

基于辅助阵元的方位依赖幅相误差最大似然自校正：针对确定信号模型

王鼎¹, 潘苗², 吴瑛¹

(1. 解放军信息工程大学 信息工程学院, 河南 郑州 450002; 2. 江南计算技术研究所, 江苏 无锡 214083)

摘 要: 针对确定信号模型条件下方位依赖幅相误差的自校正问题, 给出了一种基于辅助阵元的方位依赖幅相误差最大似然自校正方法; 针对最大似然估计器中出现的高维非线性优化问题, 推导了一种改进型交替投影迭代算法, 从而实现了信号方位和方位依赖幅相误差的优化计算。此外, 还推导了信号方位和方位依赖幅相误差的无偏克拉美罗界(CRB)。仿真实验结果验证了新方法的有效性和优越性。

关键词: 最大似然方法; 自校正; 幅相误差; 辅助阵元; 方位依赖; 克拉美罗界

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2011)02-0034-08

Maximum likelihood self-calibration for direction-dependent gain-phase errors with carry-on instrumental sensors: case of deterministic signal model

WANG Ding¹, PAN Miao², WU Ying¹

(1. Institute of Information Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450002, China;

2. Jiangnan Institute of Computing Technology, Wuxi 214083, China)

Abstract: Aim at the self-calibration of direction-dependent gain-phase errors in case of deterministic signal model, the maximum likelihood method(MLM) for calibrating the direction-dependent gain-phase errors with carry-on instrumental sensors was presented. In order to maximize the high-dimensional nonlinear cost function appearing in the MLM, an improved alternative projection iteration algorithm, which could optimize the azimuths and direction-dependent gain-phase errors was proposed. The closed-form expressions of the Cram r-Rao bound(CRB) for azimuths and gain-phase errors were derived. Simulation experiments show the effectiveness and advantage of the novel method.

Key words: maximum likelihood method; self-calibration; gain-phase errors; instrumental sensors; direction-dependent; Cram r-Rao bound

1 引言

众所周知, 高分辨阵列测向技术已广泛应用于通信领域, 并对提高通信技术的发展起着重要作用。例如, 利用卫星多波束接收天线获取干扰源的波达方向(DOA, direction-of-arrival), 从而为解决卫星干扰定位问题提供了新的途径; 在 TD-SCDMA 系统中, 通过采用高分辨谱估计技术判断用户信号 DOA, 并在此方向形成天线主波束, 以达到有效抑

制干扰的作用等。在高分辨阵列测向技术中, 以 MUSIC 算法^[1]为代表的特征空间类算法引起了众多学者的广泛关注, 但在实际应用中, 天线阵中各个阵元的方向图很难完全一致; 各个通道的幅相特性不可能完全相同; 各个阵元的实际位置与标称位置之间难免存在一定扰动; 各个阵元之间往往存在互耦效应等。上述几种阵列误差使得实际阵列流型与理想阵列流型有所不同, 从而可能导致测向性能的急剧下降^[2-5], 甚至失效。因此阵列误差校正正是

超分辨测向能否投入实用的重要环节之一。

目前，国内外很多学者正致力于阵列误差校正方法的研究，现有的阵列误差校正方法主要分为自校正^[6-8]和有源校正^[9-11]2 大类。自校正需要联合估计阵列误差参数和信号方位，因此对算法的实时性要求较高。有源校正则需要方位已知的校正源，该类方法对算法的实时性要求较低，但是实际计算中的校正源方位往往与真实值存在一定偏差，此时需要将校正源方位也作为未知参量进行估计^[10]。需要指出的是，上述阵列误差校正方法大都采用了与信号方位无关的阵列误差模型，这往往与实际的阵列误差特性不相符合，因为在实际应用中，人们遇到的很多都是方位依赖的阵列误差。例如，当各个阵元的方向图不一致时，就需要利用方位依赖的幅相误差进行建模，此外，若阵列同时存在多种误差形式(如幅相误差、位置误差以及互耦效应等)，它们对阵列的综合影响也可以用一个方位依赖的幅相误差进行建模。然而，方位依赖幅相误差的自校正问题仍是一个难点问题，相关文献报道的并不多。王布宏^[12]等人提出了一种基于辅助阵元的方位依赖幅相误差自校正方法，即辅助阵元法(ISM, instrumental sensors method)。该方法实现了信号方位及其幅相误差的“去耦合”估计，只需要通过一维搜索即可在无需知道阵列幅相误差的情况下获得方位估计值。此外，王布宏等人还将该方法推广应用于阵元位置误差^[12]和互耦校正^[13]中，并取得了较好的效果。事实上，这种由几个精确校正阵元和多个未校正阵元构成的阵列称为部分校正阵列(PCA, partially calibrated array)^[14-16]，其中文献[15,16]都提出了一种基于部分校正阵列的方位估计自校正方法，它们也仅需要一维搜索(或求根)即可在无需知道阵列误差的情况下估计信号方位。实际上，ISM 和文献[15,16]中的方法都可看成是一种所谓“秩减估计器(RARE, rank reduction estimation)”，可作为 MUSIC 估计器的一种推广。

需要指出的是，RARE 虽然易于实现，但是利用一维搜索估计信号方位往往只能获得次优估计^[17]，其参数估计精度有进一步提高的空间。众所周知，最大似然估计器具有较优的参数估计性能，当最大似然估计满足一致性要求时，其参数估计性能是渐近有效的，即在大样本条件下的估计方差接近克拉美罗界(CRB)，即使参数估计不满足一致性要求(确定信号模型条件下)，其参数估计精度也会在大多数情

况优于一维搜索方法^[18]。为此，本文重点研究了利用辅助阵元对方位依赖幅相误差的最大似然自校正方法，文中所用的阵列模型仍然采用文献[12]中的阵列模型，但是给出了一种确定信号模型条件下信号方位及其方位依赖幅相误差的最大似然自校正方法。针对最大似然估计器中面临的高维非线性优化问题，文中推导了一种改进型的交替投影迭代算法。虽然相比文献[12]中的 ISM，文中给出的最大似然估计方法需要更多的计算量，但是仿真实验表明文中的方法可以进一步提高 ISM 的参数估计精度。

