

文章编号:1000-6893(2009)05-0842-07

低马赫数流动中的预处理 Euler 方程的收敛特性

刘晨, 王江峰, 伍贻兆

(南京航空航天大学 空气动力学系, 江苏 南京 210016)

Convergence Characteristics of Preconditioned Euler Equations at Low Mach Numbers

Liu Chen, Wang Jiangfeng, Wu Yizhao

(Department of Aerodynamics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

摘要: 对预处理后 Euler 方程在低马赫数流动数值模拟中的收敛特性进行了细致研究。首先采用量级分析法研究了 Weiss-Smith 预处理方法对低速情形下 Euler 方程收敛性的影响;然后针对低速情形下预处理后的 Euler 方程组中各方程的收敛性,提出了一个改进的预处理矩阵。数值模拟结果表明:Weiss-Smith 预处理方法可以很好地改善 Euler 方程在低速流动时的收敛特性,并且改进后的预处理矩阵在连续方程的收敛特性方面效果明显。

关键词: 计算流体力学; 预处理方法; 低马赫数; 收敛性; Euler 方程

中图分类号: V211.3 **文献标识码:** A

Abstract: The convergence characteristics of the preconditioned Euler equations at low Mach numbers were studied in this article. An order analysis was conducted to search for the convergence characteristics of Euler equations with Weiss-Smith preconditioner in low speed flow. The convergence characteristics of every equation were studied, and then a new preconditioning matrix was suggested. It is shown that excellent convergence rates and solution accuracy of Euler equations are obtained with the Weiss-Smith preconditioner, and the new preconditioning matrix can improve the convergence characteristics of continuity equations considerably in ultra-low speed flow.

Key words: computational fluid dynamics; preconditioning; low Mach numbers; convergence; Euler equations

随着计算流体力学(CFD)的不断发展,解初边值问题的时间相关法已经形成了较为成熟的理论,被广泛地应用于亚、跨、超和高超声速流场计算中。但是在低马赫数流动中,由于方程条件数增大导致的刚性问题使得方程收敛性严重恶化。近年来国内外发展的预处理方法很好地解决了上述问题^[1]。预处理方法是通过在原方程时间导数项乘以一个预处理矩阵来改变方程的特征值,从而解决低马赫数时的刚性问题。

本文从数值分析的角度^[2],通过对对流项和人工黏性项的量级分析研究了预处理方法对低马赫数时 Euler 方程收敛性的影响。另外,已有的研究表明预处理 Euler 方程在低马赫数时会出现严重的截断误差问题,这会导致方程在马赫数小到某一值时无法得到收敛解^[3-5]。这种截断误差的根源主要是计算机系统误差,而无法排除的。J. Sesterhenn 等^[6]通过参考量方法使得算法在马赫数降至 10^{-11} 时仍能保持较好的收敛特性,

但是实践发现对于更低的马赫数情形,由于预处理矩阵本身的截断误差问题,上述方法仍然会出现严重的误差。本文通过对 Weiss-Smith 预处理矩阵的量级分析,提出了该矩阵的改进形式,结合参考量方法,改善了 Euler 方程在极低马赫数流场模拟中的收敛特性。数值算例表明,本文发展的方法可以用于极低马赫数流动的流场分析。

1 理论分析

1.1 $Ma \rightarrow 0$ 时预处理方法对收敛性的影响

考虑到形式上的简便,这里讨论如下形式的二维 Euler 方程:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \hat{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + \hat{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} = \mathbf{0} \quad (1)$$

向量 $\partial \mathbf{Q}$ 、矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$ 和 $\hat{\mathbf{B}}$ 的表达式分别为

$$\left\{ \begin{aligned} \partial \mathbf{Q} &= \left[\frac{1}{\rho c} \partial p \quad \partial u \quad \partial v \quad \partial p - c^2 \partial \rho \right]^T \\ \hat{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} u & c & 0 & 0 \\ c & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} v & 0 & c & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ c & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

收稿日期: 2008-03-19; 修订日期: 2008-09-04

基金项目: 国家自然科学基金(90716013)

通讯作者: 刘晨 E-mail: liuchen@nuaa.edu.cn

式中: p 为压强; ρ 为密度; u 和 v 分别为笛卡尔坐标下的两个速度分量; c 为声速。选取来流声速 c_∞ 、来流密度 ρ_∞ 、来流温度 T_∞ 和参考长度 L 作为无量纲参数。

利用一阶迎风格式离散式(1), 于是得到如下的差分方程:

$$\hat{Q}_t + \hat{A}\hat{Q}_x + \hat{B}\hat{Q}_y = \frac{\Delta x}{2} |\hat{A}| \hat{Q}_{xx} + \frac{\Delta y}{2} |\hat{B}| \hat{Q}_{yy} \quad (2)$$

