

# 圆形微通的对流换热特性研究

刘焕玲, 贾建援, 殷磊

(西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071)

**【摘要】**针对圆形微通道内流体的强迫对流问题, 利用分离变量法求解了考虑轴向热传导、速度滑移和温度跳跃、粘度耗散和入口效应等因素的圆形微通道的控制方程, 给出了流体温度场和努塞尔数的计算表达式。对圆形微通道换热特性进行了数值仿真, 结果表明, 受尺寸效应的影响, 管径越小, 平均对流换热系数越大。微通道的换热能力比宏观经典通道强, 表明在相同面积上做多个微通道比一个宏观大通道的换热效果好。

**关键词** 轴向热传导; 强迫对流; 努塞尔数; 速度滑移; 温度跳跃; 热入口效应

中图分类号 TK124

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2009.03.038

## Heat Transfer in Circular Microchannel

LIU Huan-ling, JIA Jian-yuan, and YIN Lei

(School of Electromechanical Engineering Xidian University Xi'an 710071)

**Abstract** Forced convection of the circular microchannel is analyzed. The governing equations of circular microchannel are solved by separation of variables, with the considerations of axis conduction, viscous dissipation, thermal entrance and velocity slip. Then the expressions of temperature field and Nusselt number at uniform wall temperature conditions are achieved. Simulation of heat transfer is conducted. It is shown that the average heat transfer coefficient of microchannel is larger than macrochannel when the radius decreases for the small size effect, which means that face the average heat transfer coefficient of several microchannels on the same surface area is larger than that of one macrochannel.

**Key words** axial conduction; forced convection; nusselt number; thermal entrance; temperature jump; velocity slip

由于微通道结构具有极好的换热性能<sup>[1]</sup>, 近年来微换热机理逐渐成为研究热点。但是现有的文献存在很大的分歧, 文献[2]给出了对流换热系数大于经典理论所计算的结果, 文献[3]和宏观的一致, 而文献[4]则远远小于经典理论的计算结果, 因此迫切需要研究微换热理论。

由于实验结果的分散性, 对经典理论进行修正时主要考虑了轴向热传导<sup>[5-6]</sup>、速度滑移<sup>[6-7]</sup>、温度跳跃<sup>[6-7]</sup>、入口效应<sup>[8]</sup>、粘度耗散<sup>[8-9]</sup>等因素对换热效果的影响。文献[6]推导得到了考虑速度滑移、温度跳跃和轴向热传导情况下, 圆形微通道流体温度和努塞尔数的计算表达式, 讨论了Pe数对努塞尔数的影响。其研究表明轴向热传导只在入口段影响努塞尔数, Pe数越小, 努塞尔数在入口处的数值越大。而在充分发展阶段, 努塞尔数与经典理论的吻合。文献[8]研究了考虑粘度耗散及入口效应的宏观圆形

管道流体的对流换热问题。利用分离变量法求解得到了流体的努塞尔数计算表达式, 并讨论了Br数对流体换热性能的影响。文献[9]推导得到了考虑速度滑移、温度跳跃、轴向热传导及粘度耗散情况下, 缝隙微通道流体的温度及努塞尔数计算式, 讨论了Br、Pe、 $l_s$ 对缝隙微流体换热性能的影响。

针对圆形微通道, 本文研究了一种对同时考虑轴向热传导、速度滑移和温度跳跃、入口效应、粘度耗散等影响因素的能量方程进行求解的方法, 得到了能量方程的完备解和定壁温边界条件下的努塞尔数的计算方程以及平均换热系数的计算公式。

### 1 圆形微通道的能量方程

假设圆形微通道内流体为定常、不可压缩且充分发展, 流体的热流及温度具有轴对称性, 微通道的导热系数为常数, 无热源、稳态, 采用柱坐标系,

收稿日期: 2008年08月27日; 修回日期: 2009年01月16日。

基金项目: 部级预研基金

作者简介: 刘焕玲(1976年), 女, 博士生, 主要从事微对流换热方面的研究。

其能量方程为<sup>[10]</sup>:

$$\rho c_p w \frac{dt}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \lambda \frac{dt}{dr} \right) - \mu \frac{d^2 w}{dr^2} = 0 \quad (1)$$

