

文章编号:1000-6893(2009)09-1711-07

着陆小行星的视线测量自主光学相对 导航算法及其可观性分析

李爽

(南京航空航天大学 航天学院, 江苏 南京 210016)

Line-of-sight Measurement Based Autonomous Optical Relative Navigation Algorithms for Asteroid Landing and Observability Analysis

Li Shuang

(College of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

摘要:以软着陆小行星为工程应用背景,提出了基于视线(LOS)测量的自主光学相对导航算法,并对导航算法的可观性进行了比较深入的分析研究。首先,基于透视投影模型的共线方程,给出了导航测量方程和测量敏感矩阵;接着,通过多个视线矢量的测量,应用高斯最小二乘微分修正(GLSDC)和龙贝格-马尔塔(LM)算法对探测器的位置和姿态参数进行了估计。然后,通过对误差方差阵逆矩阵秩的分析,比较详尽地分析了不同数量视线观测条件下导航算法的可观度和可观性。最后,通过数学仿真对所提出的自主导航算法的可行性进行了验证。

关键词:着陆小行星;视线测量;自主光学相对导航;可观性

中图分类号: V448.224 **文献标识码:** A

Abstract: In this article, line-of-sight (LOS) measurement based autonomous optical relative navigation algorithms for landing spacecraft on asteroids are presented; observability analysis of the navigation algorithms is also carried out in detail. First, navigation measurement equations and measurement sensitive matrices are provided based on the co-linear equation of perspective projection. Next, spacecraft position and attitude parameters are estimated using the Gaussian least square differential correction (GLSDC) algorithm and Levenberg-Marquardt (LM) algorithm by multiple line-of-sight measurements. Then, navigation system observability and observable degree with different quantitative line-of-sight measurements are analyzed in detail by rank analysis of the error variance inverse matrix. Finally, the validity of the autonomous navigation algorithms presented in this article is confirmed by mathematical simulation.

Key words: asteroid landing; line-of-sight measurement; autonomous optical relative navigation; observability

由于小行星尺寸小,加之形状不规则导致引力场异常,安全、精确软着陆小行星需要较高的导航制导控制精度。由于目标小行星和地面基站之间存在比较大的通讯延迟,同时着陆小行星的过程持续时间相对较短,传统的基于地基深空网(Deep Space Network, DSN)的导航控制模式很难满足未来精确着陆小行星操作的苛刻实时性要求。因此,着陆操作必须借助于车载导航传感器自主地完成^[1-3]。

在过去的十几年中,为了实现星际精确着陆(Pin-Point Landing, PPL)这一目标, NASA, ESA

和 JAXA 都在致力于发展新一代的基于光学导航敏感器和计算机视觉的自主相对导航算法^[4-7]。ESA 的“行星接近与着陆段导航”研究计划(Navigation for Planetary Approach and Landing, NPAL)研究目的是发展基于单目导航相机的相对导航算法并应用到星际着陆的最终着陆段^[8]。JPL 目前正致力于发展基于计算机视觉的高精度星际软着陆自主相对导航算法^[9-10]。在 NASA 的 NEAR 任务中,首次提出了通过光学跟踪小天体表面的弹坑来实现精确导航的方案设想,由于受到工程经费预算和任务结束时间的约束,该项技术在 NEAR 任务中没有最终得以实施^[11-12]。针对最终下降、盘旋和着陆段, JAXA 的 HAYABUSA 任务发展了基于特征点跟踪、继承的自主光学导航方案,但其具体导航操作过程都是由地面的控制中心来完成的,并非由探测器自主地完成^[2,6-7,13]。

收稿日期:2008-07-03; 修订日期:2008-10-07

基金项目:国家自然科学基金(60804057);教育部博士点基金(200802871031);南京航空航天大学创新基金(Y0813-HT)

通讯作者:李爽 E-mail: lishuang@nuaa.edu.cn

本文以小天体着陆探测和采样返回任务中着陆段的自主光学相对导航为潜在工程应用背景,提出了基于视线(LOS)测量的自主光学相对导航算法。对比研究了视线测量自主相对导航的高斯最小二乘微分修正(GLSDC)算法和视线测量自主相对导航的龙贝格-马尔塔(LM)算法,并对视线测量自主相对导航算法的可观度和可观性进行了比较深入的研究分析。

1 视线测量相对导航算法

1.1 导航测量方程

本文采用理想的小孔成像(透视投影)模型来模拟导航相机的成像过程。

易知矢量形式的共线方程

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{A} \mathbf{r}_i \quad (1)$$

矢量 \mathbf{b}_i 和 \mathbf{r}_i 的表达式分别为

$$\begin{cases} \mathbf{b}_i = \frac{1}{\sqrt{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2 + f^2}} [-\bar{x}_i & -\bar{y}_i & f]^T \\ \mathbf{r}_i = \frac{[\Delta X \quad \Delta Y \quad \Delta Z]^T}{\sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2}} \end{cases}$$

