\frac{NT_s n_{out} \text{diag}(s[v_{sim}^2]_1, \dots, s[v_{sim}^2]_{n_{out}})}{2\pi}} \quad (8)$$

式中:  $N$  为采样点数;  $T_s$  为采样间隔;  $n_{out}$  为噪声信号的通道数目;  $s[v_{sim}^2]$  为仿真信号的功率谱。

## 1.2 有效模型集参数化

由式(7)可知,只有当  $e_y = 0$  时,不确定性输出信号  $\xi$  连同外扰  $\beta$  ( $\|\beta\| \leq 1$ ) 才能重新生成试验输出数据,系统模型才是非无效的。令  $M = [G_{21} \ G_{22}]$ , 则

$$e_y^0 \in \text{Im}(M) \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \beta \end{bmatrix} = M^+ e_y^0 + N_M \theta \quad (10)$$

$$\beta = (M^+)_\beta e_y^0 + (N_M)_\beta \theta \quad (11)$$

式中:  $N_M$  的列向量组成了  $M$  的核  $\text{Ker}(M)$  的基;  $(\cdot)_\beta$  为矩阵中与  $\beta$  相关的子矩阵,即在式(10)中按照  $\beta$  的维数从矩阵  $M^+$  和  $N_M$  中提取相应的行;  $\theta$  为待定列向量。

有效模型存在的条件为:存在  $\theta$  使式(9)和不等式  $\|\beta\| = \|(M^+)_\beta e_y^0 + (N_M)_\beta \theta\| \leq 1$  成立。先求解使不等式  $\|\beta\| \leq 1$  成立的  $\theta$ ,这里需要对  $(N_M)_\beta$  进行奇异值分解,并引入新的参数  $\varphi$  和  $\psi$  来表示  $\theta$ <sup>[15]</sup>,如下式所示:

$$(N_M)_\beta = [T_1 \ T_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^H \\ U_2^H \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\theta = U_1 \gamma + U_2 \psi \quad (13)$$

$$\gamma = \Sigma_1^{-1} [\varphi - T_1^H (M^+)_\beta e_y^0] \quad (14)$$

式中:  $T_1, T_2, U_1, U_2$  分别为奇异值分解中的左右相应分块矩阵;  $\Sigma_1$  为对角元素大于零的对角矩阵;  $\psi$  和  $\varphi$  为待定列向量,且满足  $\|\varphi\| \leq b_0 = \sqrt{1 - \|T_2^H (M^+)_\beta e_y^0\|^2}$ , 它们的维数满足  $n_\varphi + n_\psi = \dim[\text{Ker}(M)]$ 。结合式(5)、式(10)和式(13),最终可将信号  $\xi$  和  $\eta$  参数化为

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \xi_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ I_{n_\xi} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中:  $\eta_0$  和  $\xi_0$  为常数向量;  $I_{n_\xi}$  为单位矩阵,其维数等于  $\xi$  的维数;  $\Omega = N_M [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_\Omega \end{bmatrix}$ ,  $I_\Omega$  为单位矩阵,其维数等于  $n_\varphi + n_\psi - \text{rank}(N_M)_\beta$ 。

根据式(4)知信号  $\xi$  和  $\eta$  还须满足不确定块的传递关系。列向量  $[\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_r]^T$  和  $[\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_r]^T$  是信号向量  $\xi$  和  $\eta$  对应于式(1)定义的不确定性块  $\Delta$  中块对角的分割。它们的范数比决定了不确定性的尺寸  $w_i$ 。对于重复/实标量块不确定性,有严格的共线性条件:

