

数字图像自相关函数的优化逼近模型

成孝刚¹, 陈启美¹, 程浩², 刘国庆², 安明伟¹

(1. 南京大学 电子科学与工程学院, 江苏 南京 210093; 2. 南京工业大学 理学院, 江苏 南京 210009)

摘 要: 将复杂的非平稳随机信号划为分段平稳随机信号进行处理, 以信号自相关函数反映信号特征。而自相关函数是数字图像频谱分析的基础, 可作为图像清晰度评价函数, 并有助于寻找有效的信号正交基。为精确有效地表示分段平稳随机信号, 在分析 ARMA 模型、分段平稳随机过程和 Markov 过程的基础上, 建立多参数的自相关函数估计模型, 其提高了逼近效果, 可适应变化复杂的非平稳信号。计算机仿真表明, 该模型逼近误差显著下降。

关键词: 随机过程; 分段平稳; 非线性逼近; 自相关

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2011)10-0185-06

Optimal approximation model of autocorrelation function of digital image

CHENG Xiao-gang¹, CHEN Qi-mei¹, CHENG Hao², LIU Guo-qing², AN Ming-wei¹

(1. School of Electronic Science and Engineering of Nanjing University, Nanjing 210093, China;

2. College of Sciences, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, China)

Abstract: Non-stationary stochastic signal was divided into piecewise stationary stochastic signal, and reflecting the signal's characteristics by autocorrelation function of the piecewise stationary stochastic signal. Generally, the autocorrelation function was the base of selecting signal base for signal representation. For expressing non-stationary stochastic signal in a precise and effective way, based on the analysis of the natural characteristics of ARMA model and Markov process, a kind of multi-parameter estimation model of autocorrelation function for piecewise stationary stochastic process was proposed. The computational complexity was reduced, and the approximation effect was improved. Furthermore, the multi-parameter estimation model could also be adapted to the complex non-stationary stochastic signal, The computer simulation demonstrates that the approximation error was decreased significantly.

Key words: stochastic process; piecewise stationary process; nonlinear approximation; auto correlation

1 引言

数字图像自相关函数的有效逼近, 是非平稳随机信号参数估计中亟待解决的问题, 它在压缩传感、图像处理、微弱信号检测等领域有着广泛的应用^[1-3]。自相关函数是一种特殊的非平稳随机过程, 可以作为准平稳或局部平稳随机信号来处理。这类

信号的统计特性存在未知性的阶段突变(突变点称为分界点), 在分界点之间保持平稳性, 通常把这类非平稳随机信号称为分段平稳随机信号。目前, 分段平稳随机信号需解决的问题有: ①分段的段数; ②各段之间的分界点; ③选择各段最佳的平稳随机信号参数模型^[4]。

针对上述问题, Djuric 采用贝叶斯方法^[5], 通

收稿日期: 2010-11-24; 修回日期: 2011-04-20

基金项目: 国家科技重大专项基金资助项目 (2012ZX03005012, 2009ZX03003-007, 2011ZX03005-004-03)

Foundation Item: The National Science & Technology Monumental Projects (2012ZX03005012, 2009ZX03003-007, 2011ZX03005-004-03)

过推导多维条件分布概率来估计最优划分参数值，导出了一个关于分段数、各段 AR 模型阶数和各段之间分界点的优化方程，但该优化方程解法复杂，计算量大；王文华、陈颖等在此基础上，对优化方程做进一步的改进，结合 AR 模型特性，给出了一些新的递推算法，减少了计算量^[4,6]。UPMC 的 Albert Cohen 采用随机过程框架对分段平稳过程做了研究，导出一个全新的关于延迟和信号量的自相关函数模型^[7,8]。该模型可以适用于许多领域，但在处理复杂的分段平稳信号时，适应性较弱，误差性较高。

本文依据正态马尔可夫链和泊松过程，结合高阶自回归模型($AR(p)(p \geq 2)$)，针对上述非平稳随机信号逼近问题做了进一步研究，给出一个新颖的自相关函数逼近模型。该模型的参数根据非平稳随机信号的分段点和段内平稳性不同而变化，具备良好的自适应性，从而大大提高了逼近效果。计算机仿真表明，该模型能够有效逼近数字图像自相关函数曲线，尤其在曲线变化复杂情况下，本文模型能够有效拟合真值轨迹，大幅度降低逼近误差。