式中: $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 为特征点在相机系 $oxyz$ 下所对应的像元像素坐标; f 为导航相机的焦距; $\Delta X = X_i - X_c$; $\Delta Y = Y_i - Y_c$; $\Delta Z = Z_i - Z_c$; (X_i, Y_i, Z_i) ($i=1, 2, \dots, n$) 为着陆点固联坐标系 $OXYZ$ 下第 n ($n \geq 4$) 个特征点陆标/信标的位置坐标; (X_c, Y_c, Z_c) 为探测器(即相机中心 o) 的位置参数; \mathbf{A} 为参考坐标系(即着陆点固联系)到相机固联坐标系的坐标转换矩阵。图 1 给出了完整的透视投影几何关系。

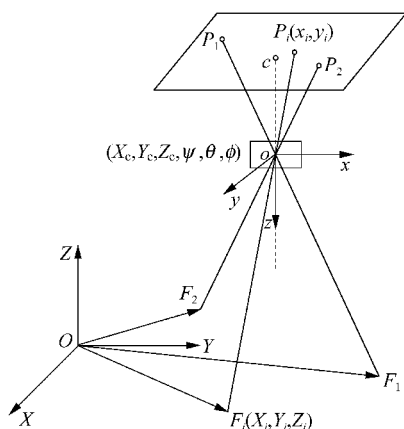


图 1 透视投影几何示意图

Fig. 1 Geometric sketch of perspective projection

在着陆之前的科学观测阶段,探测器通过光学导航相机和激光雷达(或激光测距仪)获得小行星表面的图像和距离信息,地面测控中心对传回的图像、距离信息进行相应的处理从而构建出小行星的形状模型和特征点陆标/信标的位置坐标,然后上传至探测器以备着陆阶段使用。

为了提高视线测量相对位姿确定的导航精度,同时也为了导航算法公式整齐简洁,这里采用修正罗德里格斯参数描述姿态矩阵。方向余弦阵的修正罗德里格斯参数表示为^[14]

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{8[\boldsymbol{\sigma} \times]^2 - 4(1 - \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma})[\boldsymbol{\sigma} \times]}{(1 + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma})^2} \quad (2)$$

$$\text{式中:斜对称阵} [\boldsymbol{\sigma} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_3 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & 0 & -\sigma_1 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

定义导航状态变量为

$$\mathbf{x} = [X_c \quad Y_c \quad Z_c \quad \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3]^T = [\mathbf{p}^T \quad \boldsymbol{\sigma}^T]^T \quad (3)$$

在考虑导航测量存在测量噪声的情况下,测量方程(矢量形式的共线方程)可以写为

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = \mathbf{h}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_i \quad (4)$$

式中: $\mathbf{h}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \mathbf{r}_i(X_c, Y_c, Z_c)$; $\tilde{\mathbf{b}}_i$ 为相机到第 i 个信标的方向矢量的观测; \mathbf{x} 为探测器(导航相机)的状态矢量(包括 3 个位置矢量和 3 个姿态矢量)。

假设测量噪声为零均值的高斯白噪声,测量误差方差阵为 \mathbf{R}_i , 则

$$\left. \begin{aligned} E(\mathbf{v}_i) &= \mathbf{0} \\ E(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T) &= \mathbf{R}_i \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

1.2 导航测量敏感阵

为了得到系统导航测量敏感矩阵,首先定义第 i 个视线测量对状态变量的敏感矩阵为

$$\mathbf{H}_i = \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix}_{3 \times 6} \quad (6)$$

由式(1)和式(4)知:

$$\mathbf{h}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_i(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{r}_i(\mathbf{p}) \quad (7)$$

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{p}) = \frac{[\Delta X \quad \Delta Y \quad \Delta Z]^T}{\sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2}} \quad (8)$$

进而可得:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial [X_c \quad Y_c \quad Z_c]^T} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta_i}} \begin{bmatrix} -1 + \frac{(\Delta X)^2}{\zeta_i} & \frac{\Delta X \Delta Y}{\zeta_i} & \frac{\Delta X \Delta Z}{\zeta_i} \\ \frac{\Delta X \Delta Y}{\zeta_i} & -1 + \frac{(\Delta Y)^2}{\zeta_i} & \frac{\Delta Y \Delta Z}{\zeta_i} \\ \frac{\Delta X \Delta Z}{\zeta_i} & \frac{\Delta Y \Delta Z}{\zeta_i} & -1 + \frac{(\Delta Z)^2}{\zeta_i} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{\zeta_i}} (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T) \quad (9)$$

式中: $\zeta_i = (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2$ 。

易知:

$$\frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{A}_i(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\partial \mathbf{r}_i(X_c, Y_c, Z_c)}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{A}_i(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\partial \mathbf{r}_i(X_c, Y_c, Z_c)}{\partial [X_c \ Y_c \ Z_c]^T} \quad (10)$$

