通信系统原理教程

第5讲 信号之三

通信教研室 杨春萍

本讲内容

- 信号的类型
- 确知信号的性质（复习内容）
- 随机信号的性质
- 常见随机变量举例
- 随机变量的数字特征
- 随机过程
- 高斯过程
- 窄带随机过程
- <u>正弦波加窄带高斯过程</u>
- <u>信号通过线性系统</u>

正弦波加窄带高斯过程

- 通信系统中的正弦波加窄带高斯过程：
- 正弦波加噪声的表示式：

$$r(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) + n(t)$$

式中， A — 正弦波的确知振幅；

ω_0 — 正弦波的角频率；

θ — 正弦波的随机相位；

$n(t)$ — 窄带高斯噪声。

- $r(t)$的包络的概率密度 ：

$$p_r(x) = \frac{x}{\sigma^2} I_0\left(\frac{Ax}{\sigma^2}\right)\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 + A^2\right)\right], \qquad x \geq 0$$

式中， σ^2 — $n(t)$的方差；

$I_0(\bullet)$ — 零阶修正贝塞尔函数。

- $p_r(x)$ 称为广义瑞利分布，或称莱斯(Rice)分布。当A = 0时， $p_r(x)$ 变成瑞利概率密度。

- $r(t)$的相位的条件概率密度 ：

$$p_r(\varphi/\theta)=\frac{\exp\left(-A^2/2\sigma^2\right)}{2\pi}+\frac{A\cos(\theta-\varphi)}{2(2\pi)^{1/2}\sigma}\exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma^2}\sin^2(\theta-\varphi)\right]\left\{1+erf\left[\frac{A\cos(\theta-\varphi)}{2^{1/2}\sigma}\right]\right\}$$

式中，φ — $r(t)$的相位，包括正弦波的相位θ和噪声的相位

$p_r(\varphi/\theta)$ — 给定θ的条件下，$r(t)$的相位的条件概率密度

- $r(t)$的相位的概率密度:

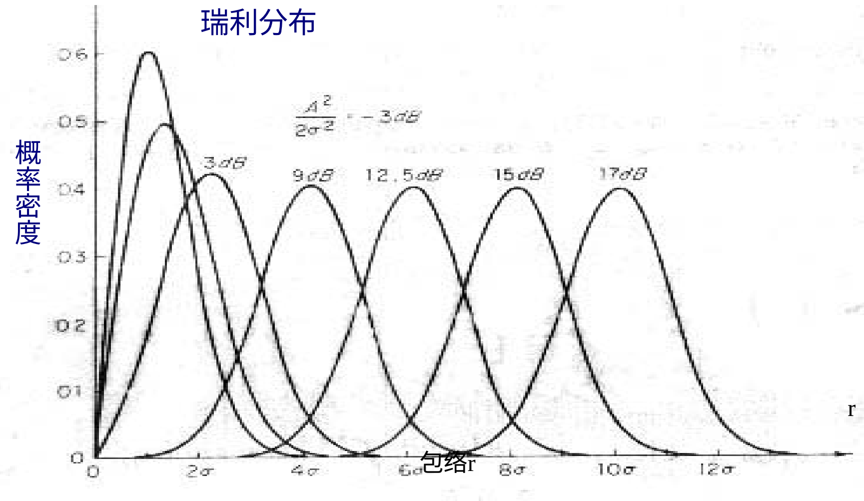
$$p_r(\varphi)=\int_0^{2\pi}p_r(\varphi/\theta)p_r(\theta)d\theta$$

