通信系统原理教程

第23讲 数字信号的最佳接收之一

通信教研室 杨春萍

本讲内容

- 数字信号的统计表述
- 数字信号的最佳接收准则
- 确知数字信号的最佳接收机
- 随相数字信号的最佳接收
- 起伏数字信号的最佳接收
- 实际接收机和最佳接收机的性能比较
- 数字信号的匹配滤波接收原理
- 最佳基带传输系统

数字信号的统计表述

设：一通信系统的最高传输频率等于f_H，接收电压用其抽样值表示。

- 噪声抽样电压的一维概率密度

若在一个码元期间内以$2f_H$的速率抽样，则共得到k个抽样值：n_1，n_2，…，n_i，…，n_k，每个抽样值都是正态分布的随机变量，其一维概率密度可以写为

$$f(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{n_i^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

式中，σ_n — 噪声的标准偏差；

σ_n^2 — 噪声的方差。

□ 噪声抽样电压的k维联合概率密度

$$f_k(n_1,n_2,\cdots,n_k)=f(n_1)f(n_2)\cdots f(n_k)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_n\right)^k}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{k}n_i^2\right)$$

- 在一个码元时间T 内接收的噪声平均功率：

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}n_i^2=\frac{1}{2f_HT}\sum_{i=1}^{k}n_i^2 \qquad \text{或} \qquad \frac{1}{T}\int_0^T n^2(t)dt=\frac{1}{2f_HT}\sum_{i=1}^{k}n_i^2$$

- 将上式代入联合概率密度式，得到

$$f(\mathbf{n})=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_n\right)^k}\exp\left[-\frac{1}{n_0}\int_0^T n^2(t)dt\right] \qquad \sigma_n^2=n_0f_H$$

式中， $f(\mathbf{n})=f_k(n_1,n_2,\cdots,n_k)=f(n_1)f(n_2)\cdots f(n_k)$

需要注意：$f(n)$ 不是时间函数。n是一个k 维矢量，可以看作是k 维空间中的一个点。 $f(n)$仅决定于该码元期间内噪声的能量 $\int_0^T n^2(t)dt$ 。

- 接收电压$r(t) = s(t) + n(t)$的k维联合概率密度函数：
  - 当发送码元“0”时：

$$f_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_n\right)^k} \exp\left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^T \left[r(t) - s_0(t) \right]^2 dt \right\}$$

式中，$r(t)$ — 接收信号和噪声电压之和；

$s_0(t)$ — 发送码元“0”时的信号波形。

  - 当发送码元“1”时：

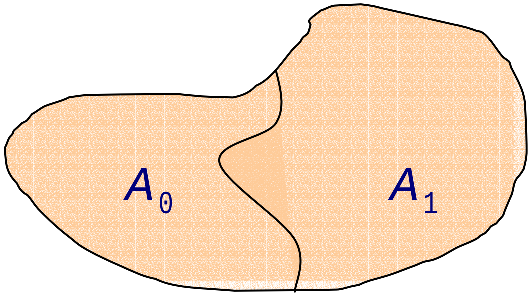
$$f_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_n\right)^k} \exp\left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^T \left[r(t) - s_1(t) \right]^2 dt \right\}$$

式中，$s_1(t)$ — 发送码元“1”时的信号波形。

返回

数字信号的最佳接收准则

- “最佳”的含义 – 指错误概率最小。
- 最佳接收的判决规则
  - 接收矢量r 看作是k维空间中一点
  - k维空间划分为区域A_0和A_1
  - 判决规则：
    若接收矢量落在区域A_0内，则判为发送码元是“0”；
    若接收矢量落在区域A_1内，则判为发送码元是“1”。



- 总误码率：$P_e = P(1)P(A_0/1) + P(0)P(A_1/0)$

式中，$P(A_0/1) = \int_{A_0} f_1(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ – 发送“1”时, r 落在A_0的条件概率；

$P(A_1/0) = \int_{A_1} f_0(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ – 发送“0”时，r落在A_1的条件概率。

$$\therefore \quad P_e = P(1)\int_{A_0} f_1(\mathbf{r})d\mathbf{r} + P(0)\int_{A_1} f_0(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