2 预备数学知识

首先给出一些数学符号的定义，这些定义适用于全文：① I_n 为 n 阶单位矩阵，其中第 i 列向量为 $e_i^{(n)}$ ， $\mathbf{1}_n$ 为 n 维全 1 列向量；② P_A 和 P_A^\perp 分别为矩阵 A 列空间和列补空间上的正交投影矩阵；③ $\lambda_{\min}[A]$ 和 $e_{\min}[A]$ 分别为 A 的最小特征值及其对应的首一特征向量；④ $\lambda_{\max}[AB]$ 和 $e_{\max}[AB]$ 分别为矩阵束 $[AB]$ 的最大特征值及其对应的首一广义特征向量。下面将不加证明地给出 3 个引理，它们对于下文的算法推导和理论分析起着非常重要的作用，详细证明可见文献[19~21]。

引理 1^[19] 设任意矩阵 $A \in C^{m \times r}$ 和 $B \in C^{m \times s}$ ，若令 $C = [AB]$ 和 $D = P_A^\perp B$ ，则有 $P_C = P_A + P_D$ 。

引理 2^[20] 设任意 n 阶 Hermite 矩阵 A 和 B ，其中 B 为正定矩阵，记 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ 为矩阵束 $[AB]$ 的广义特征值，而 x_1, x_2, \dots, x_n 是相应的广义特征向量，即 $Ax_k = \lambda_k Bx_k$ ，则有

$$\lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{x^H A x}{x^H B x} \text{ 和 } \lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{x^H A x}{x^H B x} \quad (1)$$

上式中的极小值点和极大值点分别对应 x_n 和 x_1 。

引理 3^[21] 设实参数向量 α 的无偏估计的 CRB 为 CRB_α ，现定义一个新的实向量 $\beta = F\alpha$ ，其中 F 为可逆方阵，则 β 的无偏估计 CRB 为 $CRB_\beta = F \times CRB_\alpha \times F^T$ 。

3 辅助阵元存在下的阵列信号模型和辅助阵元法

3.1 辅助阵元存在下的阵列信号模型

假设一个任意结构的 K 元阵列，它存在方位依赖的幅相误差，在远场处有 D 个窄带信号入射。为

了估计信号方位, 需要放置 P 个精确校正的辅助阵元^[12], 它们与存在方位依赖幅相误差的 K 元阵列构成了一个 M ($M = P + K$) 元阵列。若阵元编号从辅助阵元开始, 并以第一个辅助阵元为参考阵元, 则阵列输出为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{B}\mathbf{s}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (2)$$

式(2)中 $\mathbf{s}(t)$ 为确定信号的复包络向量, $\mathbf{N}(t)$ 为与信号相互统计独立的零均值复圆高斯白噪声向量, $\mathbf{B} = [\mathbf{b}(\theta_1, \delta_1) \quad \mathbf{b}(\theta_2, \delta_2) \quad \cdots \quad \mathbf{b}(\theta_D, \delta_D)]$ 为阵列方向矩阵, 其中, $\mathbf{b}(\theta_k, \delta_k)$ 为阵列流型向量, 根据文中的阵列流型假设它可表示为 $\mathbf{b}(\theta_k, \delta_k) = \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{a}(\theta_k)$, 其中, $\mathbf{\Gamma}_k = \text{diag}[\mathbf{I}_P^T \quad \delta_k^T]$, δ_k 是一个 K 维列向量, 其中的元素表示方位依赖的幅相误差, $\mathbf{a}(\theta_k)$ 表示理想条件下的阵列流型向量, 可将其分块表示为 $\mathbf{a}(\theta_k) = [\mathbf{a}_1^T(\theta_k) \quad \mathbf{a}_2^T(\theta_k)]^T$, 其中, $\mathbf{a}_1(\theta_k)$ 是 P 维列向量, $\mathbf{a}_2(\theta_k)$ 是 K 维列向量, 于是有

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\theta_k, \delta_k) &= \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{a}(\theta_k) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(\theta_k) & \mathbf{O}_{PK} \\ \mathbf{0}_K & \text{diag}[\mathbf{a}_2(\theta_k)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_k \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\theta_k) \boldsymbol{\rho}_k \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)中 $\mathbf{T}(\theta_k)$ 由阵列流型决定的 $M \times (K+1)$ 阶矩阵, $\boldsymbol{\rho}_k = [1 \quad \delta_k^T]^T$ 是关于方位依赖幅相误差的 $K+1$ 维列向量。

由式(2)可得阵列协方差矩阵为

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)] = \mathbf{B}\mathbf{P}\mathbf{B}^H + \sigma \mathbf{I}_M \quad (4)$$

式(4)中 $\mathbf{P} = \mathbf{E}[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$ 为信号协方差矩阵, σ 为噪声功率。在实际计算中, 由式(4)确定的理想协方差矩阵无法获知, 只能通过有限采样获得它的一致估计(最大似然估计)值 $\hat{\mathbf{R}}$ 。若对 $\hat{\mathbf{R}}$ 进行特征分解可将其表示为^[1]

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{\Lambda}}_S \hat{\mathbf{U}}_S^H + \hat{\mathbf{U}}_N \hat{\mathbf{\Lambda}}_N \hat{\mathbf{U}}_N^H \quad (5)$$

式(5)中 $\hat{\mathbf{\Lambda}}_S$ 表示 D 个大特征值构成的对角矩阵, $\hat{\mathbf{U}}_S$ 是相应的单位特征向量构成的特征矩阵, $\hat{\mathbf{\Lambda}}_N$ 表示 $M - D$ 个小特征值构成的对角矩阵, $\hat{\mathbf{U}}_N$ 是相应的单位特征向量构成的特征矩阵。

3.2 辅助阵元法简介

基于子空间原理, 文献[12]给出了一种方位依赖幅相误差自校正的辅助阵元法(ISM)如下:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_k = \arg \min_{\theta} \lambda_{\min} [\hat{\mathbf{Q}}(\theta)] \quad \text{或} \quad \hat{\theta}_k = \arg \min_{\theta} \det [\hat{\mathbf{Q}}(\theta)] \\ \hat{\rho}_k = \mathbf{e}_{\min}[\hat{\mathbf{Q}}(\hat{\theta}_k)] \quad \text{且} \quad \mathbf{e}_{\min}(1) = 1 \\ k = 1, 2, \dots, D \end{cases} \quad (6)$$