式中:

$$|\hat{A}| = \begin{bmatrix} c & u & 0 & 0 \\ u & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix}; \quad |\hat{B}| = \begin{bmatrix} c & 0 & v & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ v & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix}$$

采用 Weiss-Smith 预处理方法后的差分方程形式为

$$\hat{Q}_t + \Gamma^{-1}\hat{A}\hat{Q}_x + \Gamma^{-1}\hat{B}\hat{Q}_y = \frac{\Delta x}{2} |\Gamma^{-1}\hat{A}| \hat{Q}_{xx} + \frac{\Delta y}{2} |\Gamma^{-1}\hat{B}| \hat{Q}_{yy} \quad (3)$$

矩阵 $\Gamma^{-1}\hat{A}$, $\Gamma^{-1}\hat{B}$, $|\Gamma^{-1}\hat{A}|$ 和 $|\Gamma^{-1}\hat{B}|$ 的表达式分别为

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma^{-1}\hat{A} &= \begin{bmatrix} \epsilon u & \epsilon c & 0 & 0 \\ c & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad \Gamma^{-1}\hat{B} = \begin{bmatrix} \epsilon v & 0 & \epsilon c & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ c & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix} \\ |\Gamma^{-1}\hat{A}| &= \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & 0 & 0 \\ U_3 & U_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix} \\ |\Gamma^{-1}\hat{B}| &= \begin{bmatrix} V_1 & 0 & V_2 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & V_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

式中: $U_1 = \frac{\epsilon[u^2(\epsilon-1)+2c^2]}{\sqrt{u^2(\epsilon-1)^2+4c^2\epsilon}}$; $U_2 =$

$$\frac{\epsilon cu(\epsilon+1)}{\sqrt{u^2(\epsilon-1)^2+4c^2\epsilon}}; U_3 = \frac{cu(\epsilon+1)}{\sqrt{u^2(\epsilon-1)^2+4c^2\epsilon}};$$

$$U_4 = \frac{u^2(1-\epsilon)+2c^2\epsilon}{\sqrt{u^2(\epsilon-1)^2+4c^2\epsilon}}; V_1 = \frac{\epsilon[v^2(\epsilon-1)+2c^2]}{\sqrt{v^2(\epsilon-1)^2+4c^2\epsilon}};$$

$$V_2 = \frac{(\epsilon+1)\epsilon cv}{\sqrt{v^2(\epsilon-1)^2+4c^2\epsilon}}; V_3 = \frac{(\epsilon+1)cv}{\sqrt{v^2(\epsilon-1)^2+4c^2\epsilon}};$$

$$V_4 = \frac{v^2(1-\epsilon)+2c^2\epsilon}{\sqrt{v^2(\epsilon-1)^2+4c^2\epsilon}}; \epsilon = \min[\max(Ma^2, Ma_\infty^2), 1].$$

为了分析简单, 忽略 y 向速度分量 v 对于

$Ma \rightarrow 0$ 的流动, 采用前面的无量纲参数, 可以分析得到:

$$\begin{cases} \rho \Leftrightarrow O(1), & u \Leftrightarrow O(Ma), & p \Leftrightarrow O(1) \\ c \Leftrightarrow O(1), & T \Leftrightarrow O(1), & \epsilon \Leftrightarrow O(Ma^2) \end{cases}$$

显然流动速度脉动 $\partial u \Leftrightarrow O(Ma)$ 。然后根据总焓关系式和等熵关系式就可以得到:

$$\partial T \Leftrightarrow O(Ma^2), \quad \partial p \Leftrightarrow O(Ma^2), \quad \partial \rho \Leftrightarrow O(Ma^2)$$

于是

$$\partial \hat{Q} \Leftrightarrow [O(Ma^2) \quad O(Ma) \quad O(Ma) \quad O(Ma^2)]^T \quad (4)$$

显然这个结果对 $\hat{Q}_x, \hat{Q}_y, \hat{Q}_{xx}, \hat{Q}_{yy}$ 都是一样的。

对流矩阵中各元素的量级如下:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} O(Ma) & O(1) & 0 & 0 \\ O(1) & O(Ma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O(Ma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & O(Ma) \end{bmatrix} \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & O(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ O(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

于是

$$\hat{A}\hat{Q}_x + \hat{B}\hat{Q}_y = [O(Ma) \quad O(Ma^2) \quad O(Ma^2) \quad O(Ma^3)]^T \quad (5)$$

