

文章编号:1000-6893(2009)05-0855-06

基于混合验前分布的制导精度评定方法

杨华波, 蔡洪, 张士峰

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

Evaluation of Missile Guidance Precision Based on Hybrid Prior Distribution

Yang Huabo, Cai Hong, Zhang Shifeng

(College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defense Technology,
Changsha 410073, China)

摘 要: 如何合理有效地利用验前信息是小子样评定中的关键问题。针对导弹制导精度评定, 提出了一种根据验前数据构造验前分布的方法, 并结合验前信息可信度给出了一种混合验前分布。通过对参数验后估计的分析, 该方法能够有效避免验前信息“淹没”现场信息的情况, 而验前信息可信度则通过验后边缘分布得到。通过对验后估计均方差(MSE)的分析, 给出了验前信息利用的一些基本原则, 为工程应用提供了指导。

关键词: 小子样; Bayes 方法; 混合验前分布; 可信度; 估计

中图分类号: O212.8 **文献标识码:** A

Abstract: How to use prior information effectively and reasonably in the Bayesian method is a key issue in small sample evaluation. For the evaluation of guidance precision of missiles, the article presents a new approach to construct the prior distribution in terms of prior data, and put forward a hybrid prior distribution after introducing the concept of prior data credibility. The hybrid distribution can overcome effectively the domination of prior information over current data through analyzing the posterior estimation of interesting parameters, while the credibility of the prior data can be obtained at the same time from posterior marginal distribution. Some basic principles for the application of prior data to engineering practice are introduced through calculating the mean square error (MSE) of posterior estimation.

Key words: small sample; Bayes method; hybrid prior distribution; credibility; estimation

在工程实际中,小子样问题是普遍存在的。如远程导弹的实弹射击飞行试验^[1-2]、大型复杂结构的寿命试验等^[3],通常都是只有少量的现场样本数据,在这种情况下,经典的统计方法受到了严重的挑战,冯蕴雯等^[3-4]将概率统计方法与经验方法结合,对特小子样下的寿命评估问题进行了讨论,其结论是基于工程实际经验的。Bayes 方法作为研究小子样问题的一种有效途径,多年来一直受到人们的重视^[5-7],并且在许多领域都得到了很好的应用。Bayes 方法综合利用验前信息实现参数的验后统计推断。工程中,各类验前信息通常是大量存在的,如各种地面测试试验信息、模拟打靶试验以及相似产品的试验信息等,如何充分地利用验前信息是 Bayes 统计推断中的一个关键问题^[8-9],也是工业部门非常关注的一个问题。一般情况下,验前信息和现场试验信息具有较强的相关性,但它们往往并非服从同一总体,因此那种直接将验前信息和现场信息进行融合的方法

是值得商榷的。国内外对于 Bayes 方法的讨论很多,但对于验前信息的合理运用问题,则讨论得比较少。J. G. Ibrahim 等^[10-11]通过引入幂参数表示验前信息与现场信息的一致性,分析了幂验前分布的一些优良性质, Y. Y. Duan^[12]将修正幂验前方法应用于水质量评价问题,运用修正幂验前方法讨论了 Bayes 方法中验前信息的合理运用问题,但其中的验前分布通过似然函数方法构造,在仿真样本数量较多的情况下,该方法值得商榷。本文以导弹制导精度评定为例,讨论验前信息的合理运用问题。首先,提出了一种新的针对制导精度评定的验前分布构造方法,并证明了该方法与传统的基于似然函数的构造方法相比,能够有效避免验前信息“淹没”验后子样的问题。然后通过考虑验前信息的可信度,引入混合验前分布,而验前信息可信度 c 由验后边缘分布得到,不需要主观信息。最后,应用 Bayes 方法获得参数的验后估计,分析了在不同类型的验前信息与现场信息情况下验后估计的均方差(MSE),给出了验前信息利用的基本原则。

1 混合验前分布

导弹制导精度的评定,特别是小样本情况下的制导精度评定,目前仍然是比较困难的问题^[13-14]。利用仿真信息进行导弹制导精度评估是目前常用的做法,有助于缩短研制周期,减少研制经费。而仿真验前信息通常可以大量得到,在现场样本很少的情况下,如何充分利用仿真验前信息,避免仿真验前信息“淹没”现场信息^[8],是本文讨论的主要问题。

