

文章编号:1000-6893(2006)06-1113-04

受面内非均匀分布载荷的矩形板屈曲分析

史旭东, 王鑫伟

(南京航空航天大学 航空宇航学院, 江苏 南京 210016)

Analysis of Buckling of Rectangular Plates Subjected to Non-uniformly Distributed In-plane Loadings

SHI Xu-dong, WANG Xin-wei

(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

摘要: 薄板线性稳定性分析进行了很多年, 发展得较为完善并且有手册可方便查阅。受非均匀面内分布载荷的板因为解析解不易求出, 在分析中一般假设应力与边缘处的作用力分布规律相同。实际上此时板内的应力分布却与边缘处的一不一样, 而且还会产生另外两个应力分量, 其影响取决于边界条件。采用有限元法分析非均匀载荷作用时薄板的稳定性问题, 给出多种边界条件下的板的屈曲载荷, 还给出了相应的基于受均匀载荷薄板屈曲载荷的当量因子。同时发现《飞机设计手册》中薄板受某线性载荷作用时的临界载荷因子不够精确。研究结果为承受非均匀面内分布载荷的板结构设计提供参考依据。

关键词: 屈曲; 有限元法; 非均匀分布载荷; 矩形板

中图分类号: V214.3⁺5 **文献标识码:** A

Abstract: Linear buckling problems of rectangular plates subjected to in-plane compressive loadings have been researched for many years. Theory has been relatively mature and there are manuals for designers to consult. Since analytical solutions for the plate subjected to non-uniformly distributed loading are not easy to obtain, in obtaining the buckling load, the distributions of the in-plane stresses are usually assumed as the same as the loads applied on the edges. Actually the distribution of the in-plane stresses is quite different from the assumption. Moreover, other two stress components also appear and their effects on the buckling load depend on the boundary conditions. Finite element method is used to investigate the buckling behaviors of thin plates subjected to non-uniformly distributed loadings. The buckling loads for several boundary conditions are given. For convenience to the designers, formulae are given to relate the buckling loads subjected to non-uniformly distributed loads with these subjected to equivalent uniformly distributed loads. It is found that some buckling loads listed in the "Aircraft Design Manual" are inaccurate for one case of plates subjected to linearly distributed loadings. The present results may provide a reference for designing plate structures subjected to non-uniformly distributed loadings.

Key words: buckling; FEM; non-uniformly distributed load; rectangular plate

高速飞行器在速度和高度急剧变化时的瞬态热应力会急剧升高, 体现为薄板结构受非均匀载荷的屈曲问题^[1]。解决此类问题首先要得到正确的面内应力分布, 由于解析解不易求得, 所以有关于这方面的研究文献相对较少。

1958年 van der Neut 首先给出了轴向受余弦分布力下矩形板的屈曲问题解答^[1]; 后来 Benoy 基于能量法也研究了矩形板在轴向承受面内抛物线形分布压力下的屈曲问题^[2]。因为不易获得满足所有边界条件的解析解, 所以在分析时假设板内的应力与边缘的载荷一致。实际上受非均匀面内分布载荷时板内的应力分布与边缘处的

载荷不一样, 即使在单向载荷作用下, 也会产生另外两个应力分量, 其对屈曲载荷影响大小取决于边界条件和长宽比。最近 Bert 等人指出^[3]: 板受非均匀面内分布载荷时不能忽略次要应力对临界载荷的影响。由于一般边界条件下解析解不易得出, 所以他们只给出了四边简支板屈曲问题的解析解, 而且载荷作用边的正应力条件仍是近似地得到了满足。

飞机壁板之间有多种联接方式, 更多体现为其他边界条件^[4]。考虑到解析解不易求得, 采用 MSC/NASTRAN 有限元软件进行分析。为了设计者的使用方便, 引入了当量因子 λ , 给出了相应的计算公式, 这样可利用《飞机设计手册》^[5]中已有的均匀载荷下矩形薄板的屈曲载荷因子, 方便