而人工黏性矩阵中各元素量级为

$$\left\{ \begin{aligned} |\hat{A}| &= \begin{bmatrix} O(1) & O(Ma) & 0 & 0 \\ O(Ma) & O(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O(Ma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & O(Ma) \end{bmatrix} \\ |\hat{B}| &= \begin{bmatrix} O(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

所以人工黏性项的量级为

$$\frac{\Delta x}{2} |\hat{A}| \hat{Q}_{xx} + \frac{\Delta y}{2} |\hat{B}| \hat{Q}_{yy} =$$

$$[O(Ma^2) \quad O(Ma) \quad O(Ma) \quad O(Ma^3)]^T \quad (6)$$

此时 Euler 方程中除了能量方程外, 其余方程中人工黏性项与对流项在 $Ma \rightarrow 0$ 时量级并不匹配。连续方程中人工黏性偏低, 动量方程中人工黏性偏大。于是不加预处理的 Euler 方程在 $Ma \rightarrow 0$ 时将无法得到正确的数值解。

预处理后的对流矩阵中各元素量级变为

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma^{-1}\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} O(Ma^3) & O(Ma^2) & 0 & 0 \\ O(1) & O(Ma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O(Ma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & O(Ma) \end{bmatrix} \\ \Gamma^{-1}\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & O(Ma^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ O(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

于是

$$\begin{aligned} & \Gamma^{-1}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{Q}}_x + \Gamma^{-1}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{Q}}_y = \\ & [O(Ma^3) \quad O(Ma^2) \quad O(Ma^2) \quad O(Ma^3)]^T \end{aligned} \quad (7)$$

对应的人工黏性矩阵中各元素的量级变为

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Gamma^{-1}\hat{\mathbf{A}}| = \begin{bmatrix} O(Ma) & O(Ma^2) & 0 & 0 \\ O(1) & O(Ma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O(Ma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & O(Ma) \end{bmatrix} \\ |\Gamma^{-1}\hat{\mathbf{B}}| = \begin{bmatrix} O(Ma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O(Ma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

于是人工黏性项的量级为

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{2} |\Gamma^{-1}\hat{\mathbf{A}}| \hat{\mathbf{Q}}_{xx} + \frac{\Delta y}{2} |\Gamma^{-1}\hat{\mathbf{B}}| \hat{\mathbf{Q}}_{yy} = \\ & [O(Ma^3) \quad O(Ma^2) \quad O(Ma^2) \quad O(Ma^3)]^T \end{aligned} \quad (8)$$

此时各个方程的量级都是匹配的,即预处理方法顺利地解决了差分方程中对流项与人工黏性项在 $Ma \rightarrow 0$ 时量级不匹配的问题,此时可以通过数值求解的方法得到正确合理的解。

1.2 $Ma \rightarrow 0$ 时预处理 Euler 方程收敛性研究

这里讨论 Weiss-Smith 预处理的二维守恒型 Euler 方程:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \tilde{\Gamma}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) = \mathbf{0} \quad (9)$$

向量 $\mathbf{Q}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$ 与矩阵 $\tilde{\Gamma}^{-1}$ 的表达式分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q} = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad e_i]^T \\ \mathbf{E} = [\rho u \quad \rho u^2 + p \quad \rho uv \quad \rho hu]^T \\ \mathbf{F} = [\rho v \quad \rho vu \quad \rho v^2 + p \quad \rho hv]^T \\ \tilde{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} + \mathbf{\Pi} \phi \end{array} \right.$$

式中: $e_i = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2)$; $h = \frac{e_i + p}{\rho}$; $\phi = \frac{\gamma-1}{c^2} (\varepsilon-1)$; 矩阵 $\mathbf{\Pi}$ 的表达式为

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u^2 + v^2) & -u & -v & 1 \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2)u & -u^2 & -uv & u \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2)v & -uv & -v^2 & v \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2)h & -uh & -vh & \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \end{bmatrix}$$

根据 1.1 节的分析有

$$\begin{aligned} & \partial \mathbf{E} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} O(Ma^3) + O(Ma) \\ O(Ma^4) + O(Ma^2) \\ O(Ma^4) + O(Ma^2) \\ O(Ma) + O(Ma^3) + O(Ma^5) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} O(Ma) \\ O(Ma^2) \\ O(Ma^2) \\ O(Ma) \end{bmatrix} \\ & \tilde{\Gamma}^{-1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} O(1) & O(Ma) & O(Ma) & O(1) \\ O(Ma^3) & O(1) & O(Ma^2) & O(Ma) \\ O(Ma^3) & O(Ma^2) & O(1) & O(Ma) \\ O(Ma^2) & O(Ma) & O(Ma) & O(Ma^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以在采用有限体积离散时,于是有

$$\begin{aligned} & \Delta \mathbf{Q} \Leftrightarrow \frac{\Delta t}{\Delta l} \tilde{\Gamma}^{-1} \Delta \mathbf{E} \Leftrightarrow \\ & \frac{\Delta t}{\Delta l} [O(Ma) \quad O(Ma^2) \quad O(Ma^2) \quad O(Ma^3)]^T \end{aligned} \quad (10)$$