制导精度评定中感兴趣的参数是均值与方差 $\theta = \{\mu, \sigma^2\}$, 假设存在验前数据 D_0 与现场试验数据 D 。在许多情况下, D_0 与 D 并不服从同一分布, 这里用可信度 c 表示验前数据 D_0 相对于现场数据 D 的相容性, $c \in [0, 1]$ 。如果 $c=1$, 则表示 D_0 与 D 完全相容; 如果 $c=0$, 则表示 D_0 与 D 完全不相容; 如果 $0 < c < 1$, 则表示部分相容。使用式(1)所示的混合验前密度作为现场数据 D 的验前分布。

$$\pi(\theta | D_0, c) = c\pi(\theta | D_0) + (1-c)\pi_0(\theta) \quad (1)$$

式中: $\pi(\theta | D_0)$ 为由验前数据 D_0 获得的关于 θ 的验前分布; 而 $\pi_0(\theta)$ 取为无信息验前分布。

在制导精度评定中, 一般使用正态-逆 Gamma 分布作为均值与方差的验前概率密度函数^[6-9, 12, 15], 因为正态-逆 Gamma 分布是正态分布的自然共轭分布, 其验后分布具有解析表达式, 分布形式可表示为 $\pi_0(\mu, V) \sim N(\mu_0, \eta_0 V) \cdot \Gamma^{-1}(\alpha_0, \beta_0)$ 。其中: $V = \sigma^2$; $\mu_0, \eta_0, \alpha_0, \beta_0$ 为验前超参数。

假设通过模拟打靶试验获得了大量的仿真样本, 由于导弹在模拟打靶时, 一般通过正态分布抽样仿真中的不确定性参数^[15], 所以仿真得到的落点纵横向偏差样本一般情况下假设为正态分布^[9]。如何根据这些样本构造验前分布? 这里将 n 个仿真样本分为 N 组, 每组包含 m 个数据。则针对每组数据, 可以得到一组均值与方差 $\hat{\mu}^{(j)}$, $\hat{V}^{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, N$)。根据 Bayes 统计中关于共轭分布的原则, 将抽样数据 $(\hat{\mu}^{(1)}, \hat{\mu}^{(2)}, \dots, \hat{\mu}^{(N)})$, $(\hat{V}^{(1)}, \hat{V}^{(2)}, \dots, \hat{V}^{(N)})$ 拟合为正态-逆 Gamma 分布

$$g(\alpha_0, \beta_0) \sim N(\mu_0, \eta_0 V) \cdot \Gamma^{-1}(\alpha_0, \beta_0) \quad (2)$$

式中:

$$\mu_0 = \frac{\sum_{j=1}^N \hat{\mu}^{(j)}}{N}$$

$$\eta_0 = \frac{1}{2\beta_0 - 3}$$

$$\beta_0 = \frac{(\hat{V}^N)^2}{\hat{\sigma}_V^2} + 2$$

$$\alpha_0 = (\beta_0 - 1)\hat{V}^N$$

$$\hat{V}^N = \frac{\sum_{j=1}^N \hat{V}^{(j)}}{N}$$

$$\hat{\sigma}_V^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\hat{V}^{(j)} - \hat{V}^N)^2$$

根据上述关系即可得到超参数 $\mu_0, \eta_0, \alpha_0, \beta_0$ 的估计。

对于上述的构造方法, 有如下结论: $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_0 = (m+3)/2$ 。

证明 假设仿真样本服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。由正态分布可知, 根据上述分组方法, 每组数据的样本方差 $\hat{V}^{(j)}$ 服从自由度为 $m-1$ 的卡方分布, 即

$$\frac{(m-1)\hat{V}^{(j)}}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

由卡方分布的均值与方差, 可得到

$$\left. \begin{aligned} E(\hat{V}^{(j)}) &= (m-1) \frac{\sigma^2}{m-1} = \sigma^2 \\ \text{Var}(\hat{V}^{(j)}) &= 2(m-1) \left(\frac{\sigma^2}{m-1} \right)^2 = 2 \frac{(\sigma^2)^2}{m-1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