式中  $w$ 为流体速度;  $\rho$ 为流体密度;  $c_p$ 为比定压热容;  $t$ 为流体温度;  $z$ 为轴向坐标;  $r$ 为半径;  $\lambda$ 为流体的热传导系数;  $\mu$ 为动力粘度。

考虑速度滑移边界条件, 处于充分发展阶段的流体速度<sup>[7]</sup>为:

$$w(r) = 2w_m \frac{1 - (r/R_0)^2}{1 + l_s/R_0} \quad (2)$$

式中  $w_m$ 为平均速度;  $l_s$ 为速度滑移系数。

将式(2)代入式(1), 可得到非齐次二阶线性偏微分方程为:

$$\rho c_p w \frac{dt}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \lambda \frac{dt}{dr} \right) - \frac{16 \mu w_m^2 r^2}{R_0^4 (1 + l_s/R_0)^2} = 0 \quad (3)$$

根据流体温度的轴对称性, 流体温度在微通道轴线处满足:

$$\left. \frac{dt}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (4)$$

假定流固交界面处( $r=R_0$ )的壁面温度为  $t_w$ , 则其温度边界条件为:

$$t|_{r=R_0} = t_w + l_t \left. \frac{dt}{dr} \right|_{r=R_0} \quad (5)$$

式中  $l_t$ 为温度跳跃系数。

式(1)~式(5)是描述圆形微通道对流换热的控制方程, 与经典方程比较, 有以下不同: (1) 式(1)增加了  $t/z$ , 描述了轴向热传导对换热效果的影响; (2) 式(1)还增加了  $(dw/dr)^2$ , 描述了粘度耗散对换热的影响; (3) 式(2)中流体速度增加了  $l_s/R_0$  项, 反映了速度滑移现象; (4) 流固交界处流体温度  $t_w$  和固体温度  $t$  不同(式5), 描述了温度跳跃现象。

### 2 能量方程的完备解

当  $z \rightarrow \infty$ , 流固交界处的流体温度与微通道壁面的温度趋于一致, 根据线性微分方程解的结构, 式(3)的解为齐次解与任一特解之和, 可以得到满足式(3)的一个渐进特解为:

$$t_{\infty} = t_w + \frac{w_m^2}{(1 + l_s/R_0)^2} \left( 4l_t/R_0 + r^4/R_0^4 \right) \quad (6)$$

假设齐次解为  $t_1(r, z)$ , 温度场为:

$$t = t_{\infty} + t_1(r, z) \quad (7)$$

对应式(3), 可得齐次微分方程为:

$$\rho c_p w \frac{dt_1}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \lambda \frac{dt_1}{dr} \right) - \mu \frac{d^2 t_1}{dr^2} = 0 \quad (8)$$

采用分离变量形方程法, 令:

$$t_1 = R(r_1) e^{\lambda z} \quad (9)$$

式中  $r_1 = r/R_0$ ;  $z_1 = z/PeR_0$ 。代入式(8)可得:

$$r_1 \frac{d^2 R}{dr_1^2} + \frac{dR}{dr_1^2} - \lambda R = 0 \quad (10)$$

$$\lambda = \frac{16 \mu l_s^2 / R_0^4}{1 + l_s/R_0} \frac{r_1^2}{1 + l_s/R_0} \quad (11)$$