式(6)中 $\hat{\mathbf{Q}}(\theta) = \mathbf{T}^H(\theta) \hat{\mathbf{U}}_N \hat{\mathbf{U}}_N^H \mathbf{T}(\theta)$ 。为了保证参数估计的一致性, ISM 还需要满足如下 2 个条件: ① $P \geq D + 1$, 即辅助阵元个数大于信号个数; ② 受扰动后的阵列流型满足“无秩 $M - 1$ 模糊”, 即任意 M 个误差扰动后的阵列流型向量线性独立。

不难看出, ISM 实现了信号方位和方位依赖幅相误差的“去耦合”估计, 该方法计算较为简便, 并具有较高的估计精度^[12]。但需要指出的是, 一维搜索往往只能给出一种次优估计^[17], 其参数估计精度通常都有进一步提高的余地, 为此下节将给出一种利用辅助阵元对方位依赖幅相误差的最大似然自校正方法。

4 基于辅助阵元的方位依赖幅相误差最大似然自校正方法

4.1 最大似然自校正的代价函数

由于文中考虑的信号模型是确定信号, 于是文中的未知参量包括信号方位、方位依赖的幅相误差、确定信号波形以及噪声功率, 通常人们感兴趣的未知参量仅包括前 2 种, 于是根据文献[19]可得最大似然自校正的代价函数为

$$\{\hat{\theta}, \hat{\delta}\} = \arg \max_{\theta, \delta} \text{tr} \{ \mathbf{P}_{\mathbf{B}(\theta, \delta)} \hat{\mathbf{R}} \} \quad (7)$$

式中 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_D]^T$ 表示信号方位向量, $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1^T \quad \delta_2^T \quad \cdots \quad \delta_D^T]^T$ 表示方位依赖的幅相误差向量。需要指出的是, 这里将阵列方向矩阵 \mathbf{B} 表示为 $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta})$ 的目的在于突出 \mathbf{B} 是关于未知参量 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{\delta}$ 的矩阵函数。容易验证, 式(7)中的未知实参量个数为 $(2K+1)D$, 其中包括 $\boldsymbol{\delta}$ 中 $2KD$ 个实参数和 $\boldsymbol{\theta}$ 中的 D 个实参数, 因此式(7)是一个维数较高的非线性优化问题, 直接求解是很难进行的。为了简化问题的求解, 下节将依据文献[19]中给出的交替投影迭代算法的基本思想, 给出一种求解式(7)的改进型交替投影迭代算法。

4.2 改进型交替投影迭代算法

4.2.1 算法的基本思想和关键环节的推导

文献[19]中的交替投影迭代算法的基本思想是在每轮迭代中进行 D 次一维优化, 每次优化仅针对其中某个信号方位, 并保持其他信号方位不变, 按

照这种方式进行迭代直至收敛。此外，在进行一维优化过程中利用了正交投影矩阵的更新公式(即引理 1)，从而起到简化计算的作用。然而对于优化模型式(7)而言，其中的未知参量除了信号方位外还包括方位依赖的幅相误差，因此需要对上述交替投影迭代算法进行变形。事实上，这里在每轮迭代中仍需要进行 D 次优化，只是每次优化针对其中某个信号方位及其方位依赖的幅相误差，并且保持其他信号方位和相应的幅相误差不变，下面将给出这一环节的详细推导过程。

假设在第 k 次迭代中，针对第 i 个信号的方位 θ_i 和幅相误差 δ_i (或 ρ_i) 进行优化，即考虑

$$\{\hat{\theta}_i^{(k)}, \hat{\delta}_i^{(k)}\} = \arg \max_{\theta_i, \delta_i} \text{tr} \left\{ \mathbf{P}_{[\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)} | \mathbf{b}(\theta_i, \delta_i)]} \hat{\mathbf{R}} \right\} \quad (8)$$

式(8)中 $\mathbf{P}_{[\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)} | \mathbf{b}(\theta_i, \delta_i)]}$ 表示矩阵 $[\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)} | \mathbf{b}(\theta_i, \delta_i)]$ 列空间的正交投影矩阵，其中

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}_i^{(k)} &= [\mathbf{b}(\hat{\theta}_1^{(k)}, \hat{\delta}_1^{(k)}) \quad \dots \quad \mathbf{b}(\hat{\theta}_{i-1}^{(k)}, \hat{\delta}_{i-1}^{(k)}) \\ &\quad \mathbf{b}(\hat{\theta}_{i+1}^{(k-1)}, \hat{\delta}_{i+1}^{(k-1)}) \quad \dots \quad \mathbf{b}(\hat{\theta}_D^{(k-1)}, \hat{\delta}_D^{(k-1)})] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \hat{\theta}_i^{(k)} = \arg \max_{\theta_i} \lambda_{\max} [\mathbf{T}^H(\theta_i) \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \hat{\mathbf{R}} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \mathbf{T}(\theta_i) | \mathbf{T}^H(\theta_i) \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \mathbf{T}(\theta_i)] \\ \hat{\rho}_i^{(k)} = \mathbf{e}_{\max} [\mathbf{T}^H(\hat{\theta}_i^{(k)}) \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \hat{\mathbf{R}} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \mathbf{T}(\hat{\theta}_i^{(k)}) | \mathbf{T}^H(\hat{\theta}_i^{(k)}) \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \mathbf{T}(\hat{\theta}_i^{(k)})] \text{ 且 } \mathbf{e}_{\max}(1) = 1 \end{cases}, i=1, 2, \dots, D \quad (12)$$

不难看出，上式的求解需要一次一维搜索和一次广义特征分解。这实质上可看作是文中改进型交替投影迭代算法的一个计算单元，而每轮迭代则需要进行 D 次这样的计算单元。

4.2.2 算法初值的选取方法

迭代算法往往需要好的初值，对于交替投影迭代算法而言也是如此，因此文献[19]在提出交替投影迭代算法的同时也给出了一种有效的初值选取方法，本文也是基于其中的思想给出一种有效的初值选取方法。

首先针对第 1 个信号考虑如下优化问题：

$$\begin{aligned} \{\hat{\theta}_1^{(0)}, \hat{\delta}_1^{(0)}\} &= \arg \max_{\theta_1, \delta_1} \text{tr} \left\{ \mathbf{P}_{\mathbf{b}(\theta_1, \delta_1)} \hat{\mathbf{R}} \right\} \\ &= \arg \max_{\theta_1, \rho_1} \frac{\rho_1^H \mathbf{T}^H(\theta_1) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{T}(\theta_1) \rho_1}{\rho_1^H \mathbf{T}^H(\theta_1) \mathbf{T}(\theta_1) \rho_1} \end{aligned} \quad (13)$$