区域A_0和A_1的划分

$\because \quad P(A_0/1)+P(A_1/1)=1, \quad$ 及 $\quad P(A_0/0)+P(A_1/0)=1$

$\therefore \quad P_e = P(1)\int_{A_0} f_1(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} + P(0)\int_{A_1} f_0(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$ 可以改写为

$$P_e = P(1)[1-P(A_1/1)] + P(0)P(A_1/0)$$
$$= P(1)[1-\int_{A_1} f_1(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}] + P(0)\int_{A_1} f_0(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$
$$= P(1) + \int_{A_1}[P(0)f_0(\boldsymbol{r}) - P(1)f_1(\boldsymbol{r})]d\boldsymbol{r}$$

由于$P(1)$是确定的，故为了使误码率最小，需使上式中的积分值最小。若在此积分空间A_1中被积因子在各点上的值都最小，则积分值才最小。这就要求在A_1内所有点上被积因子满足条件：

$P(0)f_0(\boldsymbol{r})-P(1)f_1(\boldsymbol{r})<0$ 或者要求：$\dfrac{P(0)}{P(1)} < \dfrac{f_1(\boldsymbol{r})}{f_0(\boldsymbol{r})}$

当$P(1)=P(0)$时，要求在A_1内所有点上 $f_0(\boldsymbol{r})<f_1(\boldsymbol{r})$

$\therefore$当接收矢量r 落在A_1内时，有$f_0(r)<f_1(r)$，按照上述判决规则，应该判为发送码元是“1”。

类似地，可以证明，当接收矢量r落在A_0内时，有$f_1(r) < f_0(r)$，按照上述判决规则，应该判为发送码元是“0”。

- 综上所述，最佳接收准则归纳如下：
  - 二进制系统：应将接收矢量空间划分为A_0和A_1两个区域：

    在区域A_0内所有点上： $P(1)f_1(\mathbf{r}) < P(0)f_0(\mathbf{r})$

    在区域A_1内所有点上： $P(0)f_0(\mathbf{r}) < P(1)f_1(\mathbf{r})$

    当$P(1)=P(0)$时，则要求

    在区域A_0内所有点上： $f_1(\mathbf{r}) < f_0(\mathbf{r})$

    在区域A_1内所有点上： $f_0(\mathbf{r}) < f_1(\mathbf{r})$

  - 对接收矢量作如下判决：当$P(1)=P(0)$时

    若接收矢量r使 $f_1(r) < f_0(r)$，则判发送码元是“0”，

    若接收矢量r使 $f_0(r) < f_1(r)$，则判发送码元是“1”。

返回

确知数字信号的最佳接收机

码元等概率、等能量条件下

$\because$
$$f_0(\mathbf{r})=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_n\right)^k}\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^T\left[r(t)-s_0(t)\right]^2dt\right\}$$

$$f_1(\mathbf{r})=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_n\right)^k}\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^T\left[r(t)-s_1(t)\right]^2dt\right\}$$

$\therefore$ $f_1(\mathbf{r})<f_0(\mathbf{r})$

可以改写为

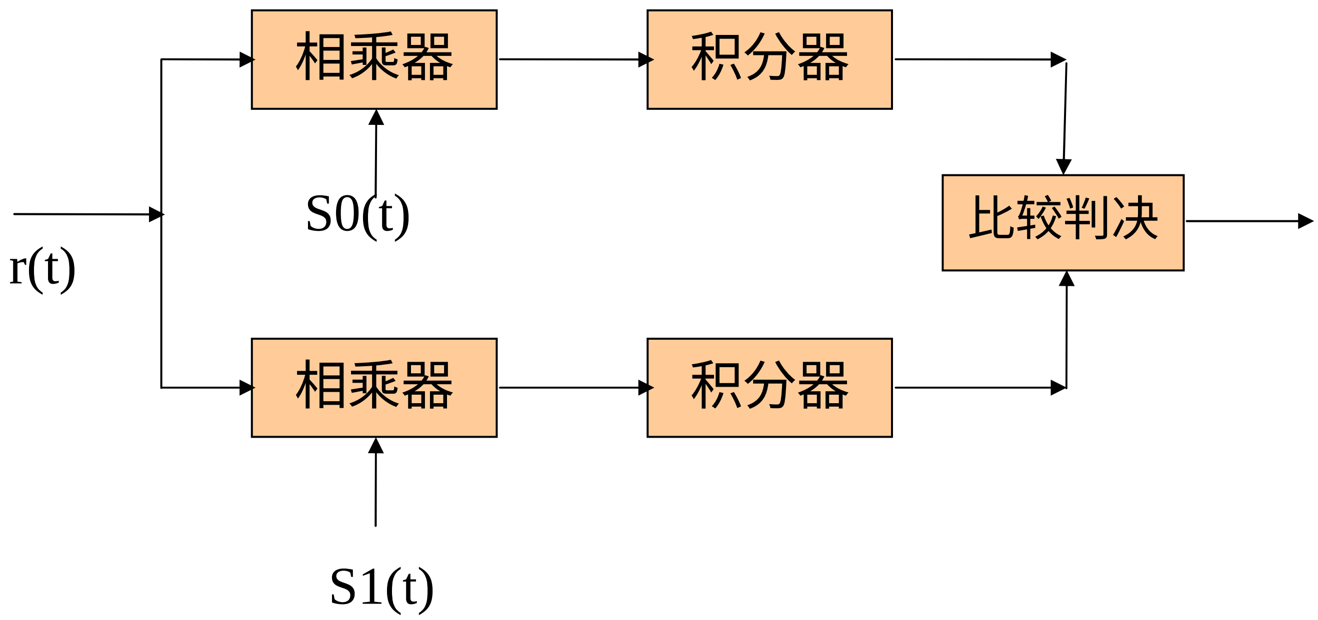
$$\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^T\left[r(t)-s_1(t)\right]^2dt\right\}<\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^T\left[r(t)-s_0(t)\right]^2dt\right\}$$

