通信系统原理教程

第4讲 信号之二

通信教研室　杨春萍

本讲内容

- 信号的类型
- 确知信号的性质（复习内容）
- 随机信号的性质
- 常见随机变量举例
- 随机变量的数字特征
- 随机过程
- 高斯过程
- 窄带随机过程
- 正弦波加窄带高斯过程
- 信号通过线性系统

高斯过程

- 定义：
  - 一维高斯过程（正态随机过程）的概率密度：

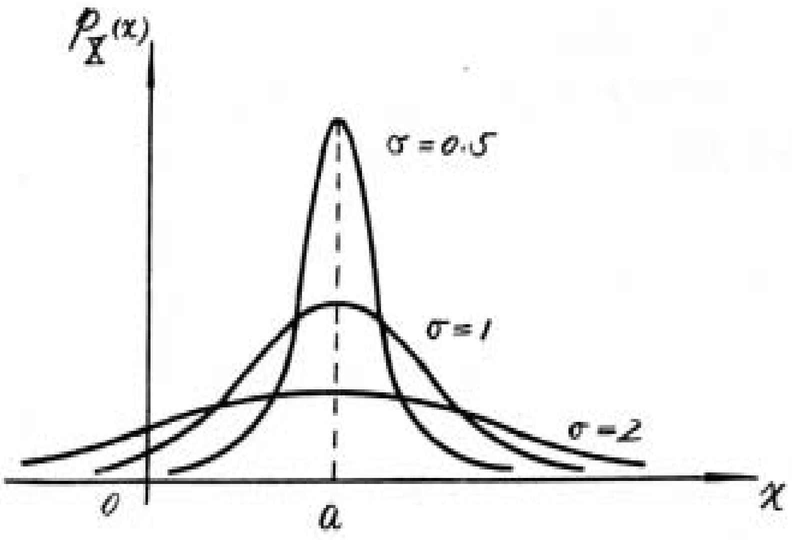
$$p_X(x,t_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

式中，$a = E[X(t)]$ 为均值

$\sigma^2 = E[X(t) - a]^2$ 为方差

σ 为标准偏差

  - ∵高斯过程是平稳过程，故其概率密度$p_X(x, t_1)$与t_1无关，即，$p_X(x, t_1) = p_X(x)$
  - $p_X(x)$的曲线：



- 高斯过程的严格定义：任意n维联合概率密度满足：

$$p_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n|B|^{1/2}}\exp\left[\frac{-1}{2|B|}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|B|_{jk}\left(\frac{x_j-a_j}{\sigma_j}\right)\left(\frac{x_k-a_k}{\sigma_k}\right)\right]$$

式中，a_k为x_k的数学期望（统计平均值）；

σ_k为x_k的标准偏差；

$|B|$为归一化协方差矩阵的行列式，即

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & 1 & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$|B|_{jk}$为行列式$|B|$中元素b_{jk}的代数余因子；

b_{jk}为归一化协方差函数，即

$$b_{jk}=\frac{E\left|(x_j-a_j)(x_k-a_k)\right|}{\sigma_j\sigma_k}$$

□n维高斯过程的性质

- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$仅由各个随机变量的数学期望$a_i$、标准偏差$\sigma_i$和归一化协方差$b_{jk}$决定，因此它是一个广义平稳随机过程。
- 若$x_1, x_2, \ldots, x_n$等两两之间互不相关，则有当$j \neq k$时，$b_{jk} = 0$。这时，

$$p_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left[-\frac{(x_k - a_k)^2}{2\sigma_k^2}\right]$$
$$= p_X(x_1, t_1) \cdot p_X(x_2, t_2) \cdots p_X(x_n, t_n)$$

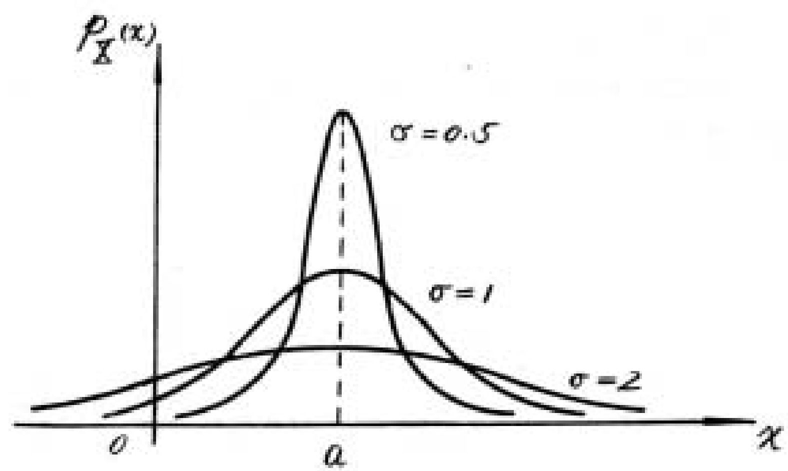
即，此n维联合概率密度等于各个一维概率密度的乘积。

- 若两个随机变量的互相关函数等于零，则称为两者**互不相关**；若两个随机变量的二维联合概率密度等于其一维概率密度之积，则称为两者**互相独立**。互不相关的两个随机变量不一定互相独立。互相独立的两个随机变量则一定互不相关。
- 高斯过程的随机变量之间既互不相关，又互相独立。