式中: Δt 为计算时间步长,根据时间步长的定义易知 $\Delta l / \Delta t \Leftrightarrow O(Ma)$, 于是

$$\begin{aligned} & \partial \mathbf{Q} \Leftrightarrow [O(Ma) \quad O(Ma^2) \quad O(Ma^2) \quad O(Ma^3)]^T \cdot \\ & O\left(\frac{1}{Ma}\right) \Leftrightarrow [O(1) \quad O(Ma) \quad O(Ma) \quad O(Ma^2)]^T \end{aligned} \quad (11)$$

而 $\partial \mathbf{Q}$ 在 $Ma \rightarrow 0$ 时的实际量级可以通过基本参数的量级推导得

$$\begin{aligned} & \partial \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \partial \rho \\ u \partial \rho + \rho \partial u \\ v \partial \rho + \rho \partial v \\ \frac{1}{\gamma-1} \partial p + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \partial \rho + \rho (u \partial u + v \partial v) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ & [O(Ma^2) \quad O(Ma) \quad O(Ma) \quad O(Ma^2)]^T \end{aligned} \quad (12)$$

显然从量级分析的结果来看动量方程和能量方程

的量级是一致的,但是连续方程的量级存在较大的差异,于是在 $Ma \rightarrow 0$ 时数值求解得到的密度值会出现较大的误差。分析表明这种误差正是由于计算机系统误差导致的。为了保证在 $Ma \rightarrow 0$ 时连续方程也能保持相当的计算精度,就必须对预处理矩阵做适当的改进。

根据 ∂Q 的求解过程,可以知道

$$\partial Q \Leftrightarrow \begin{bmatrix} O(1) + O(Ma^2) & \dots & \dots & \dots \\ O(Ma) & \dots & \dots & \dots \\ O(Ma) & \dots & \dots & \dots \\ O(1) & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} O(1) \\ O(Ma) \\ O(Ma) \\ O(1) \end{bmatrix} \quad (13)$$

于是可以看出,连续方程在 $Ma \rightarrow 0$ 时出现数值误差主要是由于预处理矩阵中的第一列头尾两个元素导致的。为了保证 $\partial \rho \Leftrightarrow O(Ma^2)$,就必须使得头尾两个元素都保持为 $O(Ma^2)$ 的量级。下面分析这两个元素的量级,即

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{11}^{-1} &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2}(u^2 + v^2) \frac{\gamma-1}{c^2} (\epsilon - 1)}_{O(Ma^2)} \\ \tilde{\Gamma}_{14}^{-1} &= \underbrace{\frac{\gamma-1}{c^2} (\epsilon - 1)}_{O(1)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

为了符合上面的要求,做如下改进:

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{\Gamma}_{11}^{-1})' &= \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \frac{\gamma-1}{c^2} (\epsilon - 1) \\ (\tilde{\Gamma}_{14}^{-1})' &= \frac{\gamma-1}{c^2} \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

此时

$$\partial Q \Leftrightarrow \begin{bmatrix} O(Ma^2) & \dots & \dots & \dots \\ O(Ma) & \dots & \dots & \dots \\ O(Ma) & \dots & \dots & \dots \\ O(Ma^2) & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} O(1) \\ O(Ma) \\ O(Ma) \\ O(1) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} O(Ma^2) & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

于是通过数值求解得到的连续方程的量级与理论分析一致,从而解决了上面分析的量级不匹配问题。

2 数值分析

2.1 控制方程及数值方法

控制方程采用预处理后的守恒型二维 Euler 方程,方程具体形式参见 1.2 节。当 $Ma \rightarrow 0$ 时,

压力、密度和温度的变化量都很小,于是引入参考量来减小截断误差^[4],即 $p = p' + p_\infty, \rho = \rho' + \rho_\infty, T = T' + T_\infty$ 。为了方程形式的简便,只是将连续方程的守恒变量换为脉动密度,将动量方程数值通量以及能量方程守恒变量中的压力换为脉动压力,其余的流场参数均使用原来的值。这样就可以保持控制方程的形式不变。

控制方程离散采用非结构有限体积方法,空间离散采用预处理的 Jameson 中心格式^[7],时间推进采用 5 步 Runge-Kutta 格式,并采用当地时间步长方法加速收敛。物面边界为无穿透条件,而远场边界采用文献^[8]建议的简化边界,即