$$\xi_i = \delta_i \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (16)$$

$$|w_i| \geq \|\xi_i\| / \|\eta_i\| \quad (17)$$

对于满复数块的不确定性,需满足不等式关系式(17),其中  $i = r+1, r+2, \dots, \tau$ 。

参数化后的  $\xi$  和  $\eta$  值非唯一,说明能够产生先验数据的有效模型也不是唯一的。为尽量降低保守性,需要合理地确定各个不确定性权重  $w_i$  之间的比例分配关系,并寻找出不确定性幅值最小的有效模型。为此设定正数比例缩放因子  $x$ ,让其同乘以各个不确定性块的权重  $w_i$ ,用  $xw_i$  来分别表示各个不确定性的幅值。式(17)转化为如下的不等式:

$$x |w_i| \geq \|\xi_i\| / \|\eta_i\| \quad (18)$$

则上述问题归结为:设计变量为  $x, \psi, \varphi$  和  $\delta_i$ ,在满足约束条件式(16)、式(18)以及  $x > 0$ ,  $\|\varphi\| \leq b_0$  和  $|\delta_i| \leq x |w_i|$  下,找出最小的  $x$ 。这是一个多变量有约束的非线性规划问题。首先根据先验信息确定权重间的比例关系,再按照约束条件选取各变量的初值后,可采用序列二次规划算法来求解上述问题。MATLAB 软件提供了具体的优化工具箱。找到最小的  $x$  后,则  $xw$  即为不确定性的尺寸,系统  $P_{xw}$  是最终的模型确认结果。

## 2 系统建模

### 2.1 系统的动力学方程

基本的气动弹性运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = q\mathbf{Q}(ik, Ma)\mathbf{X} \quad (19)$$

式中:  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  分别为模态质量、模态阻尼和模态刚度矩阵;  $\mathbf{X}$  为模态坐标向量;  $q$  为动压;  $\mathbf{Q}(ik, Ma)$  为气动力影响系数矩阵,  $\mathbf{Q}$  是依赖于马赫数  $Ma$  和缩减频率  $k$  的函数, 气动力计算是在频域内进行, 为了方便计算任意需要的频率点的气动力影响系数矩阵  $\mathbf{Q}$  以及时域分析, 频域的  $\mathbf{Q}$  必须变换到时间域的表达形式。最为常用的就是有理函数拟合的方法, 如 Roger 法<sup>[16]</sup>。Roger 法的表达形式为

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \bar{s} + \mathbf{Q}_3 \bar{s}^2 + \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \frac{\bar{s}}{\bar{s} + r_i} \quad (20)$$

式中:  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{E}_i$  都为实系数矩阵, 需求解;  $\bar{s} = ik = i \frac{\omega b}{V}$  为拉普拉斯变量的无因次量,  $b$  为翼根半弦长,  $V$  为来流速度, 一般的应用  $i$  取 2~4, 这里取为 4;  $r_i$  为待定系数, 通常取缩减频率范围内的数值。

### 2.2 不确定性建模

事实上对于飞机这样的复杂系统而言, 不确定性的来源、形式是多样化且难以确定表达的。本文仅讨论在阻尼、刚度上的参数不确定性。考虑如下形式的不确定性:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 \Delta_c \mathbf{W}_c \\ \mathbf{K} &= \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 \Delta_k \mathbf{W}_k \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中:  $\mathbf{C}_0, \mathbf{K}_0$  为标称值矩阵;  $\mathbf{C}_1, \mathbf{K}_1$  为类型选择矩阵,  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_0$  时为乘性不确定性,  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{I}$  时为加性不确定性。由于  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  分别为模态阻尼和模态刚度矩阵, 上述各矩阵都是对角矩阵。则  $\Delta = \Delta_c \mathbf{W}_c, \Delta = \Delta_k \mathbf{W}_k$  是重复标量或实标量不确定性块形式。

在气动弹性系统众多的不确定性来源中, 非常气动力是最为重要的。  $\mathbf{Q}(ik, Ma)$  通常可以用偶极子格网法等气动力理论计算得到。但是气动模型有着各种假设和简化, 如线性化小扰动假设等, 并且也有一定的使用范围, 在翼尖、控制面等处往往难以准确反映气动力的变化。若将气动力不确定性当做未建模动力学考虑, 有如下的不确定性描述:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \Delta_q \mathbf{W}_q \quad (22)$$