将式(9)代入式(10)中可得:

$$\frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial \mathbf{p}} = \frac{-\mathbf{A}_i(\boldsymbol{\sigma}) [\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T]}{\sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2}} \quad (11)$$

视线测量模型对姿态参数的偏导数可以通过式(4)中的3个分量对3个修正的罗德里格斯参数进行直接求导得到,但求导过程困难,并且所得结果复杂、不便于导航实时计算。利用姿态参数的复合旋转特性可以得到测量模型对修正罗德里格斯姿态参数偏导数的简洁紧凑表达式^[14]:

$$\frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{4}{(1 + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma})^2} [\mathbf{A} \mathbf{r}_i \times] [(1 - \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}_{3 \times 3} - 2[\boldsymbol{\sigma} \times] + 2\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T] \quad (12)$$

1.3 视线测量相对导航算法

参考 Wahha 问题中最小二乘标准误差准则,视线测量相对导航(位姿确定)问题的代价函数可以写为^[15]

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{\mathbf{b}}_i - \mathbf{h}_i(\hat{\mathbf{x}}))^T \mathbf{W}_i (\tilde{\mathbf{b}}_i - \mathbf{h}_i(\hat{\mathbf{x}})) \quad (13)$$

式中: $\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_i)$ 为加权矩阵,在方差最小的标准下, $\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}$, \mathbf{R} 为测量方差阵; $\tilde{\mathbf{b}}_i$ 为方向矢量的测量; $\mathbf{h}_i(\hat{\mathbf{x}})$ 为方向矢量的预测。

满足测量的视线矢量和预测的视线矢量加权残差和取最小值的状态估计定义为视线测量相对导航最优解。

假设当前的状态变量估计 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 已知 ($\hat{\mathbf{x}}_0$ 为初始猜测), 则未知的目标状态变量 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ 可写为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \Delta \mathbf{x} \quad (14)$$

式中: $\Delta \mathbf{x}$ 为未知的状态修正量。

假设未知的状态修正 $\Delta \mathbf{x}$ 为充分小的量,通

过一阶泰勒展开对观测模型 $\mathbf{h}_i(\hat{\mathbf{x}})$ 进行线性化:

$$\mathbf{h}_i(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}) \approx \mathbf{h}_i(\hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{H}_{i,k} \Delta \mathbf{x} \quad (15)$$

式中: $\mathbf{H}_{i,k}$ 为测量模型相对与当前最佳状态估计的雅可比矩阵:

$$\mathbf{H}_{i,k} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k} \quad (16)$$

则状态更新后的观测残差可以线性化为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{b}_{i,k+1} &= \tilde{\mathbf{b}}_i - \mathbf{h}_i(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}) \approx \\ &\tilde{\mathbf{b}}_i - \mathbf{h}_i(\hat{\mathbf{x}}_k) - \mathbf{H}_{i,k} \Delta \mathbf{x} = \\ &\Delta \mathbf{b}_{i,k} - \mathbf{H}_{i,k} \Delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (17)$$

定义: 导航观测量集 $\tilde{\mathbf{Y}} = [\tilde{\mathbf{b}}_1 \ \tilde{\mathbf{b}}_2 \ \dots \ \tilde{\mathbf{b}}_i]^T$, 预测量集 $\hat{\mathbf{Y}}_k = [\mathbf{h}_1(\hat{\mathbf{x}}_k) \ \mathbf{h}_2(\hat{\mathbf{x}}_k) \ \dots \ \mathbf{h}_i(\hat{\mathbf{x}}_k)]^T$, 雅可比阵集 $\mathbf{H}_k = [\mathbf{H}_{1,k} \ \mathbf{H}_{2,k} \ \dots \ \mathbf{H}_{i,k}]^T$, 观测残差集 $\Delta \mathbf{Y}_k = \tilde{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{Y}}_k = [\tilde{\mathbf{b}}_1 - \mathbf{h}_1(\hat{\mathbf{x}}_k) \ \tilde{\mathbf{b}}_2 - \mathbf{h}_2(\hat{\mathbf{x}}_k) \ \dots \ \tilde{\mathbf{b}}_i - \mathbf{h}_i(\hat{\mathbf{x}}_k)]^T = \Delta \mathbf{b}_k$ 。

式(17)可以改写为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Y}_{i,k+1} &= \tilde{\mathbf{Y}}_i - \hat{\mathbf{Y}}_{i,k+1} = \tilde{\mathbf{Y}}_i - \hat{\mathbf{Y}}_{i,k} - \mathbf{H}_{i,k} \Delta \mathbf{x} = \\ &\Delta \mathbf{Y}_{i,k} - \mathbf{H}_{i,k} \Delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (18)$$

则有:

$$\Delta \mathbf{Y}_{k+1} = \Delta \mathbf{Y}_k - \mathbf{H}_k \Delta \mathbf{x} \quad (19)$$