根据特殊函数概论<sup>[11]</sup>, 可得式(10)的解为:

$$t_1 = \sum_j C_j R_j(r_1) e^{\lambda_j z_1} \quad (12)$$

式中

$$R_j(r_1) = e^{\lambda_j r_1^2 / 2} F_1 \left( \lambda_j, 1, \lambda_j r_1^2 \right) \quad (13)$$

$$\lambda_j = \sqrt{\frac{\lambda_j}{1 + l_s/R_0}} \quad (14)$$

$$k_j = \frac{(\lambda_j/Pe)^2 \frac{1 + l_s/R_0}{1 + l_s/R_0}}{4 \lambda_j} \quad (15)$$

式中  $Pe$ 为贝克莱数;  $F_1$ 为Gamma函数;  $C_j$ 为待定系数;  $\lambda_j$ 为本征值。

### 3 定解条件

#### 3.1 入口温度与温度跳跃系数

根据温度跳跃假设, 在圆形微通道入口处, 管壁处温度有一个跳变,  $t_c$ 从变到  $t_w$ 。入口处的流体温度分布为:

$$t(r, 0) = t_w + l_t \left. \frac{dt}{dr} \right|_{r=0} \quad (16)$$

式中

$$\left. \frac{dt}{dr} \right|_{r=0} = \sum_n \frac{1}{n} \sin n \cos n \frac{r}{R_0} \quad (17)$$

根据入口处流涕温度分布(式(16))和温度跳跃边界条件(式(5)), 可得温度跳跃系数为:

$$\frac{l_t}{R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n \cos n}{\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 n} \quad (17)$$

取  $l_t/R_0=0.8$  时, 入口流体温度的曲线示意图如图1所示。

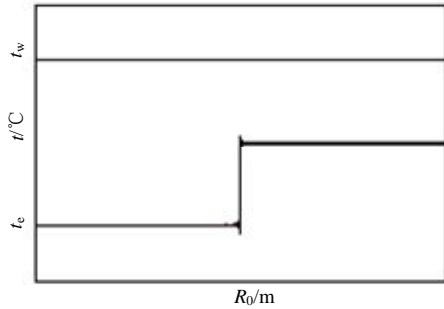


图1 入口处流体温度分布

### 3.2 温度跳跃条件与本征值

将温度场表达式(7)和式(12)代入温度跳变边界条件(5), 可得:

$$R_j \left. \frac{\partial T_j}{\partial r} \right|_{r=R_0} = \dots \quad (18)$$

式(18)是非线性方程求根的问题, 通过商品化软件Matlab进行数值仿真, 可得到本征值  $\beta_j$ 。求解时, 取温度跳跃系数中级数的级数项  $n=100$ , 求解得到的本征值  $\beta_j$  如表1所示(取前11个本征值)。

表1 前11个  $\beta_j$

n	$\beta_j$		
	$l_t=0$	$l_t=0.1037$	$l_t=0.0915$
1	7.313 6	6.386 1	6.494 5
2	44.609 0	40.708 0	41.1430 0
3	113.920 0	105.870 0	106.710 0
4	215.240 0	202.220 0	203.520 0
5	348.560 0	329.960 0	331.720 0
6	513.830 0	489.220 0	491.460 0
7	711.220 0	680.090 0	682.800 0
8	940.550 0	902.650 0	905.810 0
9	1 201.900 0	1 156.900 0	1 160.500 0
10	1 495.200 0	1 443.000 0	1 447.000 0
11	1 820.500 0	1 760.900 0	1 765.300 0

### 3.3 入口流体温度边界条件与本征函数的正交性

式(19)是一个斯特姆-刘维本征<sup>[12]</sup>问题, 故函数  $R_j(r_1)$  存在加权正交关系, 即:

$$\int_0^1 G(r_1) R_i(r_1) R_j(r_1) dr_1 = N_j^2 \delta_{ij} \quad (19)$$

式中

$$G(r_1) = \dots \quad (20)$$

当  $i=j$  时,  $\delta_{ij}=1$ ; 当  $i \neq j$  时,  $\delta_{ij}=0$ 。  $N_j^2$  可由式(19)左端进行数值积分计算得到。