式中:  $\mathbf{Q}_0$  为气动力标称值;  $\Delta_q$  为未知的满复数块;  $\mathbf{W}_q = \mathbf{w}_q \mathbf{I}_m, m$  为标称系统的阶数;  $\Delta = \Delta_q \mathbf{W}_q$  为满复数块的不确定性形式。结合结构的参数不确定性, 不确定性气动弹性运动方程写为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 \Delta_c \mathbf{W}_c) \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 \Delta_k \mathbf{W}_k) \mathbf{X} = q(\mathbf{Q}_0 + \Delta_q \mathbf{W}_q) \mathbf{X} \quad (23)$$

令  $\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\eta}_c, \mathbf{K}_1 \mathbf{X} = \boldsymbol{\eta}_k, q\mathbf{X} = \boldsymbol{\eta}_q, \Delta_c \mathbf{W}_c \boldsymbol{\eta}_c = \boldsymbol{\xi}_c, \Delta_k \mathbf{W}_k \boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{\xi}_k, \Delta_q \mathbf{W}_q \boldsymbol{\eta}_q = \boldsymbol{\xi}_q$ , 代入到式(23)中, 得到

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K}_0 - q\mathbf{Q}_0) \mathbf{X} = -\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_k + \boldsymbol{\xi}_q \quad (24)$$

对式(24)进行拉普拉斯变换, 计算  $\boldsymbol{\xi}$  到  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X}$  到  $\boldsymbol{\eta}$  的传递函数, 将得到  $\boldsymbol{\xi}$  到  $\boldsymbol{\eta}$  的传递函数  $\mathbf{G}_{11}$ 。含满复数块不确定性的鲁棒颤振  $\mu$ -分析回路图, 如图 2 所示。

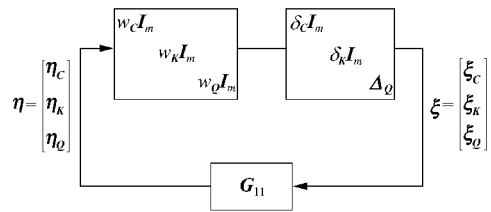


图2 含满复数块的  $\mu$ -分析回路图

Fig. 2  $\mu$ -analysis loop with full complex blocks

D. Borglund 提出在升力面压强系数上引入不确定性的方法<sup>[8]</sup>。  $\mathbf{Q}_0(ik, Ma)$  为气动力标称矩阵, 分解为

$$\mathbf{Q}_0(ik, Ma) = \mathbf{R}_0 \mathbf{S}_0(ik, Ma) \quad (25)$$

式中:  $\mathbf{S}_0(ik, Ma)$  为联系广义坐标和标称压强系数的矩阵;  $\mathbf{R}_0$  为联系压强系数和广义气动力的矩阵。通过在压强系数上引入乘法不确定性, 能够得到各个气动区域的气动力不确定性描述。将范数有界乘法不确定性引入到第  $j$  个压强系数, 不确定气动力影响系数矩阵就可以写成

$$\mathbf{Q}(ik, Ma) = \mathbf{R}_0 (\mathbf{I} + \mathbf{w}_j \delta_j \mathbf{E}_j) \mathbf{S}_0(ik, Ma) = \mathbf{Q}_0(ik, Ma) + \mathbf{w}_j \delta_j \mathbf{Q}_j(ik, Ma) \quad (26)$$