又根据上述的构造方法

$$\left. \begin{aligned} E(\hat{V}^{(j)}) &= \frac{\alpha_0}{\beta_0 - 1} = \sigma^2 \\ \text{Var}(\hat{V}^{(j)}) &= \frac{\alpha_0^2}{(\beta_0 - 1)^2 (\beta_0 - 2)} = 2 \frac{(\sigma^2)^2}{m-1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

联合式(3)和式(4)可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_0 = \frac{m+3}{2} \quad (5)$$

式(5)给出在 n 或 N 很大的情况下 β_0 是收敛的, 而且 β_0 的极限值与 N 以及仿真样本总数无关, 而仅仅与 m 有关, 该结论非常重要, 与传统的似然函数方法的结论是完全不同的。

2 验后分布参数的统计推断

假设现场试验数据 D 服从正态分布, 在获得现场试验数据后, θ 的验后分布为

$$\pi(\theta | D_0, D, c) \sim \pi(\theta | D_0, c) L(\theta | D) =$$

$$c\pi(\theta | D_0)L(\theta | D) + (1 - c)\pi_0(\theta)L(\theta | D)$$

其中: $L(\theta | D)$ 为现场数据的似然函数。

对于制导精度评定而言, $\pi_0(\theta) \propto (1/\sigma^2)^a$, $a > 0$ 。当 $a=1$ 时, 对应的验前为参考验前; 当 $a=3/2$ 时, 对应的验前为 Jeffreys 验前^[5-6]。则经过一系列的推导, 用 $\{\mu, \sigma^2\}$ 代替 θ , 可以得到验后概率密度为

$$\pi(\mu, \sigma^2 | D_0, D, c) \propto \lambda \pi_0(\mu, \sigma^2 | D_0, D) + (1 - \lambda)\pi_1(\mu, \sigma^2 | D) \quad (6)$$

式中:

$$\pi_0(\mu, \sigma^2 | D) \sim N(\mu_0^{(1)}, \eta_0^{(1)} \sigma^2) \Gamma^{-1}(\alpha_0^{(1)}, \beta_0^{(1)})$$

$$\pi_1(\mu, \sigma^2 | D) \sim N(\mu_1^{(1)}, \eta_1^{(1)} \sigma^2) \Gamma^{-1}(\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(1)})$$

$$\mu_0^{(1)} = \frac{n_0 \mu_0 + n \bar{x}}{n_0 + n}; \quad \eta_0^{(1)} = \frac{1}{n_0 + n}; \quad n_0 = \frac{1}{\eta_0}$$

$$\alpha_0^{(1)} = \alpha_0 + \frac{1}{2} n \bar{\sigma}^2 + \frac{1}{2} \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{n \eta_0 + 1}$$

$$\beta_0^{(1)} = \beta_0 + \frac{n}{2}; \quad \mu_1^{(1)} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \eta_1^{(1)} = \frac{1}{n}$$

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \quad \beta_1^{(1)} = \frac{n + 2a - 3}{2}$$

其中: $\bar{x}, \bar{\sigma}^2$ 为现场试验数据的统计均值与方差,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

加权系数为

$$\lambda = \frac{c}{c + (1 - c)K} \quad (7)$$

式中:

$$K = m(D | \pi_1) / m(D | \pi_0)$$

$$m(D | \pi_0) = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\eta_0^{(1)}} (\alpha_0)^{\beta_0} \Gamma(\beta_0^{(1)})}{\sqrt{\eta_0} \Gamma(\beta_0) (\alpha_0^{(1)})^{\beta_0^{(1)}}}$$

$$m(D | \pi_1) = \frac{\Gamma(\beta_1^{(1)}) (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \sqrt{\eta_1^{(1)}}}{(\alpha_1^{(1)})^{\beta_1^{(1)}}}$$