确定未知量近似修正项 $\Delta \mathbf{x}$ 的原则: 通过合理选择近似的修正项 $\Delta \mathbf{x}$, 使线性化的预测残差的加权平方和 J_{k+1} 取最小值。

$$J_{k+1} \approx \frac{1}{2} \Delta \mathbf{Y}_{k+1}^T \mathbf{W} \Delta \mathbf{Y}_{k+1} =$$

$$\frac{1}{2} (\Delta \mathbf{Y}_k - \mathbf{H}_k \Delta \mathbf{x})^T \mathbf{W} (\Delta \mathbf{Y}_k - \mathbf{H}_k \Delta \mathbf{x}) \quad (20)$$

代价函数 J_{k+1} 最小和二次型最小问题类似, 所以恰当的未知修正项可以构造为

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{W} \Delta \mathbf{Y}_k \quad (21)$$

\mathbf{P}_k 为方差阵, 表达式为

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{H}_k^T \mathbf{W} \mathbf{H}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k)^{-1} \quad (22)$$

式中: η 为加权系数; $\boldsymbol{\Gamma}_k = \text{diag}(\mathbf{H}_k^T \mathbf{W} \mathbf{H}_k)$ 为对角阵, 为了简化计算可以令 $\boldsymbol{\Gamma}_k$ 为单位阵。

状态修正量:

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{H}_k^T \mathbf{W} \mathbf{H}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{W} \Delta \mathbf{Y}_k \quad (23)$$

当加权系数 $\eta \rightarrow 0$ 时, 式(23)等价于微分修正算法; 当 $\eta \rightarrow \infty$ 并且 $\boldsymbol{\Gamma}_k = \mathbf{I}$ 时, 式(23)退化为最速下降法。为了取得最佳的状态估计, 加权系数 η 由逐步试探方式给出。一般地讲, η 在最初的迭代过程中取值较大, 然后在代价函数取最小值附近逐步减小到零。

为了进行最小二乘微分修正算法需要状态的初始猜测值 \hat{x}_0 和迭代结束条件。

$$\delta J = \frac{|J_k - J_{k-1}|}{J_k} \leq \lambda \quad (24)$$

式中: λ 为一事先指定的小量。

将最新估计作为当前估计,按照更新过程(式(14)~式(23))进行循环迭代,直到满足循环停止条件式(24)或者迭代次数达到最大迭代次数。

2 视线测量相对导航可观性分析

2.1 最优误差方差阵

定理 1 对于视线测量相对导航问题,如果假设测量误差满足零均值的高斯分布、测量误差方差阵为加权矩阵,则极大似然估计和加权最小二乘估计等价。

证明 视线测量观测模型(矢量形式):

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{A}\mathbf{r} + \mathbf{v} \quad (25)$$

$$E(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (26)$$

$$\text{cov}(\mathbf{v}) = E(\mathbf{v}\mathbf{v}^T) = \mathbf{R} \quad (27)$$

式中: \mathbf{v} 为高斯白噪声; \mathbf{R} 为测量误差方差阵。

为了计算状态参数 $\mathbf{x} = [\mathbf{p}^T \ \boldsymbol{\sigma}^T]^T$ 的极大似然估计,首先需要得到观测视线矢量 $\tilde{\mathbf{b}}$ 的概率密度函数。

对式(25)两边同时进行求均值运算确定观测模型的均值:

$$\boldsymbol{\mu} \equiv E(\tilde{\mathbf{b}}) = E(\mathbf{A}\mathbf{r}) + E(\mathbf{v}) \quad (28)$$

由于 \mathbf{A} 和 \mathbf{r} 都是确定的值,并且 \mathbf{v} 是白噪声 ($E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$), 所以有

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}\mathbf{r} \quad (29)$$

接下来确定观测模型的方差:

$$\text{cov}(\tilde{\mathbf{b}}) = E[(\tilde{\mathbf{b}} - \boldsymbol{\mu})(\tilde{\mathbf{b}} - \boldsymbol{\mu})^T] \quad (30)$$

将式(28)、式(29)代入式(30)中可得:

$$\text{cov}(\tilde{\mathbf{b}}) = \mathbf{R} \quad (31)$$

因此,视线测量 $\tilde{\mathbf{b}}$ 满足均值 $\boldsymbol{\mu}$ 、方差 \mathbf{R} 的正态分布:

$$\tilde{\mathbf{b}} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}) \quad (32)$$

参数 \mathbf{x} 的多维/多变量正态分布的极大似然函数的定义如下:

$$L(\tilde{\mathbf{b}}; \mathbf{x}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\mathbf{r})^T \mathbf{R}^{-1}(\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\mathbf{r})\right]}{(2\pi)^{n/2} (\det(\mathbf{R}))^{1/2}} \quad (33)$$

进而可得对数似然函数:

$$\ln[L(\tilde{\mathbf{b}}; \mathbf{x})] = -\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\mathbf{r})^T \mathbf{R}^{-1}(\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\mathbf{r}) -$$

$$\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\det(\mathbf{R})) \quad (34)$$