式中: 矩阵  $\mathbf{E}_j$  为一个仅元素  $e_{jj} = 1$  的矩阵;  $\mathbf{Q}_j(ik, Ma) = \mathbf{R}_0 \mathbf{E}_j \mathbf{S}_0(ik, Ma)$  为第  $j$  个动压系数对广义气动力的贡献作用, 如当  $\mathbf{w}_j = 0.1$ , 式(26)中的  $\mathbf{Q}(ik, Ma)$  表达了 10% 的不确定性范围加到第  $j$  个压强系数上。通过在每个压强系数中引入一个不确定摄动  $\delta_j$  能够得到最一般的不确定性描述:

$$\mathbf{Q}(ik, Ma) = \mathbf{Q}_0(ik, Ma) + \sum_{j=1}^N \mathbf{w}_j \delta_j \mathbf{Q}_j(ik, Ma) \quad (27)$$

式中:  $N$  为压强系数的总数。但在实践中, 这种不确定性描述并非很有用。因此种描述过为精细, 将引入过多的不确定参数, 在进行模型确认和鲁棒分析时计算十分复杂和耗时。并且, 实际可能并不存在的气动力载荷分布在这种描述中也被包括在内, 计算的颤振边界将会过分保守。文献 [3] 中通过在升力面某一区域的压强系数上引入相同的不确定性, 将机翼分为不同的块来描述机翼不同部位如, 外挂、翼尖处的不确定性。本文采用一种简单的形式来描述广义气动力的不确定性, 考虑前  $n$  阶模态对气动力不确定度的贡献作用, 并使用重复标量块形式的参数不确定性来表示:

$$Q(ik, Ma) = Q_0 + \sum_{j=1}^n Q_0 E_j \Delta_j W_j \quad (28)$$

式中:  $n$  为对气动力不确定性有主要贡献的模态阶数;  $\Delta_j = \delta_j I_m$ ,  $W_j = w_j I_m$ ,  $m$  为标称系统的阶数。结合结构的参数不确定性, 不确定性气动弹性运动方程写为

$$M\ddot{X} + (C_0 + C_1 \Delta_c W_c) \dot{X} + (K_0 + K_1 \Delta_k W_k) X = q(Q_0 + \sum_{j=1}^n Q_0 E_j \Delta_j W_j) X \quad (29)$$

令  $C_1 \dot{X} = \eta_c$ ,  $K_1 X = \eta_k$ ,  $qQ_0 E_j X = \eta_{e_j}$ ,  $\Delta_c W_c \eta_c = \xi_c$ ,  $\Delta_k W_k \eta_k = \xi_k$ ,  $\Delta_j W_j \eta_{e_j} = \xi_{e_j}$ , 代入到式 (29) 中, 得到

$$M\ddot{X} + C_0 \dot{X} + (K_0 - qQ_0) X = -\xi_c - \xi_k + \sum_{j=1}^n \xi_{e_j} \quad (30)$$

对式 (30) 进行拉普拉斯变换, 计算  $\xi$  到  $X$ ,  $X$  到  $\eta$  的传递函数, 将得到  $\xi$  到  $\eta$  的传递函数  $G_{11}$ 。重复标量块形式的鲁棒颤振  $\mu$ -分析回路图, 如图 3 所示。

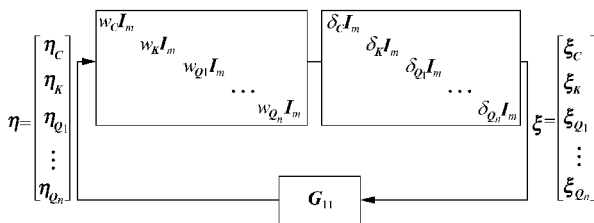


图 3 含重复标量块的  $\mu$ -分析回路图

Fig. 3  $\mu$ -analysis loop with repeated scalar blocks

### 3 数值算例与鲁棒颤振分析

算例采用的是自回归方法。采用直机翼有限元模型, 设定了真实系统, 标称系统和不确定性描

述, 利用仿真的输入输出数据作为试验数据进行模型确认。使用结构奇异值理论对不确定性气动弹性系统进行鲁棒稳定性分析, 不同来流速度下  $\mu$  值成为系统是否稳定的标志, 得到最劣情况下的颤振速度, 即鲁棒颤振速度。