  - 当$\theta = 0$时，

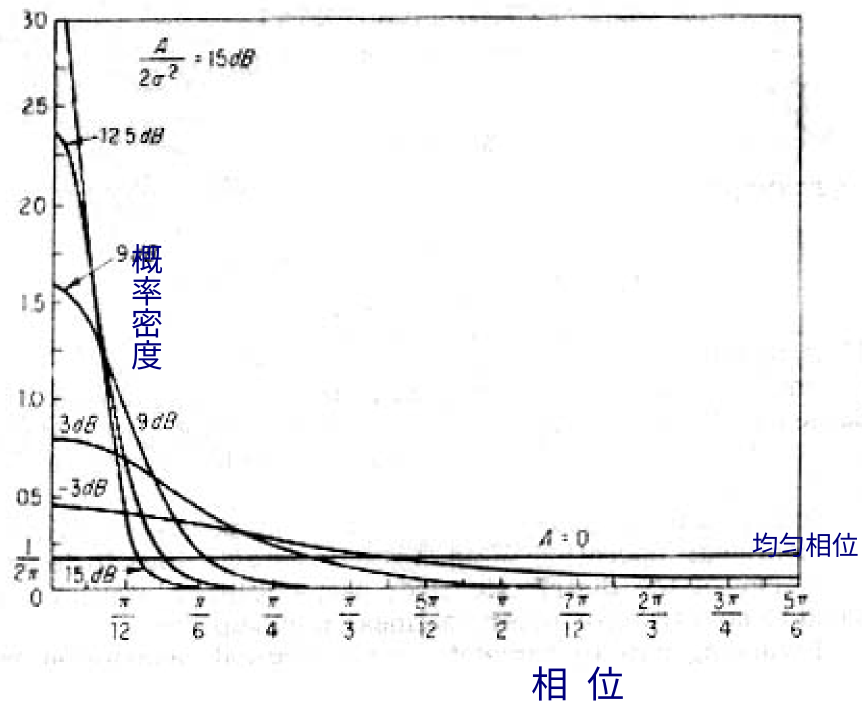
$$p_r(\varphi/0)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)\left\{1+G\sqrt{\pi}[1+erf(G)]\exp G^2\right\}\qquad 0\le\varphi\le 2\pi$$

式中，$$G=\frac{A\cos\varphi}{\sqrt{2}\sigma}\qquad erf(G)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^G e^{-t^2}dt$$

- 莱斯分布的曲线
  - 当$A/\sigma = 0$时，
    包络→瑞利分布
    相位→均匀分布
  - 当A/σ很大时，
    包络→正态分布
    相位→冲激函数



(a) 莱斯分布包络的概率密度



(b) 莱斯分布相位的概率密度

返回

信号通过线性系统

2.10.1 线性系统的基本概念

- 线性系统的特性
  - 有一对输入端和一对输出端
  - 无源
  - 无记忆
  - 非时变
  - 有因果关系：先有输入、后有输出
  - 有线性关系：满足叠加原理

    若当输入为$x_i(t)$时，输出为$y_i(t)$，则当输入为

    $$x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$$

    时，输出为：

    $$y(t)=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$$

    式中，a_1和a_2均为任意常数。

线性系统的示意图

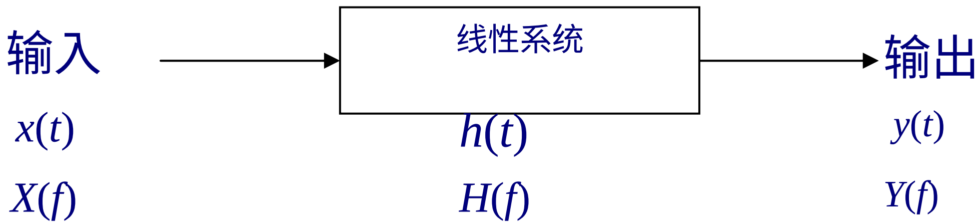
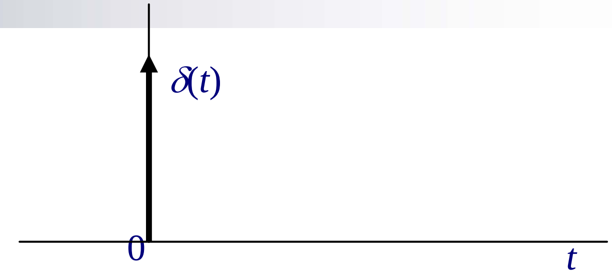
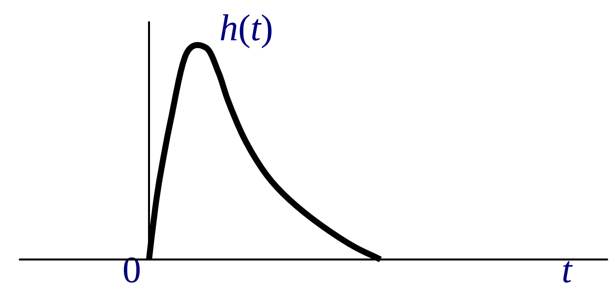