由式(2)及式(6)可以看出, β_0 与等效验前样本量 n_0 直接相关, 即使用上述的验前分布构造方法, 等效验前样本容量 n_0 与总的样本数无关, 只与每组的样本个数 m 有关。

由式(6)可以看出, 验后密度函数同样由两部分组成, 一部分与验前信息有关, 另一部分只与现场信息有关, 其形式与式(1)完全相同, 只是系数不同。系数 λ 表示在考虑现场信息后, 验前信息与现场信息的相容性。 λ 在验后统计中扮演重要角色, 且与 K 值密切相关, 而 K 值与 $n_0, \mu_0, \sigma_0, n, \mu$ 和 σ 都有关系。下面分析在不同的 $n_0, \mu_0, \sigma_0, n, \mu$ 和 σ 组合情况下, λ 的变化情况。假设 $a=3/2, K$

重写为

$$K = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \Gamma(n/2)}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n+n_0}}{\sqrt{n_0}} \frac{\Gamma(n_0/2)}{\Gamma(n/2+n_0/2)} \cdot \left[1 + \frac{n_0 \sigma_0^2}{n \sigma^2} + \frac{n_0 (\bar{x} - \mu_0)^2}{(n+n_0) \sigma^2} \right]^{\frac{n}{2}} \cdot \left[1 + \frac{n \sigma^2}{n_0 \sigma_0^2} + \frac{n (\bar{x} - \mu_0)^2}{(n+n_0) \sigma_0^2} \right]^{\frac{n_0}{2}} \quad (8)$$

分4种情况讨论:

(1) $\mu_0, \sigma_0, \mu, \sigma$ 已知, n 固定, $n_0 \rightarrow \infty$ 。

在式(8)中, $\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+n_0}}{\sqrt{n_0}} = 1, \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{n \sigma^2}{n_0 \sigma_0^2} + \frac{n (\bar{x} - \mu_0)^2}{(n+n_0) \sigma_0^2} \right]^{\frac{n}{2}}$ 为常数, 而 $\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n_0/2)}{\Gamma(n/2+n_0/2)}$

$\rightarrow 0$, 所以 $\lim_{n_0 \rightarrow \infty} K \rightarrow 0$, 此时有 $\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \lambda = 0$ 。也就是说当验前样本数量很大时, 无论 c 取何值, λ 的验后估计趋近于零。这实际上降低了验前信息对参数验后估计的影响, 即使验前样本容量很大, 但其对参数验后估计影响很小, 避免了验前样本很大时“淹没”现场样本的情况。

(2) n, n_0, σ_0, σ 已知, μ 固定, $\mu_0 \rightarrow \infty$ 。

显然 $\lim_{\mu_0 \rightarrow \infty} K \rightarrow \infty, \lim_{\mu_0 \rightarrow \infty} \lambda = 0$ 。 $\mu_0 \rightarrow \infty$ 可以认为验前信息与现场信息完全不相容, 这种情况下利用验前信息没有意义。而计算结果说明, 在 $\mu_0 \rightarrow \infty$ 的情况下, 验前信息对验后估计没有影响。

(3) n, n_0, μ_0, μ 已知, σ 固定, $\sigma_0 \rightarrow \infty$ 。

在式(8)中, $\lim_{\sigma_0 \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{n \sigma^2}{n_0 \sigma_0^2} + \frac{n (\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma_0^2 (n+n_0)} \right]^{\frac{n}{2}} \rightarrow 1, \lim_{\sigma_0 \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{n_0 \sigma_0^2}{n \sigma^2} + \frac{n_0 (\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2 (n+n_0)} \right]^{\frac{n_0}{2}} \rightarrow \infty$, 所以 $\lim_{\sigma_0 \rightarrow \infty} K \rightarrow \infty, \lim_{\sigma_0 \rightarrow \infty} \lambda = 0$ 。 $\sigma_0 \rightarrow \infty$ 同样可以认为是验前信息与现场信息完全不相容, 此时可以得到与 $\mu_0 \rightarrow \infty$ 类似的结论。