算例采用 MSC/PATRAN 软件建立的 NA-CA0012 直机翼有限元模型, 应用偶极子网格法计算非定常气动力, 马赫数为 0.3, 并用 DMAP 开发语言导出机翼的前 10 阶模态质量矩阵  $M_{10}$ 、刚度矩阵  $K_{10}$ 、阻尼矩阵  $C_{10}$ 、广义气动力矩阵  $Q_{10}$  和振型<sup>[17]</sup>, 采用 Roger 法拟合气动力。取模态参数  $M_{\text{real}} = M_{10}$ ,  $C_{\text{real}} = 1.10C_{10}$ ,  $K_{\text{real}} = 0.95K_{10}$ , 设定其为真实的系统。取结构的前 5 阶模态参数  $M_0, C_0, K_0$  和气动力影响系数矩阵  $Q_0$  为标称系统。在结构上, 考虑系统刚度和阻尼上存在参数不确定性, 在气动力上, 根据第 2 节的建模方法分别考虑为模态气动力不确定性的参数形式和未建模动力学形式。

在机翼输入端施加激励信号, 利用振型叠加原理得到机翼输出端的响应, 将所得数据作为试验输入输出数据。根据 2.2 节所述方法进行不确定性建模, 引入实际可能存在的扰动、噪声的影响, 构建模型确认的 LFT 框架进行计算。模型确认需要掌握系统一定的先验信息, 较为合理地分配各个不确定度权重之间的比例关系。本算例在考虑模态气动力的参数不确定性时, 认为前两阶模态对气动力不确定性有主要的贡献作用, 而且较少的参数方便确定权重比例。确定相互间的比例分配  $w_c : w_k : w_{e_1} : w_{e_2}$  之后, 优化出共同的缩放因子  $x$ 。实际中将不可避免地存在扰动和噪声的干扰, 若理论模型与真实系统之间的误差全部由结构和气动力不确定性承担将导致不确定度过大, 鲁棒颤振分析结果偏保守。按照 1.2 节的方法计入它们的影响将有效降低结果的保守性。

作为仿真算例, 根据状态空间法求解稳定性问题可计算得, 设定的真实系统颤振速度  $V_{\text{real}} = 166 \text{ m/s}$ , 选取的标称系统颤振速度  $V_{\text{nom}} = 170 \text{ m/s}$ 。对于参数形式的气动不确定性, 设定比例分配关系:  $w_c : w_k : w_{e_1} : w_{e_2} = 2 : 1 : 1 : 1$ , 分 3 种情况讨论:

**情况 1** 真实系统中没有外扰、噪声的干扰  $\varepsilon = v = 0$ , 则模型确认时标称系统中无需引入信号  $\beta, V_\beta = 0$ 。

**情况 2** 真实系统中存在外扰、噪声的干扰,

模型确认时在标称系统中没有计入,即  $V_p=0$ 。

**情况3** 真实系统中存在外扰、噪声的干扰,并且标称系统中计入仿真噪声信号的影响,与不确定性共同分担模型误差。

表1列出了海平面高度上,参数形式气动不确定性确认结果的比较,  $V_{rob}$  为鲁棒颤振速度。

表1 不同情况下颤振边界计算结果

Table 1 Results of robust flutter analysis for different conditions

情况	$x$	$w_c$	$w_K$	$w_{Q_1}$	$w_{Q_2}$	$V_{rob}/$ ( $m \cdot s^{-1}$ )
1	0.040 4	0.080 8	0.040 4	0.040 4	0.040 4	158.5
2	0.059 9	0.119 9	0.059 9	0.059 9	0.059 9	155.0
3	0.039 8	0.079 7	0.039 8	0.039 8	0.039 8	158.7