图2.10.1 线性系统示意图





2.10.2 确知信号通过线性系统

- 时域分析法

设$h(t)$ — 系统的冲激响应

$x(t)$ — 输入信号波形

$y(t)$ —输出信号波形

则有：

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

对于物理可实现系统：

$$h(t) = 0, \qquad t < 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

频域分析法

- 设：输入为能量信号，令

  $x(t)$ 一输入能量信号

  $H(f)$ — $h(t)$的傅里叶变换

  $X(f)$ — $x(t)$的傅里叶变换

  $y(t)$ — 输出信号

则此系统的输出信号$y(t)$的频谱密度$Y(f)$为：

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

- 由$Y(f)$的逆傅里叶变换可以求出$y(t)$：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j\omega t} df$$

- 设：输入$x(t)$为周期性功率信号，则有

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

式中，

$\omega_0=2\pi/T_0$

T_0 — 信号的周期

$f_0=\omega_0/2\pi$是信号的基频

$$C(jn\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

输出为：

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C(jn\omega_0)H(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

- 设：输入$x(t)$为非周期性功率信号，则当作随机信号处理

- 【例2.10】若有一个RC低通滤波器，如图2.10.4所示。试求出其冲激响应，以及当有按指数衰减的输入时其输出信号表示式。

解:设 $x(t)$ —输入能量信号

$y(t)$ — 输出能量信号

$X(f)$ — $x(t)$的频谱密度

$Y(f)$ — $y(t)$的频谱密度

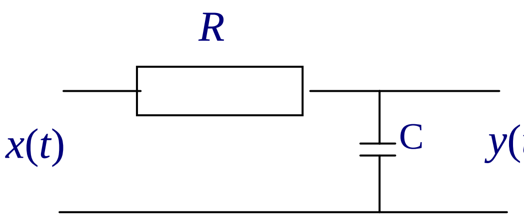


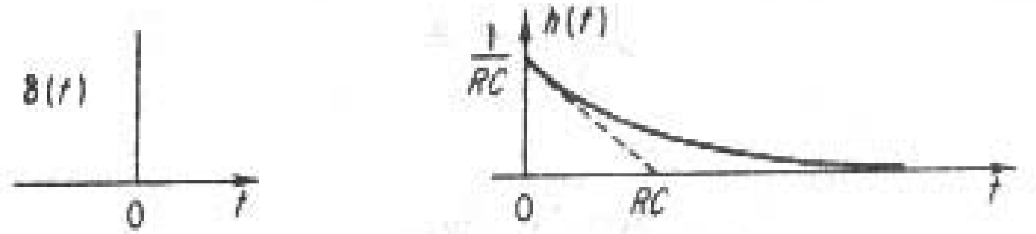
图2.10.4 RC滤波器

则此电路的传输函数为：

$$H(f)=\frac{1/j\omega C}{R+(1/j\omega C)}=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

此滤波器的冲激响应*h*(*t*)：

$$h(t)=\int_{-\omega}^{\infty}H(f)e^{j\omega t}df=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+i\omega RC}e^{j\omega t}df=\frac{1}{RC}e^{-t/RC}$$



滤波器输出和输入之间的关系：

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-(t-\tau)/RC}d\tau$$

假设输入$x(t)$等于：

$$x(t)=\begin{cases}e^{-at}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

则此滤波器的输出为：

$$y(t)=\frac{1}{RC}\int_{0}^{t}e^{-a\tau}e^{-(t-\tau)/RC}d\tau=\frac{e^{-t/RC}}{RC}\cdot\left.\frac{e^{\tau(1/RC-a)}}{1/RC-a}\right|_{0}^{t}$$