(4) n, n_0 已知, 验前信息与现场信息完全相容, 即 $\sigma_0 = \sigma, \mu_0 = \mu$ 。此时

$$K = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sqrt{n+n_0}}{\sqrt{n} \sqrt{n_0}} \frac{\Gamma(n/2) \Gamma(n_0/2)}{\Gamma(n/2+n_0/2)} \cdot \left(\frac{n+n_0}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n+n_0}{n_0} \right)^{\frac{n_0}{2}} \quad (9)$$

计算表明, 当 $n_0 \approx n$ 时, $K \approx 1$, 此时 $\lambda \approx c$, 也就是说 λ 的验后估计与设置的验前信息可信度 c

的值基本相当。

上述分析表明,本文提出的混合验前方法具有非常优良的性质。当验前信息与现场信息完全不相容时,验前信息对验后估计的影响很小,验后估计只与现场信息有关;当验前信息样本数量很大时,验后估计也只与现场信息有关,从而有效地避免了验前信息“淹没”现场信息的情况。

如果使用似然函数方法构造验前分布^[9-12],此时 $\beta_0 = (Nm - 3)/2$, n_0 就是实际的验前样本数,在仿真样本数量很大的情况下, β_0 将非常大,导致 n_0 远大于现场样本数 n 。对于仿真样本而言,验前样本数往往远远大于现场样本数,由上述第1种情况可知,无论验前信息与现场信息的相容性如何,仿真信息对验后估计没有影响,验后统计推断中实际上采用的是无信息验前分布,也就是说,验前信息没有得到充分的利用。

3 参数 c 的确定

前面的方法中, c 被认为是确定值,需要事先给定,一种方法是使用验前数据与验后数据的一致性检验计算可信度 c ,这种方法实现起来比较困难^[15]。为增加处理问题的灵活性,这里认为 c 为随机变量,根据 c 的定义,满足 $c \in [0, 1]$,假设 c 的验前分布为 $\pi(c)$,则混合验前密度修改为

$$\pi(\mu, \sigma^2 | D_0, c) \propto [c\pi(\mu, \sigma^2 | D_0) + (1-c)\pi_0(\mu, \sigma^2)]\pi(c) \quad (10)$$

在获得现场信息后, μ, σ^2, c 的联合验后概率密度为

$$\pi(\mu, \sigma^2, c | D_0, D) = \lambda\pi_0(\mu, \sigma^2 | D_0, D)\pi(c) + (1-\lambda)\pi_1(\mu, \sigma^2 | D)\pi(c) \quad (11)$$

通过一系列的推导, c 的边缘验后分布可表示为

$$\pi(c | D_0, D) \propto c\pi(c)m(D | \pi_0) + (1-c)\pi(c)m(D | \pi_1) \quad (12)$$

则 c 的验后估计为

$$\hat{c} = \int_0^1 c\pi(c | D_0, D)dc / \left(\int_0^1 \pi(c | D_0, D)dc \right) \quad (13)$$

这样就得到了 c 的边缘验后估计。由于 $c \in [0, 1]$, $\pi(c)$ 可假设为 Beta(α_c, β_c) 分布或均匀分布 $U(\alpha_c, \beta_c)$, α_c, β_c 为分布参数,这两种分布形式可充分描述对于 c 的认识程度。在实际中,可根

据下述方法得到 $\pi(c)$ 。

(1)在没有更多的其他信息可供利用的情况下, c 可以假设为 0 到 1 之间的均匀分布,即

$$\pi(c) \propto \text{Beta}(c, 1, 1), \text{ 或 } \pi(c) = U(c, 1, 1)$$

(2)在某些情况下,有了关于 c 的进一步的了解,如 c 的取值范围更窄,在确定 c 的边界后,可以假定

$$\pi(c) = 1/(c_{\text{up}} - c_{\text{low}}) \quad c_{\text{low}} \leq c \leq c_{\text{up}}$$

本文的计算中,假设 c 为 0 到 1 之间的均匀分布。

4 验前信息的利用原则

第2节的分析表明,混合验前分布能够有效避免验前信息“淹没”现场信息的问题,但是,使用验前信息是否能够提高验后估计的性质,还需要进一步的分析。下面通过 Monte-Carlo 仿真方法给出验后估计的均方差(MSE),为验前信息的利用给出一些基本原则。假设验前信息服从 $N(\mu_0, \sigma_0)$ 分布,现场信息服从 $N(\mu, \sigma)$ 分布。假设 μ 的 Bayes 估计为 $\hat{\mu}$,则估计的 MSE 为