易知,为了使似然函数取得极大值,式(34)右端第 1 项必须取极大值。所以对数似然函数取得最大值等价于下面的代价函数取得最小值,

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\mathbf{r})^T \mathbf{R}^{-1}(\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\mathbf{r}) \quad (35)$$

定理 1 得证。对于测量误差为非高斯分布的情况,视线测量相对导航的极大似然估计仍然表现为渐近高斯。

定义代价函数:

$$J(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^{-2} \|\tilde{\mathbf{b}}_i - \mathbf{A}\mathbf{r}_i\|^2 \quad (36)$$

真实的姿态阵 \mathbf{A} 可以通过其估计值 $\hat{\mathbf{A}}$ 和小角误差 $\delta\boldsymbol{\alpha}$ 来近似,

$$\mathbf{A} = e^{-[\delta\boldsymbol{\alpha} \times]} \hat{\mathbf{A}} \approx (\mathbf{I}_{3 \times 3} - [\delta\boldsymbol{\alpha} \times]) \hat{\mathbf{A}} \quad (37)$$

式中: $\delta\boldsymbol{\alpha} = [\delta\psi \ \delta\theta \ \delta\phi]^T$ 为姿态矩阵 \mathbf{A} 的 3 个欧拉角的估计误差; 叉乘阵 $[\mathbf{a} \times]$ 的定义为

$$[\mathbf{a} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 对于任给向量 } \mathbf{a}, \mathbf{b}$$

都有 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a} \times] \mathbf{b}$ 。

定义状态变量 $\mathbf{x} = [\delta\boldsymbol{\alpha}^T \ \hat{\mathbf{p}}^T]^T$, 误差协方差阵 $\mathbf{P} = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T) - E(\mathbf{x})E(\mathbf{x})^T$ 。由定理 1 知,对于视线测量相对位姿估计问题,最小方差加权估计和极大似然估计等价。将式(37)代入式(36)并经过微分求解可得到下面的最优误差方差阵:

$$\mathbf{P} =$$

$$\begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^N \sigma_i^{-2} [\mathbf{A}\mathbf{r}_i \times]^2 & \sum_{i=1}^N \sigma_i^{-2} \zeta_i^{-1/2} \mathbf{A}[\mathbf{r}_i \times] \\ \sum_{i=1}^N \sigma_i^{-2} \zeta_i^{-1/2} [\mathbf{r}_i \times]^T \mathbf{A}^T & -\sum_{i=1}^N \sigma_i^{-2} \zeta_i^{-1} [\mathbf{r}_i \times]^2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (38)$$

引入 Cramer-Rao 不等式^[15]:

$$\mathbf{P} \equiv E[(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T] \geq \mathbf{F}^{-1} \quad (39)$$

式中: \mathbf{F} 为费歇尔信息矩阵,定义为 $\mathbf{F} =$

$$E\left(\frac{\partial^2 J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T}\right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{true}}}$$

Cramer-Rao 不等式是参数估计理论中最重要的结果之一,它给出了参数估计误差方差阵的下边界,也即给出了参数估计可达到的理论极限。在某种意义上,Cramer-Rao 不等式给出了数据中所含信息量的一个度量。任何使式(39)中等号成立的参数和估计方法都是有效的、最优的。针对视线测量相对位姿确定问题存在:

$$F = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^N \sigma_i^{-2} [A r_i \times]^2 & \sum_{i=1}^N \sigma_i^{-2} \zeta_i^{-1/2} A [r_i \times] \\ \sum_{i=1}^N \sigma_i^{-2} \zeta_i^{-1/2} [r_i \times]^T A^T & -\sum_{i=1}^N \sigma_i^{-2} \zeta_i^{-1} [r_i \times]^2 \end{bmatrix} = P^{-1} \quad (40)$$

因此, 称式(38)为最优误差方差阵。

由式(40)易知, 若要最优误差方差阵 P 存在, 信息阵 F 必须满秩, 即 $\text{rank}(F) = 6$ 。

2.2 可观性秩分析

非线性估计误差方差阵和误差方差阵的逆矩阵包含了该非线性系统充分多的可观性信息, 因此, 可以通过对误差方差阵或其逆矩阵的特征值、特征向量和秩进行分析来察看非线性系统的可观性和可观度^[16]。研究表明, 如果系统的误差方差阵(或最优的误差方差阵的逆矩阵, 即费歇尔信息阵)满秩, 则系统完全可观; 如果系统的误差方差阵秩亏, 则系统非完全可观。在误差方差阵秩亏的前提下, 如果误差方差阵的秩为 n , 则称系统的可观度为 n ^[16-17]。

由于系统费歇尔信息阵的秩和系统的可观性紧密相关, 因此, 下文的主要工作围绕不同视线观测数目条件下费歇尔信息阵的秩展开。

(1) 1 个观测视线条件下的可观性

利用 MATLAB 符号计算工具箱提供的求秩函数 $\text{rank}(\cdot)$ 可以得到 1 个视线矢量观测情况下的误差方差阵逆矩阵的秩:

$$\text{rank}(F) = 2 \quad (41)$$

此时, 导航系统非完全可观, 系统的可观度为 2。表明: 在仅有 1 个视线矢量观测的情况下, 相对位置和姿态信息存在耦合。这就意味着 1 个视线矢量观测的情况不能提供有用的导航信息。