据式(7)和式(16)可以得到:

$$\frac{1}{Br} \sum_{j=1}^n C_j R_j(r_1) = \dots \quad (21)$$

式中 Br 为布林克曼准数, 即:

$$Br = \frac{f w_m^2}{k_e \lambda t_w}$$

在式(21)两侧同乘  $R_j$ , 则由式(21)可以得到:

$$C_j = \dots \quad (22)$$

式中

$$\dots = \dots \quad (23)$$

$$\dots = \dots \quad (24)$$

通过数值积分得到的待定系数, 如表2所示。

表2 前11个  $C_1$

n	$C_1$		
	$l_t=0$	$l_t=0.1037$	$l_t=0.0915$
1	44.293 0	13 711.0	13 683.0
2	24.183 0	19 251.0	19 288.0
3	17.663 0	13 001.0	13 148.0
4	14.275 0	11 270.0	11 462.0
5	12.150 0	8 842.8	9 061.8
6	10.667 0	7 847.1	8 076.6
7	9.575 2	6 572.9	6 807.1
8	8.722 3	5 957.6	6 189.5
9	8.037 9	5 172.5	5 400.9
10	7.471 4	4 761.6	4 982.6
11	6.995 7	4 234.9	4 443.4

## 4 换热特性

根据流体体积平均温度的定义, 流体的平均温度为:

$$t_m(z_1) = \dots \quad (25)$$

式中

$$\dots = \dots$$

$$\dots = \dots$$

则可以得到 $r=R_0$ 处流体的热流密度为:

$$q_w = \lambda \frac{4}{R_0} \frac{1}{(1 + 4l_s/R_0)^2} \frac{W_m^2 e^{\lambda_j z_1}}{R_0} \left. \frac{dR_j}{dr_1} \right|_{r_1=R_0} \quad (26)$$

因此圆形微通道的局部换热系数为:

$$h(z_1) = \frac{q_w}{t_w - t_m} \quad (27)$$

式中

$$\left. \frac{dR_j}{dr_1} \right|_{r_1=R_0} = \frac{4}{(1 + 4l_s/R_0)^2} \frac{C_j}{R_0} e^{\lambda_j z_1} \quad (28)$$

$$Nu(z_1) = \frac{2R_0}{\delta} h(z_1) \quad (28)$$

$$h_m = \frac{1}{L} \int_0^L h dz_1 \quad (29)$$

### 5 仿真结果分析

当温度跳跃系数式(17)中项数取有限项时,温度跳跃系数是一个定值。本文分别选取 $10^7$ 、 $10^6$ 、 $10^8$ 和 $10^{100}$ 。在温度跳跃系数 $l_t/R_0=0.1037$ 、 $0.1197$ 、 $0.0915$ 、 $0$ 时,得到的仿真结果如图2~图5所示。图2为 $l_s=0$ 、 $l_t=0$ 、 $Pe=2300 \Rightarrow 5.42$ 时的仿真结果,当Br为负时,导致式(27)中分母在某管截面处为零。努塞尔数奇异,本质上只反映耗散热的传输,没有对流换热的物理意义;当Br为正值时,努塞尔数随界面位置连续变化,其渐进值为 $9.6000$ 。