$\text{MSE}(\hat{\mu}) = [E(\hat{\mu} - \mu)]^2 + \text{Var}(\hat{\mu}) + (E(\hat{\mu}) - \mu)^2$
其中: $\text{Var}(\hat{\mu})$ 表示估值的方差,样本数量越多,则估值方差越小; $(E(\hat{\mu}) - \mu)^2$ 表示估值偏倚,如果均值估计是有偏的,那么样本数量越多,估值偏倚越大。

实际上, $\text{MSE}(\hat{\mu})$ 与 $n_0, n, \mu_0, \mu, \sigma_0$ 和 σ 都有关系,假设 $n=10, \sigma_0=\sigma=1$ 。根据上述参数抽样产生验前样本与现场样本,计算参数的验后估计,共进行 5 000 次仿真。同时,分别在 $(\mu_0 - \mu)/\sigma$ 取 0.10, 0.30, 0.50, 0.70 和 0.90 这 5 种情况下计算估计的 MSE,计算结果见图 1。

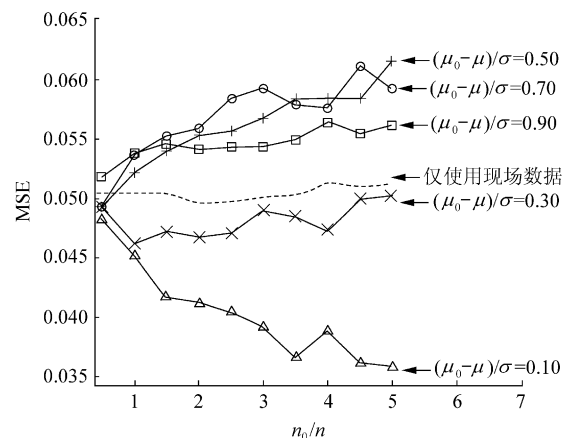


图1 验后估计的 MSE 图

Fig. 1 Comparison of MSE in posterior estimation

图1表示 n_0/n 从 0.5 变化至 5.0 时验后均值估计的 MSE 变化曲线, $(\mu_0 - \mu)/\sigma$ 表征验前信息对于现场信息的有偏性, $(\mu_0 - \mu)/\sigma$ 越大表示验前信息的有偏性越大。从图中可以看出:

(1) MSE 的变化趋势与验前样本数目 n_0 以及 $(\mu_0 - \mu)/\sigma$ 有关, 当 $(\mu_0 - \mu)/\sigma < 0.30$ 时, 验前信息与现场信息的一致性较好, 随着 n_0 的增大, 均值验后估计的 MSE 减小。

(2) 当 $(\mu_0 - \mu)/\sigma = 0.30$ 时, 采用混合验前方法得到的验后估计与仅利用现场信息得到的验后估计的 MSE 基本相当, 当 $n_0/n = 4.0$ 时, 混合验前方法得到的 MSE 增大, 这 2 个参数称之为“趋势转折参数”。

(3) 当 $(\mu_0 - \mu)/\sigma > 0.30$ 时, 均值验后估计的 MSE 始终比仅利用现场信息时要大, 即当验前信息与现场信息差异较大时, 使用验前信息不会改进验后估计性能。

在不同的参数组合情况下进行同样的仿真, 可以得到与图 1 类似的结论。其中的趋势转折参数见表 1。

表 1 不同参数组合情况下的趋势转折参数

Table 1 Trend turning parameters for different parameter combinations

参数组合			趋势转折参数	
σ	σ_0/σ	n	$(\mu_0 - \mu)/\sigma$	n_0/n
1.0	1.0	10	0.30	4.0
1.0	1.0	20	0.30	4.0
1.0	1.0	5	0.25	3.5
1.0	1.5	10	0.25	3.5
1.0	1.5	20	0.20	4.0
1.0	1.5	5	0.25	3.0