根据式(10)和式(12)可知上式的最优解为

是已知量，而 $\mathbf{b}(\theta_i, \delta_i)$ 是未知量。根据引理 1 可将式(8)转化为

$$\begin{aligned} \{\hat{\theta}_i^{(k)}, \hat{\delta}_i^{(k)}\} &= \arg \max_{\theta_i, \delta_i} \text{tr} \left\{ \mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \mathbf{b}(\theta_i, \delta_i)} \hat{\mathbf{R}} \right\} \\ &= \arg \max_{\theta_i, \rho_i} \frac{\rho_i^H \mathbf{T}^H(\theta_i) \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \hat{\mathbf{R}} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \mathbf{T}(\theta_i) \rho_i}{\rho_i^H \mathbf{T}^H(\theta_i) \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \mathbf{T}(\theta_i) \rho_i} \end{aligned} \quad (10)$$

需要指出的是，尽管式(10)中的未知向量 ρ_i 为首一向量，但是对于该式的任意最优解 $\hat{\rho}_i^{(k)}$ 而言， $\alpha \hat{\rho}_i^{(k)}$ 仍是它的最优解，因此在考虑该式的优化求解中可忽略此约束。若先考虑对 ρ_i 的优化，则根据引理 2 可知最优解 $\hat{\rho}_i^{(k)}$ 是矩阵束 $[\mathbf{T}^H(\theta_i) \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \hat{\mathbf{R}} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \mathbf{T}(\theta_i) | \mathbf{T}^H(\theta_i) \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \mathbf{T}(\theta_i)]$ 的最大广义特征值对应的广义特征向量，即满足

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^H(\theta_i) \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \hat{\mathbf{R}} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \mathbf{T}(\theta_i) \hat{\rho}_i^{(k)} \\ = \lambda_{\max}^{(k)}(\theta_i) \mathbf{T}^H(\theta_i) \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{B}}_i^{(k)}}^\perp \mathbf{T}(\theta_i) \hat{\rho}_i^{(k)} \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)中 $\lambda_{\max}^{(k)}(\theta_i)$ 是上述矩阵束的最大广义特征值。若将上式代入式(10)可得最优解为

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1^{(0)} = \arg \max_{\theta_1} \lambda_{\max} [\mathbf{T}^H(\theta_1) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{T}(\theta_1) | \mathbf{T}^H(\theta_1) \mathbf{T}(\theta_1)] \\ \hat{\rho}_1^{(0)} = \mathbf{e}_{\max} [\mathbf{T}^H(\theta_1) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{T}(\theta_1) | \mathbf{T}^H(\theta_1) \mathbf{T}(\theta_1)] \text{ 且 } \mathbf{e}_{\max}(1) = 1 \end{cases} \quad (14)$$

在此基础上，针对第 2 个信号可考虑如下优化问题：

$$\begin{aligned} \{\hat{\theta}_2^{(0)}, \hat{\delta}_2^{(0)}\} &= \arg \max_{\theta_2, \delta_2} \text{tr} \left\{ \mathbf{P}_{\mathbf{b}(\hat{\theta}_1^{(0)}, \hat{\delta}_1^{(0)}) | \mathbf{b}(\theta_2, \delta_2)} \hat{\mathbf{R}} \right\} \\ &= \arg \max_{\theta_2, \rho_2} \frac{\rho_2^H \mathbf{T}^H(\theta_2) \mathbf{P}_{\mathbf{b}(\hat{\theta}_1^{(0)}, \hat{\delta}_1^{(0)}) | \mathbf{b}(\theta_2, \delta_2)}^\perp \hat{\mathbf{R}} \mathbf{P}_{\mathbf{b}(\hat{\theta}_1^{(0)}, \hat{\delta}_1^{(0)}) | \mathbf{b}(\theta_2, \delta_2)}^\perp \mathbf{T}(\theta_2) \rho_2}{\rho_2^H \mathbf{T}^H(\theta_2) \mathbf{P}_{\mathbf{b}(\hat{\theta}_1^{(0)}, \hat{\delta}_1^{(0)}) | \mathbf{b}(\theta_2, \delta_2)}^\perp \mathbf{T}(\theta_2) \rho_2} \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)的求解完全类似于式(10)和式(13)，这里不再给出计算公式。按照上述过程直至完成最后一个信号即可获得全部未知参量的迭代初值。

4.2.3 算法步骤的总结

综合上述讨论可得文中改进型交替投影迭代

算法的主要计算步骤如下。

步骤 1 设置 ε 为一个很小的正数, 利用 4.2.2 节中给出的方法计算初值 $\{\hat{\theta}_i^{(0)}, \hat{\delta}_i^{(0)}\}_{i=1}^D$, 并令 $k \leftarrow 1$ 。

步骤 2 利用式(12)完成一轮迭代运算, 从而获得最新的 $\{\hat{\theta}_i^{(k)}, \hat{\delta}_i^{(k)}\}_{i=1}^D$ 。

步骤 3 若 $\|\hat{\theta}^{(k)} - \hat{\theta}^{(k-1)}\|_2 < \varepsilon$, 则终止计算; 否则令 $k \leftarrow k + 1$, 并转至步骤 2)进行下一轮迭代运算。

若将一次一维搜索和一次特征分解看作一次运算单元, 则上述算法需要进行 $(k_{\max} + 1)D$ 次运算单元(其中 k_{\max} 表示迭代次数), 而文献[12]中的 ISM 仅需要进行 D 次类似这样的运算单元, 因此文中算法的计算量大约是 ISM 的 $k_{\max} + 1$ 倍。然而, 第 6 节中的仿真实验表明计算量的提高会换来参数估计精度的改善。

5 参数估计的克拉美罗界

参数估计方差的 CRB 给出了无偏参数估计方差的下界, 本节将推导文中各个参数估计方差的 CRB。虽然文献[12]中也推导了参数估计方差的 CRB, 但是其中的信号模型为高斯随机信号, 而这里将推导确定信号模型下的 CRB。首先给出文中的参数向量

$$\omega = [\bar{s}^T \quad \tilde{s}^T \quad \eta^T \quad \theta^T]^T \quad (16)$$