根据模型确认的结果,使用 MATLAB 软件的  $\mu$ -分析工具箱<sup>[18]</sup>进行计算,求出3种不同情况下的鲁棒颤振速度,如图4所示,图中曲线反映的是不同速度在所有频率点上的  $\mu$  值上界。当  $\mu=1$  时所对应的飞行速度即为鲁棒颤振速度。

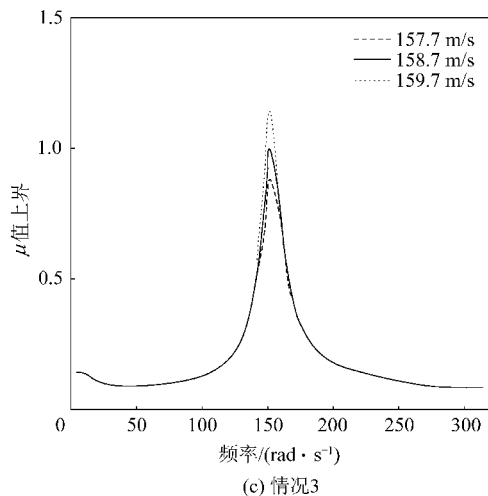
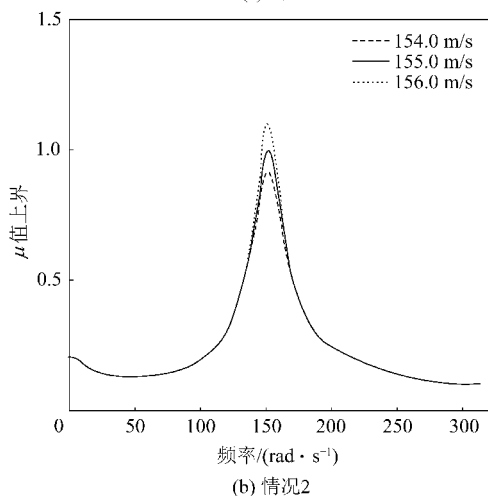
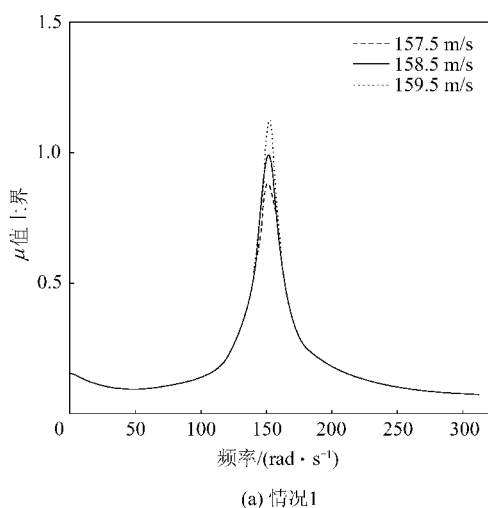


图4 不同情况下的  $\mu$  值曲线图

Fig. 4  $\mu$ -value curves of different conditions

从表1可以看到,鲁棒颤振速度小于标称颤振速度,说明鲁棒颤振边界是考虑了不确定性的最劣情况下的结果。鲁棒颤振速度的大小随着不确定性大小的变化而变化,表1中的3种不同情况得到了不同大小的不确定性幅值,因而鲁棒颤振速度不同。

表1设定了不确定性权重之间的比例关系,从3种情况的对比结果看:情况1是一种理想状态,真实系统中无外扰、噪声,模型确认时标称系统中也就不必考虑噪声、外扰的影响,两者之间的误差归结为不确定性的作用,由此识别出不确定性的幅值大小。但真实系统中是不可避免地存在噪声、外扰的干扰的,若模型确认时在标称系统中不计入它们的影响,而将真实系统和标称模型之间的误差一并由不确定性来承担,将导致识别出的不确定性幅值偏大,鲁棒计算结果也趋向保守。情况2就说明了这一点,不确定性的幅值比情况1要大得多,鲁棒颤振预测的结果也更为保守。情况3下,真实系统中有外扰、噪声的干扰,标称系统中也相应地计入扰动、噪声项,使它们和不确定性共同分担模型误差。模型确认的功用之一就是尽可能排除外扰影响,以正确识别出不确定性的幅值大小。情况1和情况3结果的一致正好说明了方法的有效性,可见模型确认算法准确地估计出不确定性在模型误差中所贡献的分量,而其余的误差就可以认为是外扰项所引起的。