表 1 给出了验前信息应用时的一些基本原则。对于表 1 中的第 1 行数据意义如下: 在 $\sigma = 1.0, \sigma_0/\sigma = 1.0, n = 10$ 的情况下, 当验前信息与现场信息满足 $(\mu_0 - \mu)/\sigma \approx 0.30$ 且 $n_0/n \leq 4.0$ 时, 或者 $(\mu_0 - \mu)/\sigma < 0.30$ 时, 充分利用验前信息会改善验后估计的 MSE; 当 $(\mu_0 - \mu)/\sigma > 0.30$ 时, 此时验前信息的有偏性较为严重, 利用验前信息不能改进验后估计的 MSE。

5 实例

设某型导弹获得了现场试验子样(单位: m) $D = \{2.18, -5.05, 4.10, 8.50, -6.52\}$ 。根据模拟打靶获得了 500 次导弹试验落点数据, 将仿真样本分为 100 组, 每组 5 个样本, 获得了正态-逆

Gamma 分布参数为 $\hat{\mu}_0 = -0.314, \hat{\eta}_0 = 0.116, \hat{\alpha}_0 = 65.235, \hat{\beta}_0 = 3.807$ 。如果使用似然函数方法, 500 次导弹落点数据的样本均值为 -0.314 , 样本方差为 24.407, 现场子样均值为 0.642, 样本方差为 39.941。

这里采用 3 种方法讨论: ①采用似然函数的方法构造验前分布, 并直接与现场子样融合; ②采用似然函数方法, 同时考虑验前信息的可信度, 按照本文第 2 节的方法进行验后计算; ③完全采用本文的验前分布构造方法和验后统计推断方法。 $\pi(c)$ 取为 0 到 1 之间的均匀分布。表 2 列出了 3 种方法下参数的验后估计情况。

表 2 不同验前构造下的验后估计比较

Table 2 Comparison of post estimations between different prior distributions

参数验后估计	c	λ	均值	方差
方法①			-0.309	24.556
方法②	0.355 6	0.001 5	0.609	39.187
方法③	0.523 4	0.593 1	0.283	32.630

从表 2 可以看出, 对于方法①, 由于将验前信息与现场子样不加区别的直接融合, 验后估计与 500 次仿真样本的统计值基本相当, 5 个现场子样对验后估计的结果影响非常小, 也就是说, 验前信息“淹没”了现场子样。对于方法②, 由于等效验前子样数量很大, 使得 λ 的验后估计值非常小, 这一点与第 2 节中的分析一致, 此时无信息验前对验后估计的影响很大, 仿真验前信息对验后估计没有多大作用, 参数的验后估计主要与现场子样相关。使用本文提出的验前分布构造方法, 等效验前子样与现场子样数量基本相当, c 与 λ 的验后估计值比较一致, 均值与方差的验后估计值比较合理, 计算结果与理论分析相一致。

6 结论

主要讨论小子样问题中验前信息的合理运用问题。在假设导弹落点数据服从正态分布的前提下, 首先给出了根据仿真验前数据构造正态-逆 Gamma 分布的方法, 然后提出了一种混合验前分布, 由该验前分布获得的验后分布能够避免验前信息“淹没”现场的问题。结果表明, 利用本文提出的分组构造方法, 得到的验后分布等效样本容量只与每组的样本数有关, 而与总样本数无关。利用混合验前分布得到的可信度参数验后估计能够自适应地反映验前信息与现场信息之间的差

异,当两种信息之间的差异较大时,可信度参数估计值趋近于零。最后通过对验后估计的 MSE 分析,给出了验前信息利用的基本原则,对验前信息在工程中的应用具有重要的指导意义。