式(16)中 $\bar{s} = [\bar{s}^T(1) \quad \bar{s}^T(2) \quad \dots \quad \bar{s}^T(L)]^T$, $\bar{s}(t) = \text{Re}\{s(t)\}$;

$\tilde{s} = [\tilde{s}^T(1) \quad \tilde{s}^T(2) \quad \dots \quad \tilde{s}^T(L)]^T$, $\tilde{s}(t) = \text{Im}\{s(t)\}$;

$\eta = [g^T \quad \beta^T]^T$, 其中 $g = [g_1^T \quad g_2^T \quad \dots \quad g_D^T]^T$

$$\begin{cases} H^{(1)}(t) = [s_1(t)J_{PK}^{(1)}J_K^{(2)}(I_K \otimes (\Phi_1 a_2(\theta_1))) \quad \dots \quad s_D(t)J_{PK}^{(1)}J_K^{(2)}(I_K \otimes (\Phi_D a_2(\theta_D)))] \\ H^{(2)}(t) = [i s_1(t)J_{PK}^{(1)}J_K^{(2)}(I_K \otimes b_2(\theta_1)) \quad \dots \quad i s_D(t)J_{PK}^{(1)}J_K^{(2)}(I_K \otimes b_2(\theta_D))] \\ \Phi_k = \text{diag}[\exp\{i\beta_k\}] \quad , \quad J_{PK}^{(1)} = \begin{bmatrix} O_{P \times K} \\ I_K \end{bmatrix} \quad , \quad J_K^{(2)} = [e_1^{(K)} e_1^{(K)T} \quad e_2^{(K)} e_2^{(K)T} \quad \dots \quad e_K^{(K)} e_K^{(K)T}] \end{cases} \quad (19)$$

定理 1 的证明见附录, 根据定理 1 不难得到如下结论。

推论 1 在文中给出的阵型和信号模型条件下, 若方位依赖的幅相误差精确已知, 则未知参量 θ 的 CRB'_θ 满足 $CRB'_\theta \leq CRB_\theta$ 。

6 仿真实验

下面的仿真实验中将重点对文中的最大似然

和 $\beta = [\beta_1^T \quad \beta_2^T \quad \dots \quad \beta_D^T]^T$, 这里 g_k 和 β_k 分别表示 δ_k 的幅度因子和相位因子构成的列向量。在定义完上述参量后可得如下定理。

定理 1 在文中给出的阵型和信号模型条件下, 参量 θ 和 η 的 CRB 可分别由下式给出

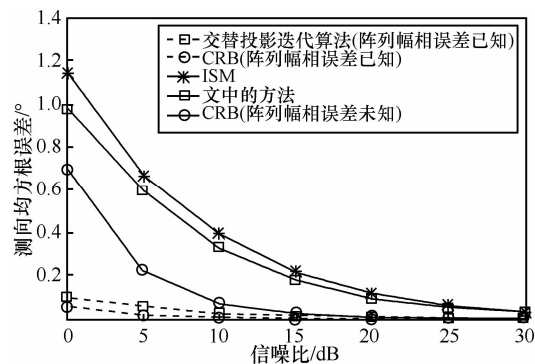
$$CRB_\theta = \frac{\sigma}{2} \left\{ \text{Re} \left\{ \sum_{t=1}^L E^H(t) P_B^\perp E(t) \right\} - \text{Re} \left\{ \sum_{t=1}^L E^H(t) P_B^\perp H(t) \right\} \cdot \left[\text{Re} \left\{ \sum_{t=1}^L H^H(t) P_B^\perp H(t) \right\} \right]^{-1} \cdot \text{Re} \left\{ \sum_{t=1}^L H^H(t) P_B^\perp E(t) \right\} \right\}^{-1} \quad (17)$$

$$CRB_\eta = \frac{\sigma}{2} \left\{ \text{Re} \left\{ \sum_{t=1}^L H^H(t) P_B^\perp H(t) \right\} - \text{Re} \left\{ \sum_{t=1}^L H^H(t) P_B^\perp E(t) \right\} \cdot \left[\text{Re} \left\{ \sum_{t=1}^L E^H(t) P_B^\perp E(t) \right\} \right]^{-1} \cdot \text{Re} \left\{ \sum_{t=1}^L E^H(t) P_B^\perp H(t) \right\} \right\}^{-1} \quad (18)$$

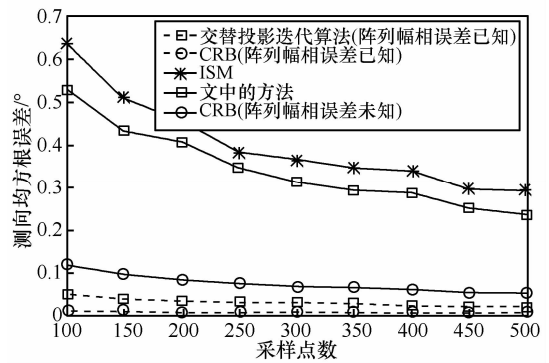
式中 $E(t) = [s_1(t)\dot{b}(\theta_1) \quad s_2(t)\dot{b}(\theta_2) \quad \dots \quad s_D(t)\dot{b}(\theta_D)]$, 其中 $s_i(t)$ 表示 $s(t)$ 的第 i 个分量, $\dot{b}(\theta)$ 表示 $b(\theta)$ 关于 θ 的一阶导数, 而 $H(t) = [H^{(1)}(t) \quad H^{(2)}(t)]$, 其中

方法与文献[12]中的 ISM 进行比较。假设阵列流型为 10 元均匀线阵, 孔径比为 0.5, 其中前 3 个阵元为辅助阵元, 后 7 个阵元存在方位依赖的幅相误差, 现有 2 个等功率的确定信号到达该阵列, 其方位(特指与线阵的夹角)分别为 78° 和 110° , 并且后 7 个阵元对应于方位 78° 的信号的幅度因子分别为 1.450 1、1.1068、1.3913、0.9565、1.3214、1.1154 和 1.4218, 相位误差因子分别为 $-87.250 0^\circ$ 、 $-9.883 5^\circ$ 、 $-6.119 2^\circ$ 、