在情况3下,研究不同的不确定性权重比例分配关系对模型确认结果和鲁棒颤振速度的影响。对于气动力不确定性的两种描述形式,比例关系设定以及相应结果如表2所列。

表 2 不同权重分配关系下鲁棒颤振速度对比  
Table 2 Comparison of robust flutter speed for different weight distribution

比例关系	$w_c : w_k : w_{Q_1} : w_{Q_2} /$ $w_c : w_k : \frac{w_Q}{Q_0}$	$x$	$V_{rob}/(m \cdot s^{-1})$
1	2 : 1 : 1 : 1 /	0.040 4 /	158.7 /
	2 : 1 : 1	0.045 7	159.5
2	3 : 1 : 1 : 1 /	0.049 7 /	158.5 /
	3 : 1 : 1	0.040 6	159.7
3	1 : 3 : 1 : 1 /	0.021 7 /	157.5 /
	1 : 3 : 1	0.021 5	158.5
4	2 : 1 : 4 : 4 /	0.028 6 /	153.0 /
	2 : 1 : 8	0.024 0	154.5

从表 2 对比结果看,对于气动力不确定性的两种描述形式,参数形式的不确定性描述产生稍保守的结果,而满复数块形式的未建模动力学描述产生的结果保守性有所降低。这是因为重复标量块形式的参数不确定性虽然反映了模态气动力对不确定性的贡献作用,物理意义较为明确,但这种描述设定了不确定性的结构,约束性较强;后者则是满复数块形式,放松结构上的约束,得到的结果保守性降低。比例分配对鲁棒颤振结果也有一定的影响。由于比例关系 1 较为准确地反映了已知的先验信息,所得的颤振速度比较接近真实的颤振速度。比例关系 2 增大了阻尼项不确定性幅值,使刚度和气动力不确定性幅值减小,对于鲁棒颤振结果影响较小,可见阻尼对颤振速度的影响并不明显。比例关系 3 和 4 分别增大了刚度和气动力不确定性的幅值,结果显示对颤振速度影响较大的主要是刚度和气动力不确定项,尤其是气动力不确定性。显然,若不确定性权重比例关系设定不合理,计算的结果虽然能够保证真实系统包含于不确定性模型中,但最终颤振边界过于保守。可见关于不确定性的先验性信息很重要,其包括各种不确定性对颤振速度的影响,以及不确定性幅值的初步估计。气动力、刚度对颤振速度的影响比较明显,希望气动力和刚度的不确定性尽量小,可分配较低的比例,而将模型误差尽可能分配给对颤振速度影响灵敏度较低的阻尼的不确定性,得到保守性较低的预测结果。从表 2 可以看到,各个不确定性之间比例关系的权衡和分配(Trade-Off)对最终的模型确认和鲁棒颤振预测结果影响明显,如何设定比例关系从而减少预测结果的保守性是模型确认的关键问题,仍然值得进行深入研究。