入流:

$$\rho_b = \rho_\infty, \quad u_b = u_\infty, \quad v_b = v_\infty, \quad p_b = p_{int}$$

出流:

$$\rho_b = \rho_{int}, \quad u_b = u_{int}, \quad v_b = v_{int}, \quad p_b = p_\infty$$

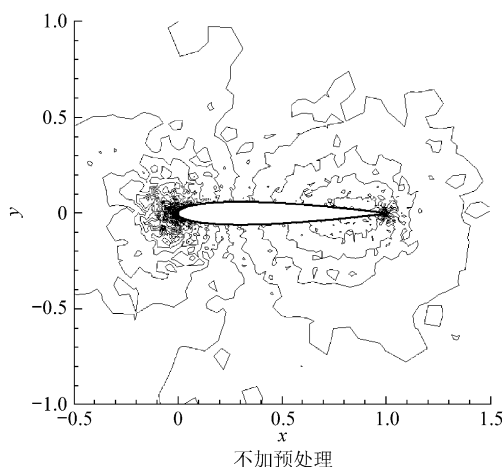
其中:下标 ∞ 和 int 分别表示来流和内场值。

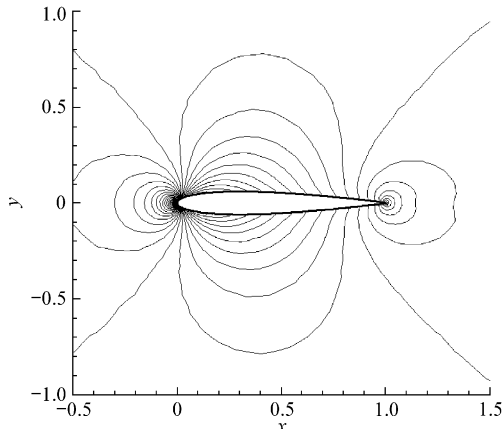
2.2 数值算例

算例都是 NACA0012 翼型绕流,均采用同一个非结构网格,其中包含了 6 028 个三角形单元。计算了 $Ma = 10^{-3}$ 和 $Ma = 10^{-20}$ 两种情形。前者用来验证 Weiss-Smith 预处理方法的有效性,后者用来验证改进的预处理矩阵对 Euler 方程收敛性的影响。

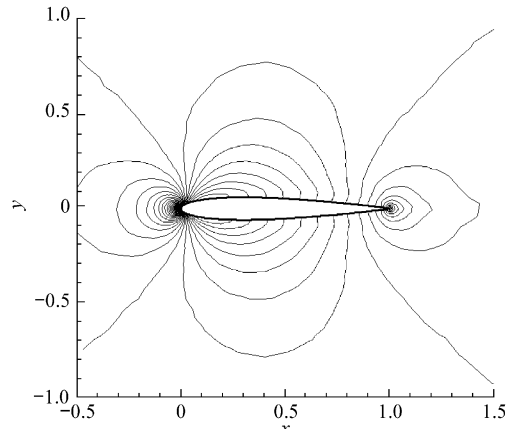
(1) $Ma = 10^{-3}$ 情形

图 1(a)~(c)分别给出了预处理前后计算得到的压力、密度和马赫数分布。图 2 给出计算得到的翼型上的压力分布,并与文献^[9]中的值进行了对比。图 3 和图 4 分别给出了密度和压力残差值(RES)收敛历程对比。结果表明 Weiss-Smith 预处理可以明显改善 Euler 方程对低速流场的模





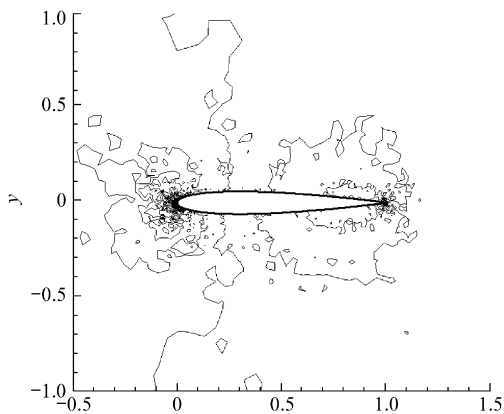
Weiss-Smith预处理
(a) 压力分布图



Weiss-Smith预处理
(c) 马赫数分布图

图1 流场分布图 ($Ma=10^{-3}$)

Fig. 1 Display of contours ($Ma=10^{-3}$)