本文的结构如下：第 2 节阐述常规的分段平稳过程逼近模型，由于数字图像的一维功率谱呈现指数特性，因此，所述模型可以用来描述标准化的功率谱曲线。第 3 节给出了所述数字图像自相关函数优化逼近模型，并选择合适的最优化算法；第 4 节采用蒙特卡罗仿真，结合 Lena 图例，阐述了优化逼近模型的性能；第 5 节给出结论。

2 分段平稳过程逼近模型

对于一幅黑白相间的图片，常用的自相关函数逼近公式为^[7,8]

$$E(h(x, y)h(x', y')) = R_0 e^{-\theta(|x-x'|+|y-y'|)} \quad (1)$$

其中， $h(x, y)$ 表示光强函数， (x, y) 与 (x', y') 对应图片中不同的像素点， R_0 和 θ 为常数，由图像尺寸和归一化的光强函数决定。假设 $h(x, y)$ 在零点附近时，在白色区域，它有最大值 h_{\max} ，在黑色区域，它有最小值 $-h_{\max}$ 。对于一维平稳随机过程，其自相关函数为

$$R(t, \xi) = e^{-\alpha|t-\xi|} \quad (2)$$

由式(2)可以看出，和距离函数相关联的指数衰减，具备马尔可夫过程的典型特征。为了说明分段平稳的特征，对随机过程 $s(t)$ 做如下描述：

设有非连续的有限集 $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i, \dots, \psi_K\}$

$\subset [0, 1], \psi_i \leq \psi_{i+1}$ ，它在 $[0, 1]$ 内由参数为 $\alpha(\alpha > 0)$ 的泊松过程实现来获得。则 Ψ 内的间断点是随机数，且有^[9,10]：

$$P(|\Psi| = K) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^K}{K!} \quad (3)$$

对于 $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i, \dots, \psi_K\}$ ，令 $\psi_0 = 1, \psi_{K+1} = 1$ ，定义 $s(t) \in [\psi_i, \psi_{i+1}], i = 0, \dots, K$ 。

则有

$$s(t) = s_i(t) \quad (4)$$

函数 s_i 是一个平稳过程的独立实现，这个平稳过程的自相关函数为： $R(t, \xi) = r(|t - \xi|)$ ，均值为 l 。在区间 $[-1, 1]$ 内，当 $\alpha > 3/2$ 时， $r(t)$ 为 C^α ，则 $s(t)$ 是平稳的，其自相关函数为^[8,9]

$$R_s(t, \xi) = P(t, \xi)R(t, \xi) + (1 - P(t, \xi))l^2 \quad (5)$$

式(5)中， $P(t, \xi) = e^{-\alpha|t-\xi|}$ 是在 t 和 ξ 之间的概率，则有

$$R_s(t, \xi) = l^2 + e^{-\alpha|t-\xi|}(r(t-\xi) - l^2) = r_s(|t-\xi|) \quad (6)$$

可见， $s_i(t) = s_i$ 是连续中心过程的独立实现，其自相关函数为

$$R_s(t, \xi) = r_s(0)e^{-\alpha|t-\xi|} \quad (7)$$

当取 $t = 0, r_s(0) = E_0$ 时，式(7)演化为^[7,8]

$$R(\xi) = E_0 e^{-\alpha|\xi|} \quad (8)$$

因为数字图像的一维功率谱呈现指数特性，所以式(8)可以用来描述标准化的功率谱曲线^[2,11]。

3 优化逼近模型的导出

在实际应用中，数字图像的自相关函数曲线往往存在分界点，且分界点在何处出现是未知的^[12]。用式(8)来逼近，适应性偏弱，误差较大。本文根据高阶自回归模型，给出一个新颖的自相关函数逼近模型，能够有效逼近目标曲线，大幅度降低误差。

设有平稳序列 $Y_n, n \in \mathbb{Z}$ ，若满足^[12,13]

$$\sum_{k=0}^p \lambda_k Y_{n-k} = \eta_n \quad (9)$$

则称其为 $AR(p)$ 模型，其中 $|\lambda| < 1$ ， $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 为噪声， p 代表自回归模型的阶数。