## 4 结 论

(1) 通过计入外扰和噪声影响以及合理分配不确定性的权重比例,有效地减低了鲁棒颤振边界的保守性。

(2) 实践中,模型确认之前需要掌握系统一定的先验信息,这需要设计者较好地把握系统的内部特征以及获取外扰、噪声信号的统计特性。

本文的模型确认方法能够为鲁棒颤振分析和试飞提供更为合理、有效的不确定性模型。

## 参 考 文 献

- [1] Lind R, Brenner M J. Robust aeroservoelastic stability analysis[M]. London: Springer Press, 1999.
- [2] Lind R, Brenner M J. Robust flutter margin analysis that incorporates flight data [R]. NASA TP-1998-206543, 1998.
- [3] Borglund D. The  $\mu$ - $k$  method for robust flutter solution [J]. Journal of Aircraft, 2004, 41(5): 1209-1216.
- [4] Smith R S, Doyle J C. Model validation: a connection between robust control and identification[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(7): 942-952.
- [5] Chen J. Frequency-domain test for validation of linear fractional uncertain models[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, 42(6): 748-760.
- [6] Lim K B, Balas G J, Anthony T C. Minimum-norm model validating identification for robust control [R]. AIAA-1996-3717, 1996.
- [7] Lim K B, Giesy D P. Computation of LFT uncertainty bounds with repeated parametric uncertainties[C]// Proceedings of the American Controls Conference, American Automatic Control Council. 1998: 1018-1022.
- [8] 吴志刚, 杨超. 气动伺服弹性系统不确定性建模与鲁棒稳定性[J]. 航空学报, 2003, 24(4): 312-316.  
Wu Zhigang, Yang Chao. Modeling and robust stability for aeroservoelastic systems with uncertainties[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2003, 24(4): 312-316. (in Chinese)
- [9] 吴志刚, 杨超. 考虑物理参数摄动的静气动弹性鲁棒分析[J]. 航空学报, 2006, 27(4): 565-569.  
Wu Zhigang, Yang Chao. Robustness analysis of static aeroelastic systems with physical parameters perturbation [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2006, 27(4): 565-569. (in Chinese)
- [10] 员海玮, 韩景龙. 飞行高度摄动的鲁棒颤振计算方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2007, 39(6): 731-735.  
Yun Haiwei, Han Jinglong. Calculation method for robust flutter based on altitude preturbation[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 39(6): 731-735. (in Chinese)
- [11] Yun H W, Han J L. Match point solution for robust flut-

- ter analysis in constant-Mach prediction [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008, 21(2): 105-114.
- [12] 员海玮, 韩景龙. 非线性气动弹性系统的鲁棒稳定性分析[J]. 振动工程学报, 2008, 21(4): 329-334.  
Yun Haiwei, Han Jinglong. Robust stability analysis of nonlinear aeroelastic systems[J]. Journal of Vibration Engineering, 2008, 21(4): 329-334. (in Chinese)
- [13] Poolla K, Khargonekar P, Tikku A, et al. A time-domain approach to model validation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, 39(5): 951-959.
- [14] Lim K B, Giesy D P. Parameterization of model validating sets for uncertainty bound optimizations[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2000, 23(2): 222-230.
- [15] Lim K B, Giesy D P. Structured uncertainty bound determination from data for control and performance validation [R]. NASA/TM-2003-212441, 2003.
- [16] 陈桂彬, 邹丛青, 杨超. 气动弹性设计基础[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2004.  
Chen Guibin, Zou Congqing, Yang Chao. The basis of aeroelastic design [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2004. (in Chinese)
- [17] MSC. Nastran 2005 quick reference guide [M]. Santa Ana, CA: MSC Software Corporation, 2005.
- [18] Balas G J, Doyle J C, Glover K. MATLAB  $\mu$  analysis and synthesis toolbox user's guide [M]. Natick: The Math Works Inc, 2001.

#### 作者简介:

黄丽丽(1984—) 女, 硕士研究生。主要研究方向: 气动弹性力学。

Tel: 025-84896484

E-mail: poundnuaa@qq.com

韩景龙(1952—) 男, 博士, 教授, 博士生导师。主要研究方向: 气动弹性力学、非线性动力学、复杂结构动力学与控制等。

Tel: 025-84896484

E-mail: hjlae@nuaa.edu.cn

员海玮(1981—) 男, 博士研究生。主要研究方向: 气动弹性力学。

Tel: 025-84896484

E-mail: laoyun12@yahoo.com.cn

(编辑: 鲍亚平)