尽管在 1 个视线矢量观测不能确定任何位置姿态信息, 但分析这种情况还是有其理论和现实意义。当探测器距离信标的距离越来越大的时候, 各个观测视线矢量在空间的几何越来越密集, 位置和姿态的耦合越来越严重, 最终导致各个信标的空间方位趋向共位、导航系统不可观。

(2) 2 个观测视线条件下的可观性

同理可以确定 2 个视线矢量观测情况下的误差方差阵逆矩阵的秩:

$$\text{rank}(F) = 4 \quad (42)$$

在 2 个视线矢量观测情况下, 系统非完全可观, 可观测量的数目为 4, 即可观度为 4。2 个视

线矢量观测情况下的 4 个可观测量分别是: 1 个轴向解耦的姿态信息、1 个轴向解耦的位置信息及耦合的姿态信息和位置信息^[17]。这表明, 信息矩阵 F 的 4 个可观特征向量中有 2 个所对应的位置和姿态是解耦的。

(3) 3 个观测视线条件下的可观性

3 个视线矢量观测情况下的误差方差阵逆矩阵的秩:

$$\text{rank}(F) \leq 6 \quad (43)$$

这说明在 3 个视线矢量观测情况下, 尽管 3 个观测视线矢量不共面, 仍然存在信息矩阵秩亏、进而导致导航系统非完全可观的可能性。通过分析表明, 当位置矢量 $\zeta_1 r_1, \zeta_2 r_2$ 和 $\zeta_3 r_3$ 的末端点共线的时候, 信息矩阵秩亏, 系统不完全可观。

3 个视线矢量观测的情况下, 信息矩阵在多数情况下是可观的, 但由于存在多个可能的解, 此时, 唯一地确定位置和姿态一般情况下是不可能的。

(4) 多个观测视线条件下的可观性

多个(大于等于 4)视线矢量观测情况和 3 个视线矢量观测情况一样, 当观测位置矢量的末端点共线的时候, 4 个或者多个视线矢量观测对应的相对位姿确定系统也是不可观的。但是, 如果此时系统可观, 则可以唯一地确定相对位置和姿态信息。

3 数值仿真分析

为了验证所提出相对导航算法的可行性和有效性, 以小行星着陆探测和取样返回任务中最终着陆段的自主相对导航为工程应用背景进行了数值仿真分析。

由 2.2 节的理论分析可知, 当信标数目小于 4 时视线测量相对导航无法唯一确定探测器的位置和姿态参数, 因此, 在仿真部分假设导航用到的信标数目等于 4, 并且各个信标之间不能共线, 在上述前提之下各个信标视线之间在空间尽量保持散开, 这样获得导航效果比较好。表 1 给出了用于数值仿真分析的 4 个信标的位置坐标(定义于着陆点固联系下)。

表 1 导航信标位置坐标

Table 1 Landmark position coordinates

信标位置	坐标值/m
$x_{l_1}, y_{l_1}, z_{l_1}$	32.5, 0, 0
$x_{l_2}, y_{l_2}, z_{l_2}$	0, 30.0, 0
$x_{l_3}, y_{l_3}, z_{l_3}$	-31.5, 0, 0
$x_{l_4}, y_{l_4}, z_{l_4}$	0, -30.5, 0

假设光学导航相机的焦距 $f = 0.05$ m, 采样

周期(包括图像处理)设定为 2 s。设定规划的着陆时间为 430 s,探测器的初始状态参数如表 2 所示。在 GLSDC 算法和 LM 算法中最大迭代次数设为 $k_{max}=10, \lambda=0.1$ 。

表 2 探测器初始状态参数
Table 2 Probe initial state parameters

参数	数值
$x_0, y_0, z_0/m$	-50, 50, 500
$v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}/(m \cdot s^{-1})$	0.01, -0.075, -0.2
$\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}$	0.09, -0.04, 0.03
$\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0}/(^{\circ} \cdot s^{-1})$	0.1, 0.1, 0.1

完整的视线测量相对导航的误差来源应该包括 3 部分:信标的建模误差、CCD 器件未标定误差(畸变误差)和导航测量误差。本文在仿真分析过程中将前两种误差等效并入导航测量误差中,从而简化了建模过程和仿真分析。假定导航测量误差方差 $\sigma_{pixel}=1.0 \times 10^{-6} m^2$ 。