$$=\frac{e^{-at}-e^{-t/RC}}{1-aRC}$$

□ 无失真传输条件

设：系统是无失真的线性传输系统，输入为一能量信号$x(t)$，则其无失真输出信号$y(t)$为：

$$y(t) = kx(t - t_d)$$

式中，k — 衰减常数，

t_d — 延迟时间。

- 求系统的传输函数：

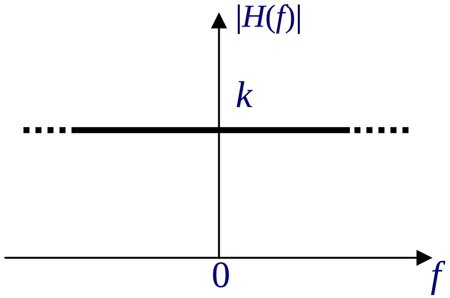
  对上式作傅里叶变换：

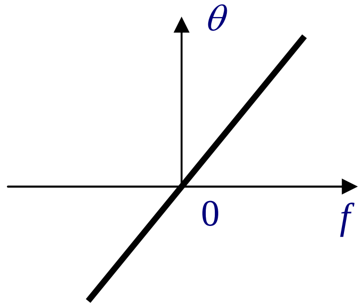
$$Y(f) = kX(f)e^{-j\omega t_d}$$

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) = kX(f)e^{-j\omega t_d}$$

$$\therefore \quad H(f) = ke^{-j\omega t_d} = ke^{-j\theta}$$

式中，$\theta = 2\pi f t_d$





- 无失真传输条件：
  - □ 振幅特性与频率无关；
  - □ 相位特性是通过原点的直线。

    （实际中，θ难测量，常用测量t_d代替。）

2.10.3 随机信号通过线性系统

- 物理可实现线性系统，若输入为确知信号，则有

$$y(t)=\int_0^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

若输入为平稳随机信号*X*(*t*)，则输出*Y*(*t*)为

$$Y(t)=\int_0^{\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau$$

- 输出*Y*(*t*)的数学期望*E*[*Y*(*t*)]

$$E[Y(t)]=E\left[\int_0^{\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau\right]=\int_0^{\infty}h(\tau)E[X(t-\tau)]d\tau$$

由于已假设输入是平稳随机过程，故

$E[X(t-\tau)]=E[X(t)]=k$，$k=$ 常数。

$$E[Y(t)]=k\int_0^{\infty}h(\tau)d\tau$$

$$\because\quad H(0)=H(f)|_{f=0}=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt\,|_{f=0}=\int_0^{\infty}h(t)dt$$

$\therefore$ 输出的数学期望： $E[Y(t)]=kH(0)$

- 输出$Y(t)$的自相关函数

  由自相关函数定义，有

$$R_Y(t_1,t_1+\tau)=E\left[Y(t_1)Y(t_1+\tau)\right]$$
$$=E\left[\int_0^{\infty}h(u)X(t_1-u)du\int_0^{\infty}h(v)X(t_1+\tau-v)dv\right]$$
$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}h(u)h(v)E\left[X(t_1-u)X(t_1+\tau-v)\right]dudv$$

  由$X(t)$的平稳性知，上式中的数学期望与t_1无关，故有

$$E\left[X(t_1-u)X(t_1+\tau-v)\right]=R_X(\tau+u-v)$$

$$\therefore\quad R_Y(t_1,t_1+\tau)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}h(u)h(v)R_X(\tau+u-v)dudv=R_Y(\tau)$$

- 由于$Y(t)$的数学期望和自相关函数都和t_1无关，故$Y(t)$是广义平稳随机过程。

- 输出$Y(t)$的功率谱密度$P_Y(f)$：

  由于功率谱密度是自相关函数的傅里叶变换，故有

$$P_Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} h(u)h(v)R_X(\tau + u - v) e^{-j\omega\tau} dv$$

  令$\tau' = \tau + u - v$代入上式，得到

$$P_Y(f) = \int_0^{\infty} h(u) e^{j\omega u} du \int_0^{\infty} h(v) e^{-j\omega v} dv \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau') e^{-j\omega\tau'} d\tau'$$
$$= H^*(f)H(f)P_X(f) = |H(f)|^2 P_X(f)$$

  ∴输出信号的功率谱密度等于输入信号的功率谱密度乘以$|H(f)|^2$。

【例2.11】已知一个白噪声的双边功率谱密度为$n_0/2$。试求它通过一个理想低通滤波器后的功率谱密度、自相关函数和噪声功率。

解：因为理想低通滤波器的传输特性可以表示成：

$$H(f)=\begin{cases} ke^{-j\omega t_d}, & |f|\le f_H \\ 0, & \text{其它处} \end{cases}$$

所以有 $$|H(f)|^2=k^2, \qquad |f|\le f_H$$

输出信号的功率谱密度为

$$P_Y(f)=|H(f)|^2 P_X(f)=k^2\frac{n_0}{2}, \qquad |f|\le f_H$$

输出信号的自相关函数

$$R_Y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}P_Y(f)e^{j\omega\tau}df=\left(k^2 n_0/4\pi\right)\int_{-f_H}^{f_H}e^{j\omega\tau}df=k^2 n_0 f_H(\sin 2\pi f_H\tau/2\pi f_H\tau)$$

返回

输出噪声功率：$P_Y = R_Y(0) = k^2 n_0 f_H$