□ 正态概率密度的性质

- $p(x)$对称于直线 $x = a$，即有： $p(a+x) = p(a-x)$
- $p(x)$在区间$(-\infty, a)$内单调上升，在区间(a, ∞)内单调下降，并且在点a处达到其极大值 $1/(\sqrt{2\pi}\sigma)$
  当$x \to -\infty$或 $x \to +\infty$时，$p(x) \to 0$。
- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ $\int_{-\infty}^{a} p(x)dx = \int_{a}^{\infty} p(x)dx = 1/2$
- 若$a = 0$, $\sigma = 1$，则称这种分布为标准化正态分布：

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$



□正态分布函数

- 将正态概率密度函数的积分定义为正态分布函数：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right]dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right]dz=\phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

式中，$\phi(x)$称为概率积分函数：

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]dz$$

此积分不易计算，通常用查表方法计算。

□用误差函数表示正态分布

- 误差函数定义：

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$$

- 补误差函数定义：

$$erfc(x)=1-erf(x)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-z^2}dz$$

- 正态分布表示法：

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}erf\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), & x\ge a,\\ 1-\frac{1}{2}erfc\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), & x\le a\end{cases}$$

返回

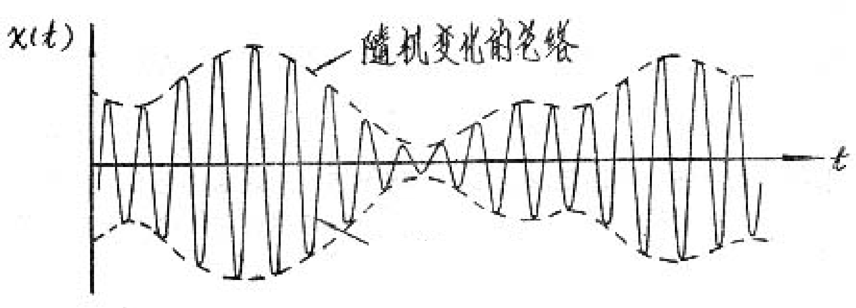
窄带随机过程

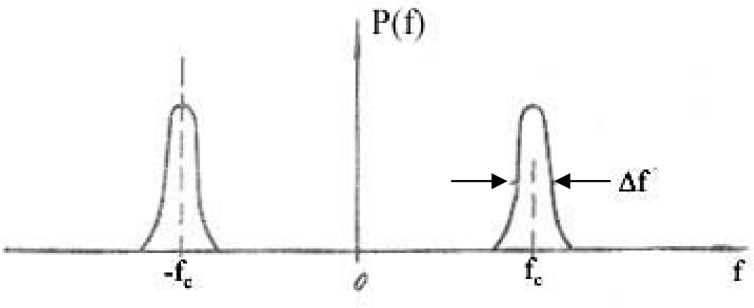
2.8.1 窄带随机过程的基本概念

- 何谓窄带？

  设随机过程的频带宽度为Δf，中心频率为f_c。若$\Delta f << f_c$，则称此随机过程为窄带随机过程。

- 窄带随机过程的波形和表示式
  - 波形和频谱：





- 表示式

$$X(t)=a_X(t)\cos[\omega_0 t+\varphi_X(t)], \qquad a_X(t)\geq 0$$

式中，$a_X(t)$ — 窄带随机过程的随机包络；

$\varphi_X(t)$ —窄带随机过程的随机相位；

ω_0 — 正弦波的角频率。

上式可以改写为：

$$X(t)=X_c(t)\cos\omega_0 t-X_s(t)\sin\omega_0 t$$

式中，

$X_c(t)=a_X(t)\cos\varphi_X(t)$ — $X(t)$的同相分量

$X_s(t)=a_X(t)\sin\varphi_X(t)$ — $X(t)$的正交分量

2.8.2 窄带随机过程的性质

- $X_c(t)$和$X_s(t)$的统计特性：

  设$X(t)$是一个均值为0的平稳窄带高斯过程，则

  - $X_c(t)$和$X_s(t)$也是高斯过程；
  - $X_c(t)$和$X_s(t)$ 的方差相同，且等于$X(t)$的方差；
  - 在同一时刻上得到的X_c和X_s是不相关的和统计独立的。

- $a_X(t)$和$\varphi_X(t)$的统计特性：
  - 窄带平稳随机过程包络$a_X(t)$的概率密度等于：

$$p(a_X) = \frac{a_X}{\sigma_X^2}\exp\left[-\frac{a_X^2}{2\sigma_X^2}\right] \qquad a_X \geq 0$$

  - 窄带平稳随机过程相位$\varphi_X(t)$的概率密度等于：

$$p(\varphi_X) = \frac{1}{2\pi} \qquad 0 \leq \varphi_X \leq 2\pi$$

返回