不加预处理

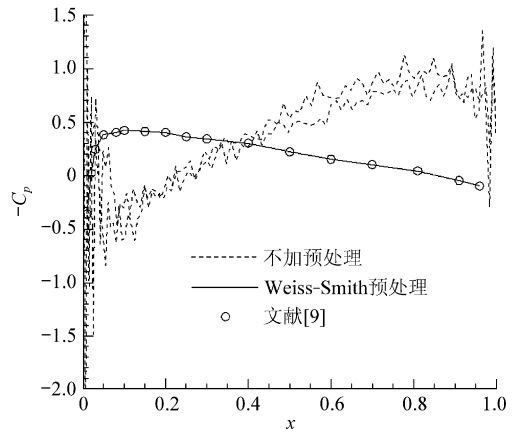
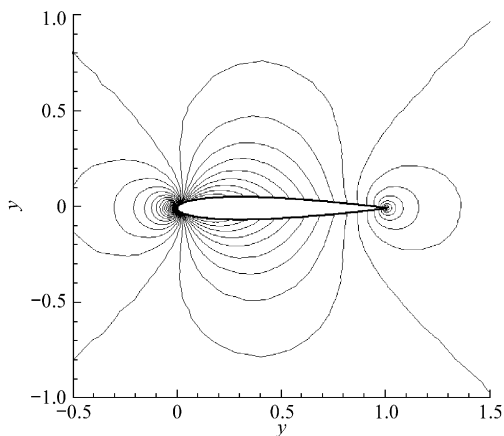


图2 翼型表面压力分布 ($Ma=10^{-3}$)

Fig. 2 Pressure distribution ($Ma=10^{-3}$)



Weiss-Smith预处理
(b) 密度分布图

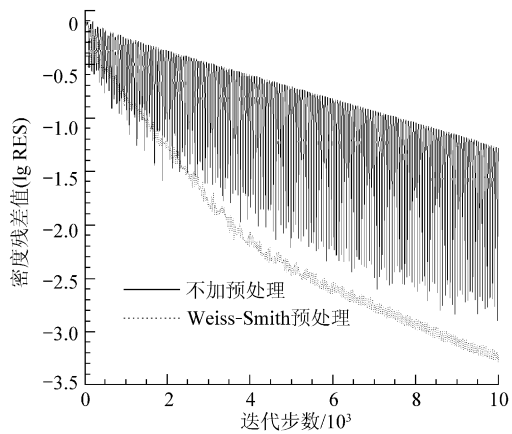
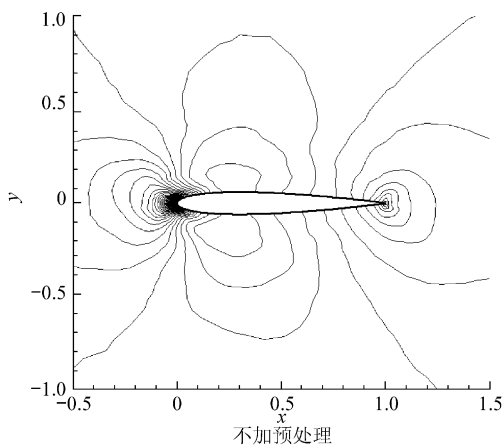


图3 密度残差值收敛历程 ($Ma=10^{-3}$)

Fig. 3 Convergence history of density ($Ma=10^{-3}$)



不加预处理

拟。不加预处理时密度和压力残差值都出现明显的数值振荡,而密度和压力流场也存在明显的数值扰动;预处理后方程收敛性得到明显改善,并得到了光滑的流场解和与文献[9]吻合的压力分布。

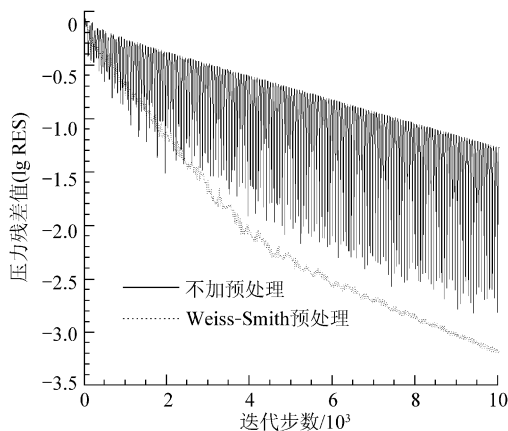
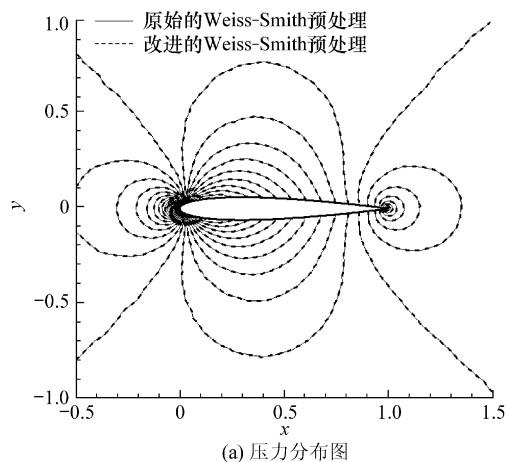