图 2~图 6 分别给出了 GLSDC 算法和 LM

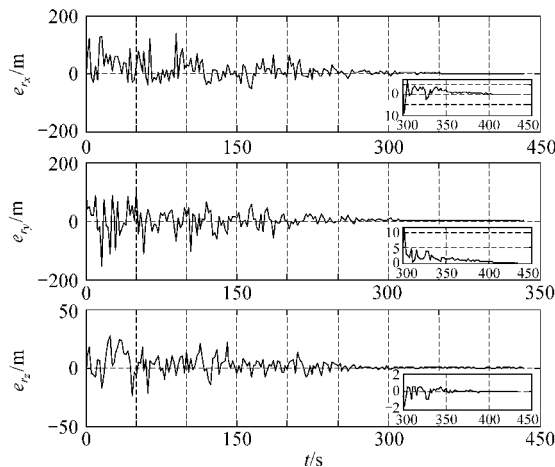


图 2 GLSDC 算法导航位置误差

Fig. 2 Navigation position errors(GLSDC)

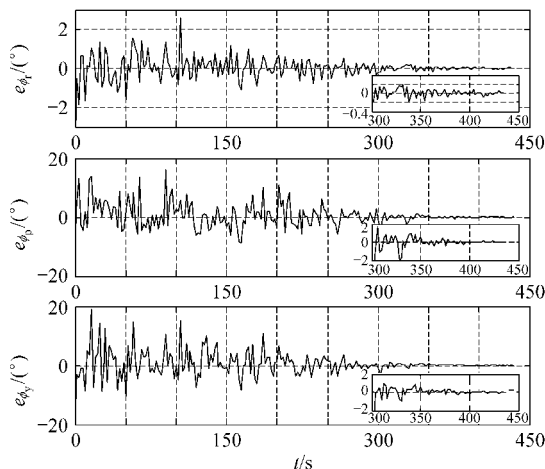


图 3 GLSDC 算法导航姿态误差

Fig. 3 Navigation attitude errors(GLSDC)

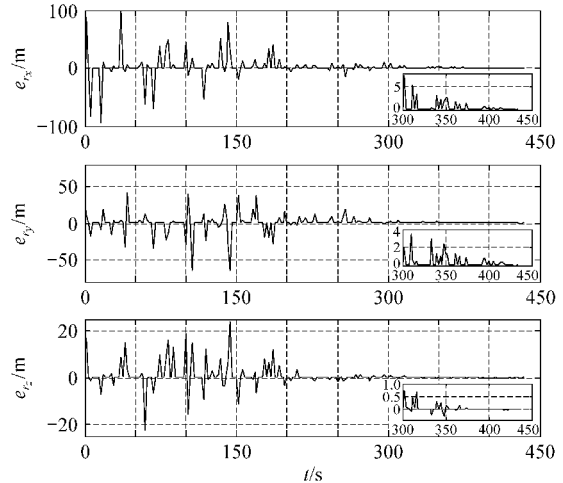


图 4 LM 算法导航位置误差

Fig. 4 Navigation position errors(LM)

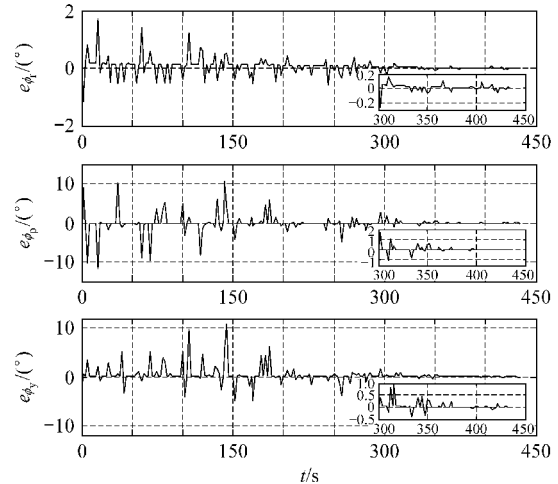


图 5 LM 算法导航姿态误差

Fig. 5 Navigation attitude errors(LM)

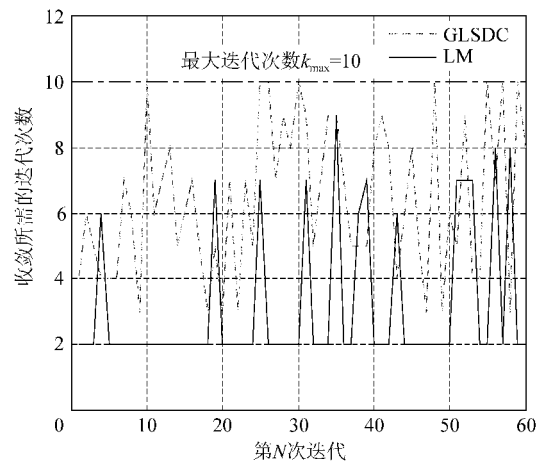


图 6 到达收敛所需的迭代次数

Fig. 6 Iterative times necessary to convergence

算法输出的三轴位置误差 e_x, e_y, e_z 和三轴姿态误差 $e_{\phi_x}, e_{\phi_y}, e_{\phi_z}$ 。数学仿真结果表明,两种导航算