地求得非均匀面内载荷下矩形薄板的屈曲载荷因子。

1 有限元模型

采用 MCS/NASTRAN 有限元软件进行分析。分析中采用曲面壳体单元(Quad 4)^[6],该单元有 4 个节点,在每个角节点 i 有 5 个自由度,即位移 u_i, v_i, ω_i 和转角 θ_x 和 θ_y 。采用 2×2 高斯积分求解单元刚度矩阵。

板的大小和坐标系如图 1 所示。为了方便起见,用字母 S,C,F 分别表示边界约束为简支、固支和自由,并按 $x = -a/2, y = b/2, x = a/2, y = -b/2$ 的顺序依次标记板四周的支承情况。例如将 $x = -a/2, x = a/2$ 两边简支,其余两边自由的矩形板记为 SFSF 板。

为验证有限元模型正确性,先分析了 SSSS 矩形薄板受均匀面内压缩载荷 $\sigma_x = \sigma_0$ 时的临界载荷。分析时取板的长宽比为 3。有限元得到的临界载荷因子和《飞机设计手册》中的临界载荷因子分别为 3.98 和 4.0^[5],可见误差在工程允许范围内。为了确定单元的大小,取不同长宽比的模型利用 MCS/PATRAN 采用逐次倍增网格划分进行收敛性分析,发现采用 $a/32$ 的正方形单元(如长宽比 $\alpha = a/b = 3$,采用 96×32 网格划分)能满足收敛性要求。分析结果均基于这种网格划分。

(1) 受非均匀面内载荷板的应力分布 现在先分析如图 1 所示板的面内的应力分布。作用在 $x = \pm a/2$ 处的余弦分布压力为 $\sigma_x = \sigma_0 \cos(\pi y/b)$ 。在 $y = \pm b/2$ 处 $\sigma_y = 0$,四边边缘 $\tau_{xy} = 0, \alpha = 3$ 。用有限元求出面内的应力分布的计算结果如图 2~图 4 所示。可以看出,应力由 $x = \pm a/2$ 处的非线性分布到中心处的均匀分布呈扩散状(diffusion)。显然应力分布与 x, y 坐标都有关系,并与边缘处作用力的分布不同。 σ_x 在距板边缘前 1/4 部分非均匀分布十分明显,之后应力分布迅速趋于均匀。所以仅仅假设 $\sigma_x(N_x)$ 是 y 的单值函数得到的稳定性分析结果是不精确的。

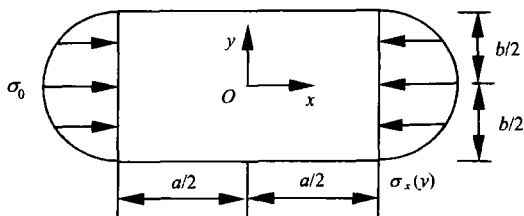


图 1 板的几何模型与半余弦载荷

Fig. 1 Geometry and cosinoidal loading of the plate

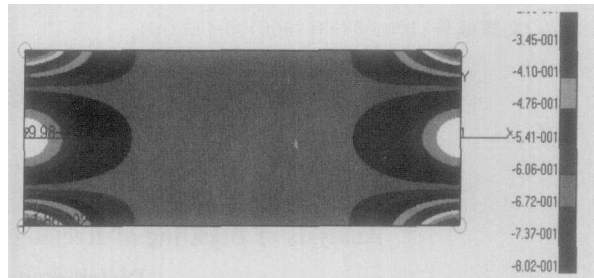


图 2 余弦载荷沿板中面 σ_x 分布($\alpha = 3$)

Fig. 2 Cosinoidal distributed loading stress σ_x versus position in the midplane of the plate($\alpha = 3$)

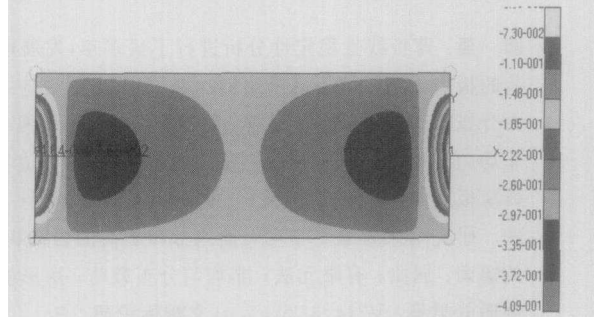


图 3 余弦载荷沿板中面 σ_y 分布($\alpha = 3$)