上式可以简化为 $\int_0^T r(t)s_1(t)dt<\int_0^T r(t)s_0(t)\ dt$

即，若 $\int_0^T r(t)s_1(t)dt<\int_0^T r(t)s_0(t)\ dt$ 则判为“0”

若 $\int_0^T r(t)s_1(t)dt>\int_0^T r(t)s_0(t)\ dt$ 则判为“1”

二进制等先验概率最佳接收机原理方框图



二进制等先验概率最佳接收机原理方框图

确知数字信号最佳接收机误码率

- 二进制等先验概率信号的误码率公式：

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}}dx$$

式中，

$$c = -\frac{1}{2}\int_0^T [s_0(t) - s_1(t)]^2 dt$$

- 上式表明，当先验概率相等时，对于给定的噪声功率，误码率仅和两种信号码元波形的差别$[s_0(t)-s_1(t)]$的能量有关，而与波形本身无关。

- 误码率的计算：首先用相关系数 ρ 表示上式中的 c
  - 相关系数ρ的定义：

$$\rho=\frac{\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt}{\sqrt{\left[\int_0^T s_0^2(t)dt\right]\left[\int_0^T s_1^2(t)dt\right]}}=\frac{\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt}{\sqrt{E_0E_1}}$$

式中，

$$E_0=\int_0^T s_0^2(t)dt \qquad E_1=\int_0^T s_1^2(t)dt$$

  - ρ的取值范围：

当$s_0(t) = s_1(t)$时，$\rho = 1$，为最大值；

当$s_0(t) = -s_1(t)$时，$\rho = -1$，为最小值。

所以，$-1 \le \rho \le +1$

  - 当$E_0 = E_1 = E_b$时，有

$$\rho=\frac{\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt}{E_b}$$

及

$$c=-\frac{1}{2}\int_0^T [s_0(t)-s_1(t)]^2 dt=-E_b(1-\rho)$$

- 将 $c = -\frac{1}{2}\int_0^T [s_0(t) - s_1(t)]^2 dt = -E_b(1-\rho)$

代入 $P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$

得出 $P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\int_{-\infty}^{-E_b(1-\rho)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$

化简后，有 $P_e = \frac{1}{2}\left[1 - erf\left(\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}}\right)\right] = \frac{1}{2} erfc\left[\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}}\right]$

式中，

$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2} dz$ — 误差函数

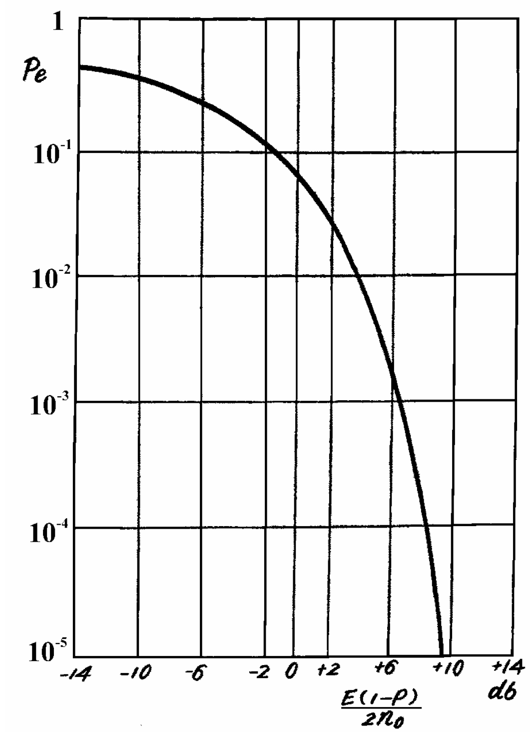
$erfc(x) = 1 - erf(x)$ —补误差函数

ρ — 相关系数；n_0 — 噪声功率谱密度。

$$P_e = \frac{1}{2}\left[1 - erf\left(\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}}\right)\right] = \frac{1}{2}erfc\left[\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}}\right]$$