参 考 文 献

- [1] 张金槐. 远程火箭精度分析与评估[M]. 长沙:国防科技大学出版社, 1995.
Zhang Jinhui. Evaluation and analysis of precision for long-distance rocket[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 1995. (in Chinese)
- [2] Michael J B, Pace P E, Shing M T, et al. Test and evaluation of the ballistic missile defense system[R]. A196714, Monterey, CA: Department of Computer Science, Naval Postgraduate School, 2003.
- [3] 冯蕴雯, 黄玮, 宋笔峰, 等. 单子样寿命试验评估的综合概率分析法[J]. 航空学报, 2005, 26(6): 706-709.
Feng Yunwen, Huang Wei, Song Bifeng, et al. Synthesis probability distribution estimation method for single sample lifetime test[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2005, 26(6): 706-709. (in Chinese)
- [4] 冯蕴雯, 黄玮, 吕震宙, 等. 极小子样试验的半经验评估方法[J]. 航空学报, 2004, 25(5): 456-459.
Feng Yunwen, Huang Wei, Lu Zhenzhou, et al. The semiempirical evaluation method for extreme small sample test[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2004, 25(5): 456-459. (in Chinese)
- [5] Berger J O. Statistical decision theory and Bayesian analysis [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [6] 张金槐, 唐雪梅. Bayes 方法[M]. 2 版. 长沙:国防科技大学出版社, 1995.
Zhang Jinhui, Tang Xuemei. Bayesian method[M]. 2nd ed. Changsha: National University of Defense Technology Press, 1995. (in Chinese)
- [7] Papazoglou I A. Bayesian decision analysis and reliability certification[J]. Reliability Engineering and System Safety, 1999, 66(2): 177-198.
- [8] 张金槐, 张士峰. 验前大容量仿真信息“淹没”现场小子样试验信息问题[J]. 飞行器测控学报, 2003, 22(3): 1-6.
Zhang Jinhui, Zhang Shifeng. Problem of large numbers of prior information obliterating the small numbers of test information[J]. Journal of Spacecraft TT&C Technology, 2003, 22(3): 1-6. (in Chinese)
- [9] 张金槐. Bayes 试验分析中验前分布的表示[J]. 国防科技大学学报, 1999, 21(6): 109-113.
Zhang Jinhui. Representation of prior distribution in Bayesian testing analysis[J]. Journal of National University of Defense Technology, 1999, 21(6): 109-113. (in Chinese)
- [10] Ibrahim J G, Chen M H, Sinha D. On optimality properties of the power prior[J]. Journal of the American Statistical Association, 2003, 98(3): 204-213.
- [11] Ibrahim J G, Chen M H. Power prior distributions for regression models[J]. Statistical Science, 2000, 15(1): 46-60.
- [12] Duan Y Y. A modified Bayesian power prior approach with applications in water quality evaluation[D]. Blacksburg, Virginia: Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University, 2005.
- [13] 张士峰. 导弹落点密集度评估中最优试验数的确定方法[J]. 应用概率统计, 2002, 18(4): 377-384.
Zhang Shifeng. Analysis of the optimal testing number in dispersion evaluation of falling points[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2002, 18(4): 377-384. (in Chinese)
- [14] 张湘平, 张金槐, 谢红卫. 关于样本容量、验前信息与 Bayes 决策风险的若干讨论[J]. 电子学报, 2003, 31(4): 536-538.
Zhang Xiangping, Zhang Jinhui, Xie Hongwei. A few discussion of samples, a prior information and Bayesian statistical decision[J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(4): 536-538. (in Chinese)
- [15] 杨华波, 张士峰, 蔡洪, 等. 利用构造性仿真评估导弹精度[J]. 国防科技大学学报, 2005, 27(2): 124-126.
Yang Huabo, Zhang Shifeng, Cai Hong, et al. Evaluation of the missile precision by using the construction simulation[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2005, 27(2): 124-126. (in Chinese)

作者简介:

杨华波(1980—) 男, 博士, 讲师。主要研究方向: 武器系统可靠性、精度评估及惯性技术等。

Tel: 13548594063

E-mail: yhang0731@mailme.cn

蔡洪(1967—) 男, 博士, 教授, 博士生导师。主要研究方向: 飞行器试验数据处理及精度评定等。

E-mail: caihong@hnmcc.com

张士峰(1971—) 男, 博士, 副教授。主要研究方向: 飞行器性能测试与效能评估。

E-mail: zhang-shifeng@hotmail.com

(责任编辑: 徐晓)