Fig. 3 Cosinoidal distributed loading stress σ_y versus position in the midplane of the plate($\alpha = 3$)

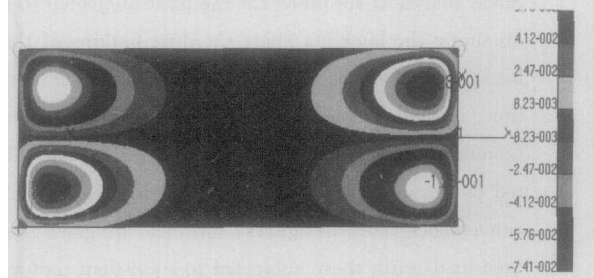


图 4 余弦载荷沿板中面 τ_{xy} 分布($\alpha = 3$)

Fig. 4 Cosinoidal distributed loading stress τ_{xy} versus position in the midplane of the plate($\alpha = 3$)

为再次验证有限元模型的正确性,现将有限元结果与 Bert 等人^[3]的解析结果进行对比。图 5 和图 6 给出了 σ_x 和 τ_{xy} 在板的不同位置的分布,

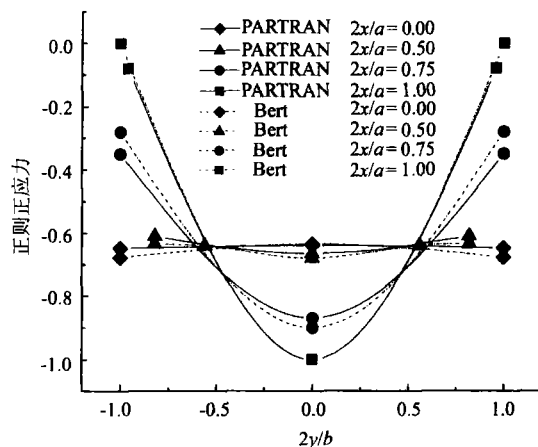


图 5 正则力(σ_x/σ_0)在 $2x/a = 0, 0.50, 0.75, 1.00$ 分布($\alpha = 3$)

Fig. 5 Normal stress(σ_x/σ_0)distributions at $2x/a = 0, 0.50, 0.75, 1.00(\alpha = 3)$

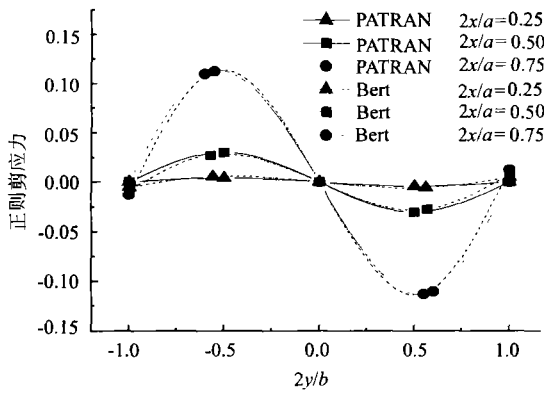


图 6 沿板宽方向 τ_{xy}/σ_0 分布 ($\alpha=3$)
Fig. 6 Shear stress τ_{xy}/σ_0 distribution across plate width ($\alpha=3$)

以看出两者得到的应力分布相近。

(2) 受面内非均匀压缩载荷矩形板的屈曲
考虑图 1 所示的矩形板分别受到余弦载荷或抛物线形分布载荷 $\sigma_x = \sigma_0(1 - 4(y/b)^2)$ 作用,板四边简支(SSSS)。为了便于比较,定义屈曲载荷系数为 $K = \sigma_0 h b^2 / \pi^2 D$ 。表 1 列出了 Neut, Benoy 与有限元分析的结果。可以看出,有限元法所得到的临界载荷因子 K 均比它们的大,且差异有随着长宽比的增加而增加的趋势。有限元法考虑了应力分布的扩散现象和 σ_y, τ_{xy} 的贡献,而 Neut 和 Benoy 没有计及 σ_y, τ_{xy} 对几何刚度矩阵的贡献,也没有考虑应力分布的扩散现象,而且假设 σ_x 的分布与边缘的一样,所以得出的临界载荷偏保守。