图 4 压力残差值收敛历程 ($Ma=10^{-3}$)

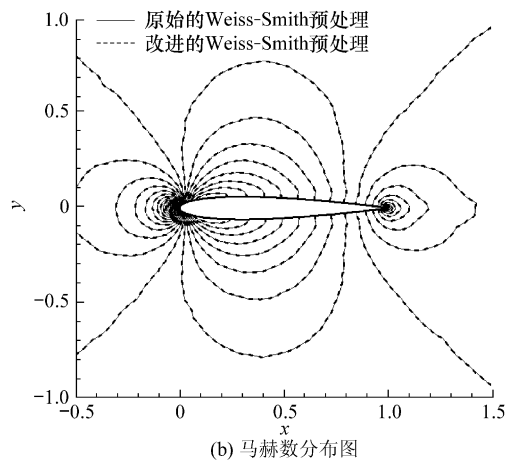
Fig. 4 Convergence history of pressure ($Ma=10^{-3}$)

(2) $Ma=10^{-20}$ 情形

图 5(a)和(b)分别给出了预处理矩阵改进前后计算得到的压力和马赫数分布图。从图中可以看出,改进对流场的压力和马赫数计算并不会产生影响。图 6 中翼型上的压力分布和图 7 中压力残差值收敛历程也验证了这一点。图 8 和图 9 分



(a) 压力分布图



(b) 马赫数分布图

图 5 压力分布图和马赫数分布图 ($Ma=10^{-20}$)

Fig. 5 Contours of pressure and Mach number distribution ($Ma=10^{-20}$)

别给出了矩阵改进前后的密度分布和密度残差值收敛历程。结果表明原始的 Weiss-Smith 预处理方法在求解极低速流动时,密度流场解会出现较大的数值误差。通过对预处理矩阵的改进,密度流场的收敛性得到了明显改善,并且最终得到了合理的密度流场结果。

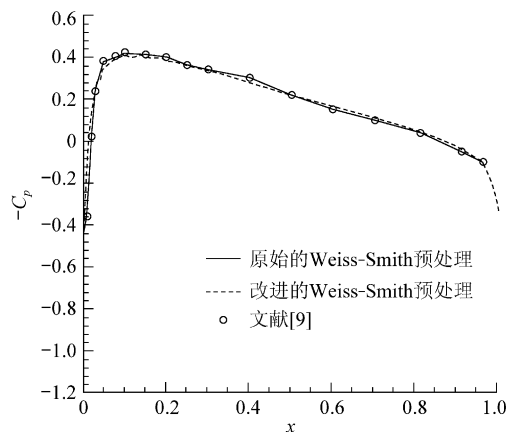


图 6 翼型表面压力分布 ($Ma=10^{-20}$)

Fig. 6 Pressure distribution ($Ma=10^{-20}$)