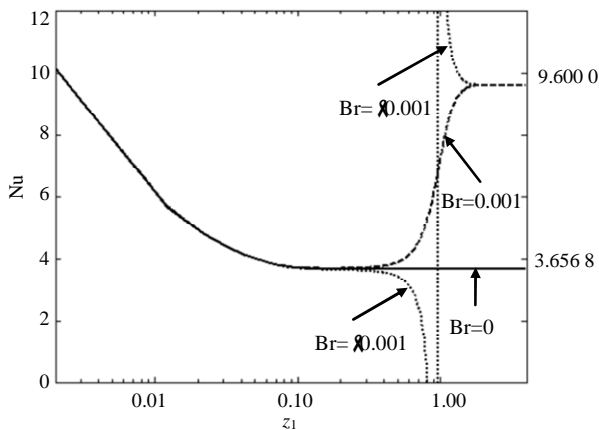


图2 Br数对努塞尔数的影响

图3为 $l_s=0.01R_0$ 、 $Pe=2300 \Rightarrow 5.42$ 时,平均对流换热系数受尺寸效应的影响曲线。由图3可知,平均对流换热系数随着轴向距离 $z_1$ 的增大而迅速降低,这是 $z_1$ 越小、Pe数越大,在Pr数不变的情况下Re数越大的原因所致。平均换热系数随微通道尺寸的减

小而增大,微通道的换热能力强。这是因为尺寸的减少对换热效果的影响远远大于速度滑移和温度跳跃的影响,表明在相同面积上做多个微通道,其换热效果明显高于宏观大通道,对工程设计实践有重要的指导意义。

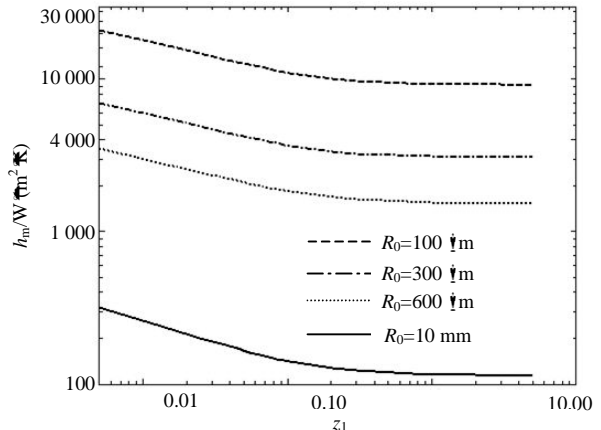


图3 平均对流换热系数受尺寸效应的影响曲线

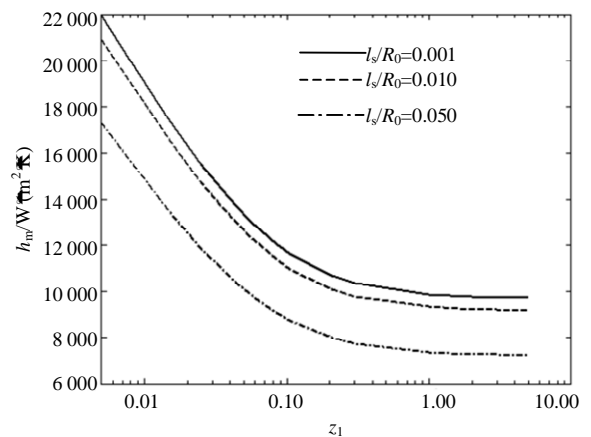


图4 平均换热系数受速度滑移系数的影响曲线

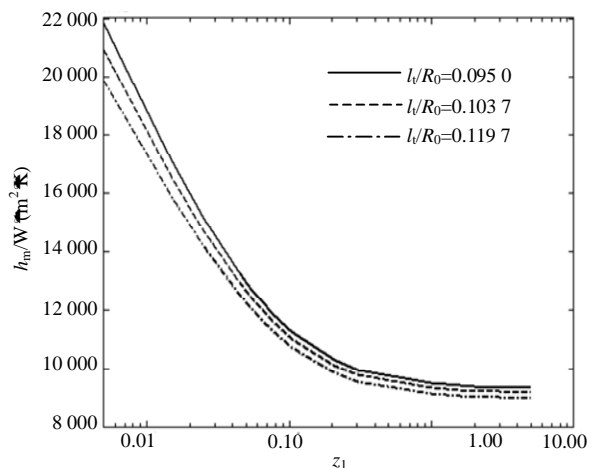


图5 平均换热系数受温度跳跃系数的影响曲线

当 $l_t=0.1037R_0$ 、 $R_0=100 \mu m$ 时,平均换热系数受速度滑移系数的影响曲线如图4所示。由图4可知,在半径相同的微通道、温度跳跃系数一定的情况下,