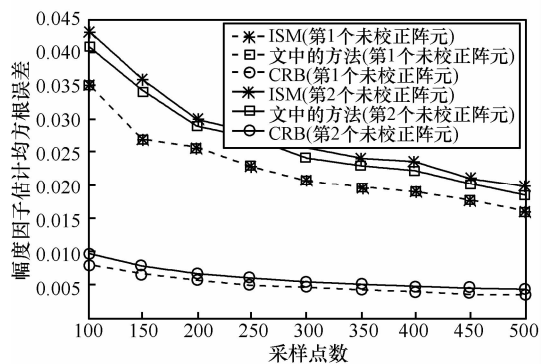
62.320 6°、-53.525 7°、60.859 6°和 32.629 9°，对应于方位 110° 的信号幅度因子分别为 0.731 1、0.986 0、1.262 1、0.518 5、0.944 7、1.291 9 和 1.238 2，相位误差因子分别为 44.421 4°、77.727 5°、-14.644 8°、4.526 4°、30.985 6°、-86.465 1°和 -21.692 2°。图 1 给出了当采样点数为 300，两信号的相关系数为 0.5 时，各种方法(包括 CRB)的测向均方根误差、幅度因子估计均方根误差、相位误差因子估计均方根误差随着信噪比的变化曲线；图 2 给出了当信噪比为 10dB，两信号的相关系数为 0.5 时，各种方法(包括 CRB)



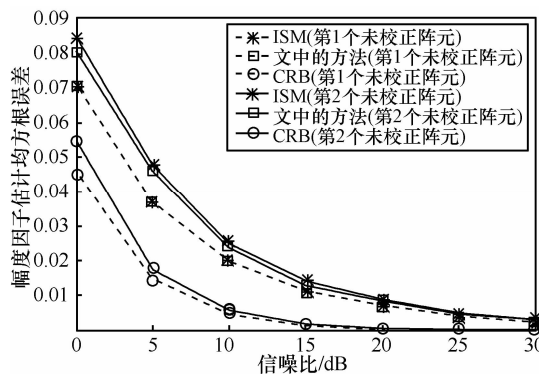
(a) 测向均方根误差曲线



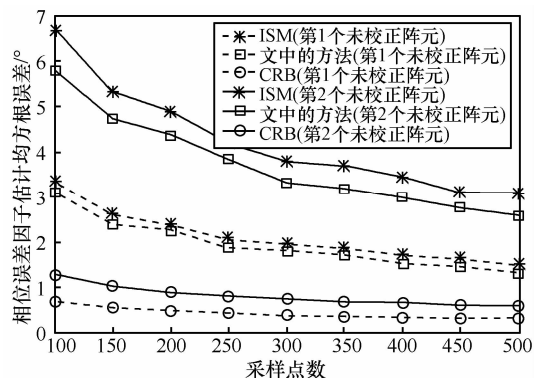
(a) 测向均方根误差曲线



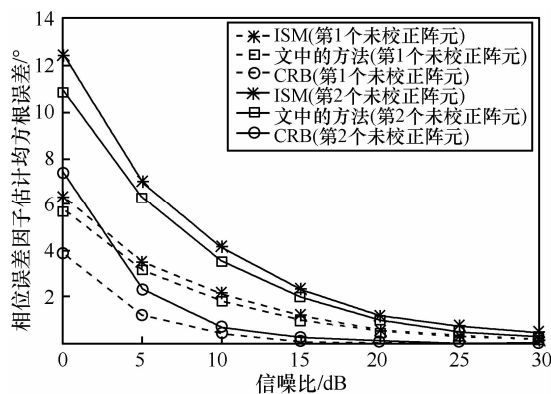
(b) 幅度因子估计均方根误差曲线



(b) 幅度因子估计均方根误差曲线



(c) 相位误差因子估计均方根误差曲线



(c) 相位误差因子估计均方根误差曲线

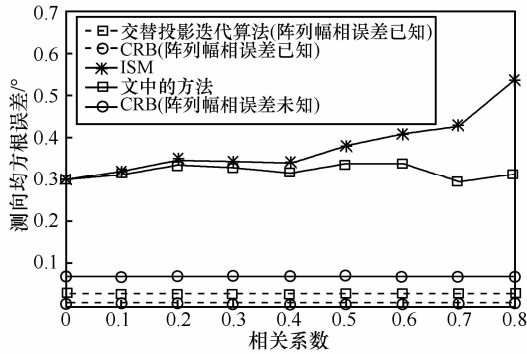
图 1 参数估计均方根误差随信噪比变化的曲线

图 2 参数估计均方根误差随采样点数变化的曲线

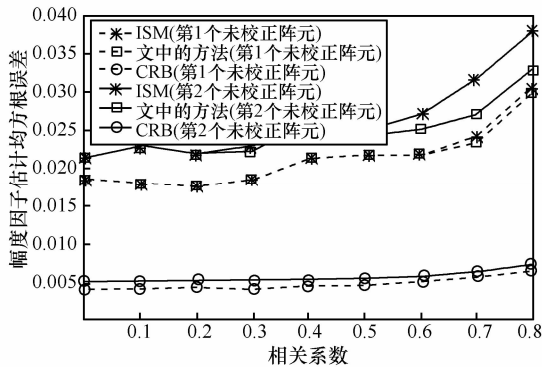
的测向均方根误差、幅度因子估计均方根误差、相位误差因子估计均方根误差随着采样点数的变化曲线；图 3 给出了当信噪比为 10dB，采样点数为 300 时，各种方法(包括 CRB)的测向均方根误差、幅度因子估计均方根误差、相位误差因子估计均方根误差随着两信号相关系数的变化曲线。需要指出的是，限于篇幅考虑，下文仅给出了前 2 个未校正阵元幅相误差的估计精度。