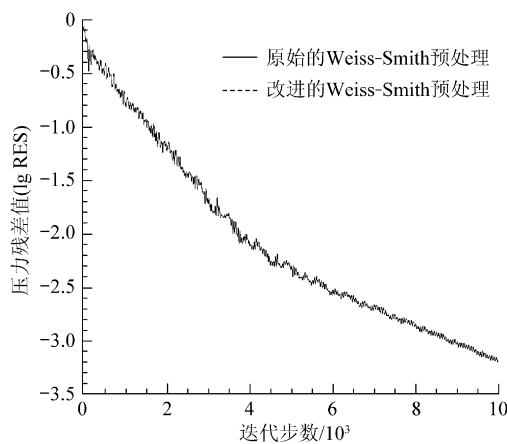
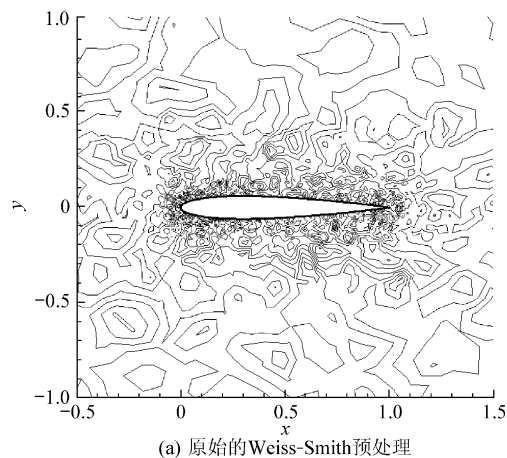
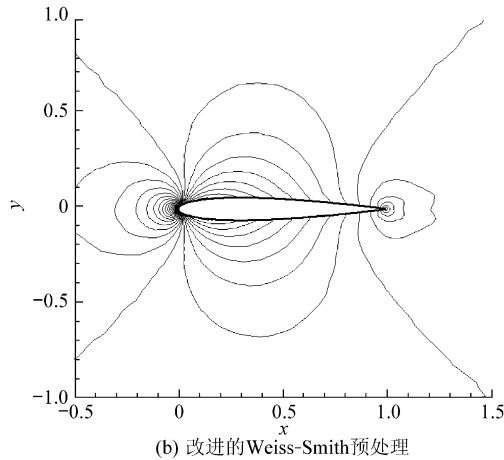
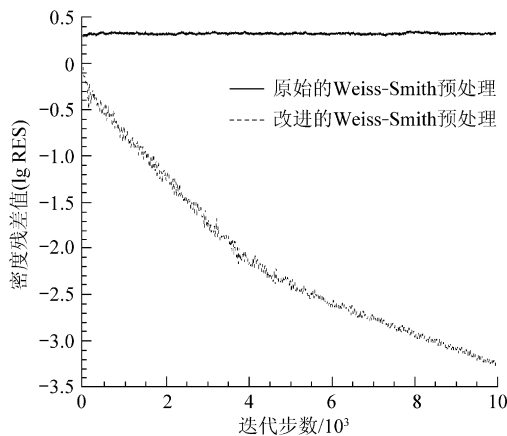


图 7 压力残差值收敛历程 ($Ma=10^{-20}$)

Fig. 7 Convergence history of pressure ($Ma=10^{-20}$)



(a) 原始的Weiss-Smith预处理

图8 密度分布图($Ma=10^{-20}$)Fig. 8 Density contours ($Ma=10^{-20}$)图9 密度残差收敛历程($Ma=10^{-20}$)Fig. 9 Convergence history of density ($Ma=10^{-20}$)

3 结论

对低马赫数情形下 Euler 方程的收敛特性进行了详细研究。研究表明:量级分析方法可以成功地用于讨论低马赫数情形下 Weiss-Smith 预处理方法对 Euler 方程收敛性的影响;针对 Weiss-Smith 预处理方法中连续方程在极低马赫数情形时出现的收敛性问题,提出了对预处理矩阵的改进方法,数值算例表明改进的效果是明显的。

参考文献

- [1] Unrau D, Zingg D W. Viscous airfoil computations using local preconditioning[R]. AIAA-1997-2027, 1997.
- [2] Lee D. Local preconditioning of the Euler and Navier-Stokes equations[D]. Lansing: University of Michigan, 1996: 113-119.
- [3] Lee S H. Convergence characteristics of preconditioned Euler equations[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 208:266-288.
- [4] Lee S H. Cancellation problem of preconditioning method at low Mach numbers[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 225:1199-1210.
- [5] Zaccanti M R. Analysis and design of preconditioning methods for the Euler equations[D]. Starkville: Mississippi State University, 1999:59-63.
- [6] Sesterhenn J, Muller B, Thomann H. On the cancellation program in calculating compressible low Mach number flows[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 151: 597-615.
- [7] 肖中云. 旋翼流场数值模拟方法研究[D]. 绵阳:中国空气动力研究与发展中心, 2007.
Xiao Zhongyun. Investigation of computational modeling techniques for rotor flowfields[D]. Mianyang, China Aerodynamics Research and Development Center, 2007. (in Chinese)
- [8] Turkel E, Fiterman A, van Leer B. Preconditioning and the limit to the incompressible flow equations[R]. NASA-CR-191500, 1993.
- [9] Abbott I H, von Doenhoff A E. Theory of wing sections [M]. New York: Dover Publications, 1959: 311-381.

作者简介:

刘晨(1982—) 男,博士研究生。主要研究方向:计算流体力学。

Tel: 025-84892505

E-mail: liuchen@nuaa.edu.cn

王江峰(1970—) 男,博士,教授。主要研究方向:计算流体力学和高超声速空气动力学。

Tel: 025-84891231

E-mail: wangjf@nuaa.edu.cn

伍贻兆(1945—) 男,博士,教授,博士生导师。主要研究方向:计算空气动力学,跨声速空气动力学及高超声速空气动力学。

Tel: 025-84892894

E-mail: wyzao@nuaa.edu.cn

(责任编辑:鲍亚平)