- 上式是一个非常重要的理论公式，它给出了理论上二进制等能量数字信号误码率的最佳（最小可能）值。在下图中画出了它的曲线。
- 由上式可以看出：
  - 误码率和噪声功率无直接关系，而和噪声功率谱密度n_0有关；
  - 误码率和信号波形无直接关系，而和E_b及相关系数ρ有关；
  - 当$\rho = 1$时，误码率最大。这时的误码率$P_e = 1/2$。
  - 当$\rho = -1$时，误码率最小。这时

$$P_e = \frac{1}{2}\left[1 - erf\left(\sqrt{\frac{E_b}{n_0}}\right)\right] = \frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{n_0}}\right)$$



— 2PSK信号

- 当$\rho = 0$时，为正交信号。这时，

$$P_e = \frac{1}{2}\left[1 - erf\left(\sqrt{\frac{E_b}{2n_0}}\right)\right] = \frac{1}{2}erfc\left[\sqrt{\frac{E_b}{2n_0}}\right]$$ — 2FSK信号

- 当$E_0 = 0$，$E_1 = E_b$时

$$c = -\frac{1}{2}\int_0^T [s_0(t)]^2 dt$$

$$P_e = \frac{1}{2}\left(1 - erf\sqrt{\frac{E_b}{4n_0}}\right) = \frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{4n_0}}\right)$$ —2ASK信号

2ASK信号的性能比2FSK信号差3dB，而2FSK信号又比2PSK信号差3dB。

- 由 $$\frac{E_b}{n_0} = \frac{P_s T}{n_0} = \frac{P_s}{n_0(1/T)} = \frac{P_s}{n_0 B} = \frac{P_s}{P_n}$$

可知，E/n_0实际上相当于接收信号噪声功率比P_S/P_n

- 多进制通信系统：若不同码元的信号正交，且先验概率相等，能量也相等， 则有

返回

$$P_e = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{y+\left(\frac{2E}{n_0}\right)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]^{M-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

式中，M — 进制数；

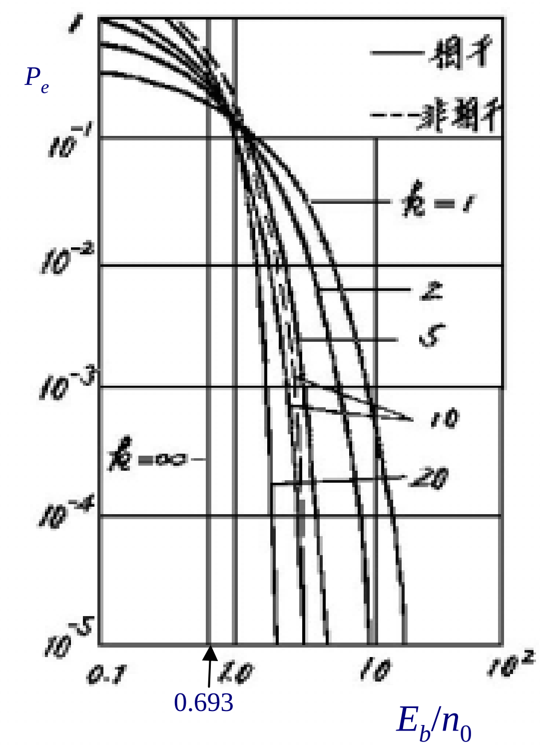
E — M进制码元能量；

n_0 — 单边噪声功率谱密度。

由于一个M进制码元中含有的比特数为$\log_2 M$，故每个比特的能量等于

$$E_b = E / \log_2 M$$

每比特的信噪比为 $\dfrac{E_b}{n_0} = \dfrac{E}{n_0 \log_2 M} = \dfrac{E}{n_0 k}$



当$k\to\infty$时，$E_b/n_0 = 0.693$(-1.6 dB)即可无误码。