表 1 SSSS 板各种长宽比下的屈曲系数的 K 的比较
Table 1 Comparison of K with different aspect ratios

α	本文	文献[2]	与文献[2]的 差异/%	本文	文献[1]	与文献[1]的 差异/%
0.5	7.23	7.08	2.1			
1.0	5.21	4.59	13.5	5.373	4.68	14.8
3.0	5.60	4.53	23.6			

从表 2 可以看出有限元所得的 K 值与 Bert 等人的结果比较接近。但本文有限元结果仍比解析解略大,差异可能是 Bert 等人的解析解并没有精确满足载荷作用边正应力的边界条件而造成的。

表 2 SSSS 板各种长宽比下的屈曲系数 K 的比较
Table 2 Comparison of K with different aspect ratios

α	本文	文献[3]	误差/%
0.5	7.409	7.841	-5.51
1.0	5.373	5.146	4.41
3.0	5.818	5.748	1.22

(3) 当量因子 由于解析解不易得出,所以 Bert 等仅给出了四边简支板受非均匀面内压缩载荷时的屈曲问题的解析解(作用力处正应力边

界条件没有精确满足)。实际飞机板结构之间连接方式多种多样,虽然解析解不易求得,但可用有限元法求出。

考虑到矩形板面内受均匀压缩的屈曲载荷有手册可以查阅^[6],为了设计者的使用方便,这里引入了当量因子 λ 。定义 λ 为在相同总压缩载荷下,余弦载荷下的屈曲载荷因子 K_s 和均匀载荷下屈曲载荷因子 K_u 的比值,即 $K_s = \lambda K_u$ 。

图 7 给出了不同边界条件和不同长宽比下对当量因子进行指数衰减拟合得出的结果,符号代表有限元的分析结果,而实线代表下面公式给出的拟合数据。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{SSSS} &= 1.48432 - 0.49224e^{-1.092\alpha} \\ \lambda_{SCSC} &= 1.37763 - 0.4397e^{-1.409\alpha} \\ \lambda_{SCSS} &= 1.43521 - 0.44432e^{-1.162\alpha} \end{aligned} \right\} (4)$$

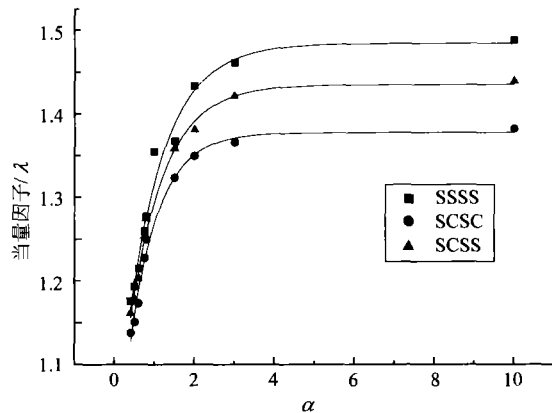


图 7 不同边界条件下的当量因子 λ
Fig. 7 Comparative factor λ under different boundary conditions

根据圣维南定理,较长板中间区域的 σ_x 趋于常数(图 2),而这时 σ_y, τ_{xy} 的值很小,所以其影响可以忽略不计。随着长宽比的增加,单向受压板的屈曲载荷趋于定值,所以,当量因子分别也趋于一定的常数。