速度滑移越小, 平均对流换热系数越大。当  $l_s=0.01R_0$ 、 $R_0=100\ \mu\text{m}$  时, 平均换热系数受温度跳跃系数的影响曲线如图5所示。由图5可知, 在相同的速度滑移系数的情况下, 温度跳跃系数越小, 平均换热系数越大。

## 6 结 论

在速度滑移和温度跳跃、粘度耗散情况下, 针对圆形微通道对流换热的能量方程, 本文运用分离变量法求解得到了温度场的完备解; 讨论了轴向热传导、粘度耗散、滑流系数和温度跳跃系数对圆形微通道换热特性的影响; 分析了Br数、Pe数、 $l_s$ 等参数对流体换热特性的影响。得到了以下结论: (1) 微通道的平均对流换热系数比经典管道的换热系数大, 表明微通道的换热能力强; (2) 在温度跳跃系数和微通道特征尺寸相同的情况下, 速度滑移越小, 平均换热系数越大, 微通道换热能力越强; (3) 在速度滑移系数和微通道特征尺寸相同的情况下, 在温度跳跃系数越小, 平均换热系数越大, 微通道换热能力越强。

## 参 考 文 献

- [1] TUCKERMAN D B, PEASE R F W. High-performance heat sinking for VLSI[J]. IEEE Electron Device Letters, 1981, 2(5): 126-129.
- [2] WU P, LITTLE W A. Measurement of friction factors for the flow of gases in very fine channels used for microminiature Joule-Thomson refrigerators[J]. Cryogenics, 1983, 24(5): 273-277.
- [3] QU W, MUDAWAR I. Experimental and numerical study of pressure drop and heat transfer in a single-phase microchannel heat sink[J]. Int J Heat Mass Transfer, 2002, 45(12): 2549-2565.
- [4] QU W, MALA G M, LI D. Heat transfer for water flow in trapezoidal silicon microchannels[J]. Int J Heat Mass Transfer, 2000, 43(21): 3925-3936.
- [5] MARANZANA G, PERRY I, MAILLET D. Mini- and micro-channels influences of axial conduction in the walls[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2004, 47(17-18): 3993-4004.
- [6] MYONG R S, LOCKERBY D A, REESE J M. The effect of gaseous slip on microscale heat transfer: An extended Graetz problem[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2006, 49(15-16): 2502-2512.
- [7] SPARROW E M, LIN S H. Laminar heat transfer in tubes under slip-flow conditions[J]. Journal of Heat Transfer, 1962, 84(4): 363-369.
- [8] BARLETTA A, MAGYARI E. Thermal entrance heat transfer of an adiabatically prepared fluid with viscous dissipation in a tube with isothermal wall[J]. International Journal of Heat Transfer, 2006, 128(11): 1185-1193.
- [9] JEONG H, JEONG J. Extended Graetz problem including streamwise conduction and viscous dissipation in microchannel[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2006, 49(13-14): 2151-2157.
- [10] 杨世铭, 陶文铨. 传热学[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 1999: 26-137.  
YANG Shi-ming, TAO Wen-wuan. Heat transfer[M]. 3rd ed. version. Beijing: Higher Education, Higher Learning Press, 1999: 26-137.
- [11] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 第1版. 北京: 北京大学出版社, 2000: 289-325.  
WANG Zhu-xi, GUO Dun-ren. Introduction to special function[M]. 1st ed. Beijing: Peking University Press, 2000: 289-325.
- [12] 姚端正, 梁家宝. 数学物理方法[M]. 第2版. 武汉: 武汉大学出版社, 1997: 374-378.  
YAO Duan-zheng, LIANG Jia-bao. Mathematical physic method[M]. 2nd ed. Wuhan: Wuhan University Press, 1997: 374-378.

编辑 黄 莘