从图 1~图 3 中不难得到如下结论：①在上述仿真条件下，各种方法的参数估计精度都会随着信噪

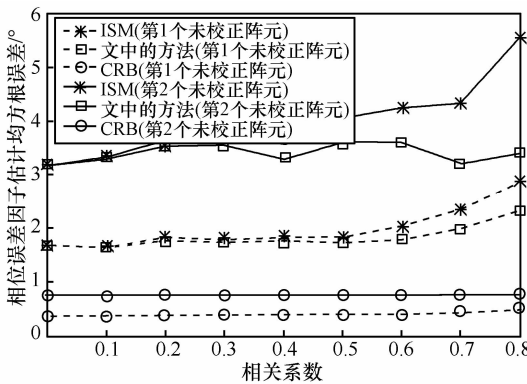
比和采样点数的增加而提高；②当阵列幅相误差已知时的方位估计 CRB 明显小于阵列幅相误差未知时的方位估计 CRB，从而验证了推论 1 的结论；③当两信号的相关系数小于 0.2 时，无论是方位估计精度还是幅相误差的估计精度，文中方法都与 ISM 接近，但当两信号的相关系数大于等于 0.2 时，无论是方位估计精度还是幅相误差的估计精度，文中方法都会高于 ISM，并且随着两信号相关系数的增加，文中方法的优势更加明显，这就验证了文中方法在参数估计精度上的优越性。



(a) 测向均方根误差曲线



(b) 幅度因子估计均方根误差曲线



(c) 相位误差因子估计均方根误差曲线

图 3 参数估计均方根误差随两信号相关系数变化的曲线

7 结束语

针对确定信号模型条件下方位依赖幅相误差的自校正问题，本文基于文献[12]中的阵列模型给出了一种利用辅助阵元对方位依赖幅相误差的最大似然自校正。针对最大似然估计器中面临的高维非线性优化问题，文中推导了一种改进型的交替投影迭代算法。虽然相比文献[12]中 ISM，文中给出的最大似然方法需要更多的计算量，但是仿真实验表明了文中的方法可以进一步提高 ISM 的参数估计精度，尤其是在信号相关性较强的条件下。最后需要指出的是，尽管文中方法在参数估计精度上优于 ISM，但是相比 CRB，文中方法的估计精度还有一定差距，这是因为在确定信号模型条件下，最大似然估计的渐近有效性难以得到保证^[17-19]，因此估计精度仍有进一步提高的余地，还需要继续展开研究。

附录 定理 1 的证明

附录对定理 1 进行证明。在文中的信号模型条件下，参数向量 ω 的 CRB 为^[15,22]：

$$CRB_{\omega} = \frac{\sigma^2}{2} [\text{Re}\{\Sigma^H \Sigma\}]^{-1}$$

式中 $\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial s^T} & \frac{\partial \mu}{\partial s^T} & \frac{\partial \mu}{\partial \eta^T} & \frac{\partial \mu}{\partial \theta^T} \end{bmatrix}$ ，其中， $\frac{\partial \mu}{\partial s^T} = I_L \otimes B$ 和

$\frac{\partial \mu}{\partial s^T} = i(I_L \otimes B)$ ，并且

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial \theta^T} &= [s_1 \otimes \dot{b}(\theta_1) \quad s_2 \otimes \dot{b}(\theta_2) \quad \dots \quad s_D \otimes \dot{b}(\theta_D)] \\ &= [E^H(1) \quad E^H(2) \quad \dots \quad E^H(L)]^H = E \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)中 $s_k = [s_k(1) \quad s_k(2) \quad \dots \quad s_k(L)]^T$ ，此外还有 $\frac{\partial \mu}{\partial \eta^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial g^T} & \frac{\partial \mu}{\partial \beta^T} \end{bmatrix}$ ，

其中，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial g^T} &= [s_1 \otimes \{J_{PK}^{(1)} J_K^{(2)} [I_K \otimes (\Phi_1 a_2(\theta_1))]\} \quad \dots \\ &\quad s_D \otimes \{J_{PK}^{(1)} J_K^{(2)} [I_K \otimes (\Phi_D a_2(\theta_D))]\}] \\ &= [H^{(1)H}(1) \quad H^{(1)H}(2) \quad \dots \quad H^{(1)H}(L)]^H = H^{(1)} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial \beta^T} &= [s_1 \otimes \{i J_{PK}^{(1)} J_K^{(2)} (I_K \otimes b_2(\theta_1))\} \quad \dots \\ &\quad s_D \otimes \{i J_{PK}^{(1)} J_K^{(2)} (I_K \otimes b_2(\theta_D))\}] \\ &= [H^{(2)H}(1) \quad H^{(2)H}(2) \quad \dots \quad H^{(2)H}(L)]^H = H^{(2)} \end{aligned} \quad (22)$$

于是有

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\eta}^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(1)} & \mathbf{H}^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^H(1) & \mathbf{H}^H(2) & \cdots & \mathbf{H}^H(L) \end{bmatrix}^H \quad (23)$$

为了给出参量 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 的 CRB 的闭式形式，下面将借鉴文献[15]和文献[21]中的思想，重新定义一个新的参量，而该参量的 CRB 具有块对角矩阵的形式，为此可令

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{s}} + \bar{\mathbf{U}}\boldsymbol{\eta} + \bar{\mathbf{V}}\boldsymbol{\theta})^T & (\tilde{\mathbf{s}} + \tilde{\mathbf{U}}\boldsymbol{\eta} + \tilde{\mathbf{V}}\boldsymbol{\theta})^T & \boldsymbol{\eta}^T & \boldsymbol{\theta}^T \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

式(24)中 $\bar{\mathbf{U}} = \text{Re}\{\mathbf{U}\}$ 和 $\tilde{\mathbf{U}} = \text{Im}\{\mathbf{U}\}$ ，其中， $\mathbf{U} = (\mathbf{I}_L \otimes \mathbf{B}^\dagger)\mathbf{H}$ ； $\bar{\mathbf{V}} = \text{Re}\{\mathbf{V}\}$ 和 $\tilde{\mathbf{V}} = \text{Im}\{\mathbf{V}\}$ ，其中， $\mathbf{V} = (\mathbf{I}_L \otimes \mathbf{B}^\dagger)\mathbf{E}$ 。由式(24)可得 $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{F}\boldsymbol{\omega}$ ，其中

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{DL} & \mathbf{O}_{DL} & \bar{\mathbf{U}} & \bar{\mathbf{V}} \\ \mathbf{O}_{DL} & \mathbf{I}_{DL} & \tilde{\mathbf{U}} & \tilde{\mathbf{V}} \\ \mathbf{O}_{2DK \times DL} & \mathbf{O}_{2DK \times DL} & \mathbf{I}_{2DK} & \mathbf{O}_{2DK \times D} \\ \mathbf{O}_{D \times DL} & \mathbf{O}_{D \times DL} & \mathbf{O}_{D \times 2DK} & \mathbf{I}_D \end{bmatrix} \quad (25)$$