2 面内受线性压缩载荷矩形板的屈曲

在验证有限元模型的正确性时,做了大量的计算工作,发现对于图 8 所示的线性分布载荷情

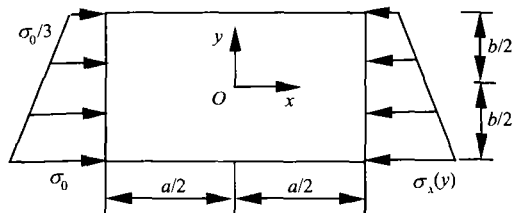


图 8 板的几何模型与线性载荷
Fig. 8 Geometry model and linear loading of the plate

况《飞机设计手册》等资料^[7,8]中给出的有些结果精度不高。图8所示是一四边简支矩形板面内受线性分布载荷 $\sigma_x = 2\sigma_0(1-y/b)/3$ 的作用,表3给出了有限元结果和文献中结果的比较。可以清楚的看出文献中的屈曲载荷因子偏小,尤其当 $\alpha = 0.6$ 时误差达到 5.63%,这会影响实际设计中的经济性。

表3 《飞机设计手册》线性面内载荷屈曲因子修正

Table 3 Revision of buckling factor in "Aircraft Design Manual"

α	0.40	0.60	0.75	0.80	1.00	1.50
《手册》	10.8	7.1	6.1	6.0	5.8	6.1
本文	12.2	7.5	6.4	6.2	5.9	6.4

3 结论

考虑到一般边界条件下受非均匀面内压缩载荷的矩形薄板屈曲问题的解析解不易求出,采用商用有限元软件分析了该问题,验证了 Bert 等人最近的结论,即应计及面内应力分布的扩散现象和 σ_y, τ_{xy} 的对屈曲载荷的贡献。

为了设计者的使用方便,利用《飞机设计手册》已有均匀载荷下矩形薄板的屈曲载荷因子,引入当量因子 λ ,并给出了其计算公式,可方便求得非均匀面内载荷下矩形薄板的屈曲载荷因子,为工程应用提供了方便、快捷的手段。

在验证本有限元模型正确性时,发现了《飞机设计手册》等资料中给出的受线性面内压缩载荷 $\sigma_x = 2\sigma_0(1-y/b)/3$ 的矩形薄板屈曲载荷的结果不够精确,本文给出了更精确的结果。

参 考 文 献

[1] van der Neut. Buckling caused by thermal stresses[M]. High temperature effects in aircraft structures. AGARDograph, No. 28; High Temperature Effects in Aircraft Structures. London; Pergamon Press, 1958:215-247.

- [2] Benoy M B. An energy solution for the buckling of rectangular plates under non-uniform in-plane loading[J]. Aeronautical Journal, 1969, 73: 974-977.
- [3] Bert B W, Devarakonda K K. Buckling of rectangular plates subjected to nonlinearly distributed in-plane loading[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40: 4097-4106.
- [4] 王宝忠. 飞机设计手册 第十册 结构设计[M]. 北京:航空工业出版社, 2000.
Wang B Z. Aircraft design manual. Vol. 10. structure design [M]. Beijing: Aviation Industry Book Company, 2000. (in Chinese)
- [5] 解思适. 飞机设计手册 第九册 载荷、强度和刚度[M]. 北京:航空工业出版社, 2001: 389-403.
Xie S S. Aircraft design manual. Vol. 9. loading, strength and rigidity[M]. Beijing: Aviation Industry Book Company, 2001: 389-403. (in Chinese)
- [6] 张永昌. MSC. NASTRAN 有限元分析理论基础与应用[M]. 北京:科学出版社, 2003: 218-220
Zhang Y C. MSC. NASTRAN FEM analysis and application[M]. Beijing: Science Book Company, 2003: 218-220. (in Chinese)
- [7] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of elasticity[M]. 2nd, New York; McGraw-Hill Book Company, 1951: 50-51.
- [8] Young W C, Budynas R G. Roark's formulas for stress and strains[M]. 7th. New York; McGraw-Hill, 2002: 502-517.

作者简介:



史旭东(1979-) 男,辽宁丹东人,南京航空航天大学工程力学专业在读硕士,主要从事复合材料板壳稳定性研究工作。E-mail: s-x-dong@sina.com

王鑫伟(1948-) 男,江苏吴县人,南京航空航天大学教授,博士生导师,主要从事复合材料、智能结构等方面研究工作。E-mail: wangx@nuaa.edu.cn.

(责任编辑:李铁柏)