法都能保证导航误差收敛到一个很小的误差范围之内:位置误差小于1 m,姿态误差小于 0.2° 。对比GLSDC算法和LM算法输出的导航误差曲线,可以发现后者较前者可以更快地实现收敛,图6给出的导航算法到达收敛所需迭代次数曲线也印证了这一结论。

尽管所提出的视线测量自主相对导航算法在起始阶段导航输出误差相对比较大,但是误差的幅值随着导航的不断进行而逐渐减小,最终的导航位置误差小于0.1 m、导航姿态误差小于 0.05° 。究其原因在于:在导航起始时刻,由于探测器和路标之间的距离比较大,从而导致各观测视线矢量(探测器到路标的视线矢量)在空间上比较密集、相对几何关系较差,这势必造成GLSDC算法和LM算法收敛困难。随着探测器的高度不断下降,各观测视线矢量之间变得越来越分散、几何关系越来越好,所以导航输出误差变得越来越小、导航精度越来越高。

4 结 论

针对小行星着陆探测和采样返回任务中最终着陆段需要高精度自主相对导航这一难题,提出了基于视线测量的相对导航方法,并对所提出的导航算法的可观性和可观度进行了较深入的分析。数学仿真结果表明,所提出的视线测量自主相对导航的GLSDC算法和视线测量自主相对导航的LM算法的导航精度完全满足工程上着陆小行星的导航要求。发展计算复杂度适中的特征点自动提取跟踪方法和进一步分析观测视线误差对导航精度的影响是待进行的研究工作。

参 考 文 献

- [1] Scheeres D J. Interactions between ground-based and autonomous navigation for precision landing at small solar-system bodies[R]. Telecommunications and Data Acquisition Progress Report 42-132, 1998.
- [2] Misu T, Hashimoto T, Ninomiya K. Optical guidance for autonomous landing of spacecraft[J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1999, 35(2): 459-473.
- [3] 李爽, 崔祐涛, 崔平远. 着陆小天体的自主GNC技术研究[J]. 宇航学报, 2006, 27(1): 21-26.
Li Shuang, Cui Hutao, Cui Pingyuan. Autonomous GNC technology for landing on small bodies[J]. Journal of Astronautics, 2006, 27(1): 21-26. (in Chinese)
- [4] Roberto B, Luca M. Sensor system for comet approach and landing[C]// SPIE, Sensors and Sensor Systems for Guidance and Navigation. 1991, 1478: 76-91.
- [5] Champetier C, Régnier P, Lafontaine J D. Advanced GNC

- concepts and techniques for an interplanetary mission[C]// Proceedings of the Annual Rocky Mountain Guidance and Control Conference. 1991: 433-452.
- [6] Kubota T, Hashimoto T, Sawai S, et al. An autonomous navigation and guidance system for MUSES-C asteroid landing[J]. Acta Astronautica, 2003, 52(2/3/4/5/6): 125-131.
- [7] Hashimoto T, Kubota T, Mizuno T. Light weight sensors for the autonomous asteroid landing of MUSES-C mission[J]. Acta Astronautica, 2003, 52(2/3/4/5/6): 381-388.
- [8] Frapard B, Mancuso S. Vision navigation for European landers and the NPAL project[C]//6th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems. 2005: 279-282.
- [9] Johnson A E, Cheng Y, Matthies L H. Machine vision for autonomous small body navigation[C]// IEEE Aerospace Conference Proceedings. 2000, 7: 661-671.
- [10] Johnson A E, Matthies L H. Precise image-based motion estimation for autonomous small body exploration[C]// Proceedings of the Fifth International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space. 1999: 627-634.
- [11] Veverka J, Farquhar B, Robinson M, et al. The landing of the NEAR-Shoemaker spacecraft on asteroid 433 Eros [J]. Nature, 2001, 413: 390-393.
- [12] Owen W M, Jr, Wang T C, Harch A, et al. NEAR optical navigation at Eros[C]// AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. 2001.
- [13] Hajime Y, Kubota T, Miyamoto H, et al. Touchdown of the Hayabusa spacecraft at the Muses Sea on Itokawa[J]. Science, 2006, 312: 1350-1353.
- [14] Schaub H, Junkins J L. Analytical mechanics of space systems[M]. Reston: AIAA, 2003: 107-115.
- [15] Crassidis J L, Junkins J L. Optimal estimation of dynamic systems[M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004: 48-49, 75-81, 81-86.
- [16] Ham F M, Brown R G. Observability, eigenvalues and Kalman filtering[J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1983, 19(2): 269-273.
- [17] Crassidis J L, Alonso R, Junkins J L. Optimal attitude and position determination from line-of-sight measurements[J]. The Journal of the Astronautical Sciences, 2000, 48(2/3): 391-408.

作者简介:

李爽(1978-) 男,博士,副教授。主要研究方向:航天器自主导航,星际任务的设计与分析,空间碎片环境建模与分析。
Tel: 025-84896520
E-mail: lishuang@nuaa.edu.cn

(编辑:张利平,孔琪颖)