根据引理 3 可知参量 $\boldsymbol{\kappa}$ 的 CRB 为

$$\text{CRB}_{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\sigma}{2} \left[\text{Re} \left\{ (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{F}^{-1})^H (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{F}^{-1}) \right\} \right]^{-1} \quad (26)$$

式(26)中

$$\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L \otimes \mathbf{B} & \mathbf{i}(\mathbf{I}_L \otimes \mathbf{B}) & (\mathbf{I}_L \otimes \mathbf{P}_B^\perp)\mathbf{H} & (\mathbf{I}_L \otimes \mathbf{P}_B^\perp)\mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (27)$$

将式(27)代入式(26)可得

$$\text{CRB}_{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\sigma}{2} \left[\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_1 & \mathbf{O}_{2DL(2DK+D)} \\ \mathbf{O}_{(2DK+D)2DL} & \boldsymbol{\Omega}_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \quad (28)$$

式(28)中 $\boldsymbol{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{I}_L \otimes (\mathbf{B}^H \mathbf{B})\} & -\text{Im}\{\mathbf{I}_L \otimes (\mathbf{B}^H \mathbf{B})\} \\ \text{Im}\{\mathbf{I}_L \otimes (\mathbf{B}^H \mathbf{B})\} & \text{Re}\{\mathbf{I}_L \otimes (\mathbf{B}^H \mathbf{B})\} \end{bmatrix}$

和 $\boldsymbol{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{H}^H(\mathbf{I}_L \otimes \mathbf{P}_B^\perp)\mathbf{H}\} & \text{Re}\{\mathbf{H}^H(\mathbf{I}_L \otimes \mathbf{P}_B^\perp)\mathbf{E}\} \\ \text{Re}\{\mathbf{E}^H(\mathbf{I}_L \otimes \mathbf{P}_B^\perp)\mathbf{H}\} & \text{Re}\{\mathbf{E}^H(\mathbf{I}_L \otimes \mathbf{P}_B^\perp)\mathbf{E}\} \end{bmatrix}$ 。再根

据分块矩阵的求逆公式可知式(17)和式(18)成立。

参考文献：

[1] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Trans on AP, 1986, 34(3): 267-280.
 [2] FRIEDLANDER B. A sensitivity analysis of the MUSIC algorithm[J]. IEEE Trans on ASSP, 1990, 38(10): 1740-1751.
 [3] FERR OL A, LARZABAL P, VIBERG M. On the asymptotic performance analysis of subspace DOA estimation in the presence of modeling errors: case of MUSIC[J]. IEEE Trans on SP, 2006, 54(3): 907-920.
 [4] FERR OL A, LARZABAL P, VIBERG M. On the resolution probability of MUSIC in presence of modeling errors[J]. IEEE Trans on SP, 2008, 56(5): 1945-1953.
 [5] LIU Z M, HUANG Z T, ZHOU Y Y. Bias analysis of MUSIC in the

presence of mutual coupling[J]. IET SP, 2009, 3(1): 74-84.
 [6] FRIEDLANDER B, WEISS A J. Direction finding in the presence of mutual coupling[J]. IEEE Trans on AP, 1991, 39(3): 273-284.
 [7] VIBERG M, OTTERSTEN M. Sensor array processing based on subspace fitting[J]. IEEE Trans on SP, 1991, 39(5): 1110-1121.
 [8] SELLONE F, SERRA A. A novel mutual coupling compensation algorithm for uniform and linear arrays[J]. IEEE Trans on SP, 2007, 55(2): 560-573.
 [9] SEE C M S. Method for array calibration in high-resolution sensor array processing[J]. IEE Proc-Radar, Sonar, Naving, 1995, 142(3): 90-96.
 [10] SEE C M S, POTH B K. Parametric sensor array calibration using measured steering vectors of uncertain locations[J]. IEEE Trans on SP, 1999, 47(4): 1133-1137.
 [11] MIR H S. A generalized transfer-function based on array calibration technique for direction finding[J]. IEEE Trans on SP, 2008, 56(2): 851-855.
 [12] 王布宏, 王永良, 陈辉等. 方位依赖阵元幅相误差校正的辅助阵元法[J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2004, 34(8): 906-918.
 WANG B H, WANG Y L, CHEN H, *et al.* Array calibration of angularly dependent gain and phase uncertainties with carry-on instrumental sensors[J]. Science in China Series E: Information Sciences, 2004, 34(8): 906-918.
 [13] WANG B H, WANG Y L, GUO Y. Mutual coupling calibration with instrumental sensors[J]. Electronics Letters, 2004, 40(7): 373-374.
 [14] WEISS A J, FRIEDLANDER B. DOA and steering vector estimation using a partially calibrated array[J]. IEEE Trans on AES, 1996, 32(3): 1047-1057.
 [15] PESAVENTO M, GERSHMAN A B, WONG K M. Direction finding in partly calibrated sensor arrays composed of multiple subarrays[J]. IEEE Trans on SP, 2002, 50(9): 2103-2115.
 [16] SEE C M S, GERSHMAN A B. Direction-of-arrival estimation in partly calibrated subarray-based sensor arrays[J]. IEEE Trans on SP, 2004, 52(2): 329-338.
 [17] STOICA P, SHARMAN K C. Maximum likelihood methods for direction-of-arrival estimation[J]. IEEE Trans on ASSP, 1990, 38(7): 1132-1143.
 [18] STOICA P, NEHORAI A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramér-Rao bound: further results and comparisons[J]. IEEE Trans on ASSP, 1990, 38(12): 2140-2150.
 [19] ZISKIND I, WAX M. Maximum likelihood localization of multiple sources by alternating projection[J]. IEEE Trans on ASSP, 1988, 36(10): 1553-1560.
 [20] 王松桂, 吴密霞, 贾忠贞. 矩阵不等式[M]. 北京: 科学出版社, 2006. 78-79.
 WANG S G, WU M X, JIA Z Z. Matrix Inequation[M]. Beijing: Science Press, 2006. 78-79.
 [21] STOICA P, LARSSON E G. Comments on linearization method for finding Cramér-Rao bounds in signal processing[J]. IEEE Trans on SP, 2001, 49(12): 3168-3169.
 [22] STOICA P, MOSES R. Introduction to Spectral Analysis[M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1997.

(下转第 47 页)