为了更好的探讨，引入向后推移算子 ∇ 和零算子 0 ，定义如下：

∇ 算子满足： $\nabla Y_n = Y_{n-1}, \nabla^k Y_n = Y_{n-k}$ 。令 ∇, ∇^{-1} 互

逆, 即 $\nabla \nabla^{-1} = I$, 则有 $\nabla^{-k} Y_n = Y_{n+k}$, 且记 $\lambda(\nabla)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda(\nabla)}$ 。

零算子满足: $\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla^k = 0$ 。可见, 当零算子和其它项结合时, 其运算规则与通常多项式一样, 且有^[12]:

$$(I - \nabla)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{I - \nabla} = \sum_{k=0}^{\infty} \nabla^k \quad (10)$$

$$(I - \lambda \nabla)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{I - \lambda \nabla} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \nabla^k, |\lambda| < 1 \quad (11)$$

当 $p = 2$ 时, 式(9)演变为

$$Y_n + \lambda_1 Y_{n-1} + \lambda_2 Y_{n-2} = \eta_n \quad (12)$$

令

$$\lambda(z) = 1 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 \quad (13)$$

是式(12)的系数多项式。且有:

$$f(z) = z^2 + \lambda_1 z + \lambda_2 = (z - u_1)(z - u_2), |u_i| < 1, (u_1 \neq u_2) \quad (14)$$

根据微分方程求解, 式(12)的解是齐次一般解加上其特解。由式(14)可以知道, 一般解为 $C_1 u_1^n + C_2 u_2^n$ 。式(13)对应的 ∇ 算子多项式为

$$\lambda(\nabla) = I + \lambda_1 \nabla + \lambda_2 \nabla^2 = (I - u_1 \nabla)(I - u_2 \nabla) \quad (15)$$

则有

$$\lambda^{-1}(\nabla) = \frac{1}{\lambda(\nabla)} = \frac{1}{u_1 - u_2} \left(\frac{u_1}{I - u_1 \nabla} - \frac{u_2}{I - u_2 \nabla} \right) \quad (16)$$

因为式(12)可以表示为

$$\lambda(\nabla) Y_n = \eta_n \quad (17)$$

所以, 易得特解

$$Y_n = \frac{1}{\lambda(\nabla)} \eta_n = \frac{1}{u_1 - u_2} \sum_{k=0}^{\infty} (u_1^{k+1} - u_2^{k+1}) \eta_{n-k} \quad (18)$$

由式(18)可知, Y_n 可以表示为 n 时刻(含)之前噪声 $\eta_n, \eta_{n-1}, \dots$ 的线性组合。

已知 $E(\eta_n Y_n) = \sigma^2$, 则令式(12)乘以 Y_n , 取其数学期望得

$$R(0) + \lambda_1 R(1) + \lambda_2 R(2) = \frac{\sigma^2}{\sigma_Y^2} \quad (19)$$

σ_Y 表示 Y_n 的方差。令式(12)乘以 $Y_{n-\xi} (\xi \geq 1)$, 取数学期望得

$$R(\xi) + \lambda_1 R(\xi - 1) + \lambda_2 R(\xi - 2) = 0 \quad (20)$$

显然, 式(20)的一般解为

$$R(\xi) = \rho_1 u_1^\xi + \rho_2 u_2^\xi \quad (21)$$

式(21)反应了平稳序列 $\{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 的概率特性, 称之为自相关函数。令 $\rho_1 = E_0, \rho_2 = -E_0, u_1 = e^{-\alpha}, u_2 = e^{-\beta}$, 则有:

$$R(\xi) = E_0 e^{-\alpha|\xi|} - E_0 e^{-\beta|\xi|} \quad (22)$$

为了克服漂移, 引入静态量 Δ , 则有:

$$R(\xi) = \Delta + E_0 e^{-\alpha|\xi|} - E_0 e^{-\beta|\xi|} \quad (23)$$

取 $\Delta = E_0$, 则

$$R(\xi) = E_0 + E_0 (e^{-\alpha|\xi|} - e^{-\beta|\xi|}) \quad (24)$$

在实际应用中, 为满足自相关函数的单调特性, α, β, ξ 满足 $\alpha > \beta, \xi \in [0, \xi_0]$ 。其中, ξ_0 的确定过程如下: 对式(24)中 $e^{-\alpha|\xi|} - e^{-\beta|\xi|}$ 做泰勒展开得:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha|\xi|} - e^{-\beta|\xi|} &\approx \left(1 - \alpha|\xi| + \frac{1}{2} \alpha^2 \xi^2 \right) - \left(1 - \beta|\xi| + \frac{1}{2} \beta^2 \xi^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha^2 - \beta^2) \xi^2 + (\beta - \alpha) |\xi| \end{aligned} \quad (25)$$

则

$$\begin{aligned} \xi_0 &= -\frac{\beta - \alpha}{2 \left(\frac{1}{2} \times (\alpha^2 - \beta^2) \right)} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha^2 - \beta^2} \\ &= \frac{\alpha - \beta}{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)} \end{aligned} \quad (26)$$

因为 $\alpha > \beta$, 所以式(26)分母不为 0。

则

$$\xi_0 = \frac{1}{\alpha + \beta} \quad (27)$$

即

$$\xi \in \left[0, \frac{1}{\alpha + \beta} \right] \quad (28)$$

式(24)中, E_0, α, β 为待定系数, e 为自然常数。可见, 找到合适的 E_0, α, β , 即可很好地实现数字图像自相关函数的逼近。

关于本文所述自相关函数逼近模型的优化算法选择, 以 Newton 算法最为适宜。因为 Newton 算法既能减少计算量, 又能快速收敛。当初始点 X_0 充分靠近解 X^* 且 $J(X^*)$ 非奇异时, 牛顿法收敛很快^[13,14]。令

$$Q = \sum_{\xi=0}^k [E_0 + E_0(e^{-\alpha\xi} - e^{-\beta\xi}) - T(\xi)]^2 \quad (29)$$

其中, k 为自相关函数的延迟, 本文中 k 取 18。 $T(\xi)$ 为真值, 计算机仿真中, 由标准数字图像 Lena (512×512) 采样获取。所以, 目标函数为

$$I = \min_{E_0, \alpha, \beta} Q \quad (30)$$

通过最优化算法, 寻找最佳参数 E_0, α, β , 当 I 达到最小时, 说明式(24)可以作为分段平稳过程的自相关最佳逼近。根据最优化算法有 $F(x) = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}^T$ 。

其中,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{dQ}{dE_0} \\ &= \sum_{\xi=0}^k \{2 \times [E_0 + E_0(e^{-\alpha\xi} - e^{-\beta\xi}) - T(\xi)] \times [1 + (e^{-\alpha\xi} - e^{-\beta\xi})]\} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{dQ}{d\alpha} \\ &= \sum_{\xi=0}^k \{2 \times [E_0 + E_0(e^{-\alpha\xi} - e^{-\beta\xi}) - T(\xi)] \times (-E_0\xi e^{-\alpha\xi})\} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{dQ}{d\beta} \\ &= \sum_{\xi=0}^k \{2 \times [E_0 + E_0(e^{-\alpha\xi} - e^{-\beta\xi}) - T(\xi)] \times (E_0\xi e^{-\beta\xi})\} \end{aligned} \quad (33)$$

由式(31)~式(33)可知, $F(x)$ 对应的 Jacobi 矩阵为

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{df_1(x)}{dE_0} & \frac{df_1(x)}{d\alpha} & \frac{df_1(x)}{d\beta} \\ \frac{df_2(x)}{dE_0} & \frac{df_2(x)}{d\alpha} & \frac{df_2(x)}{d\beta} \\ \frac{df_3(x)}{dE_0} & \frac{df_3(x)}{d\alpha} & \frac{df_3(x)}{d\beta} \end{bmatrix} \quad (34)$$

利用 $F(x)$ 在 $x_k = [E_0, \alpha, \beta]_k^T$ 处的泰勒展开, 有^[12]:

$$F(x) = F(x_k) + J(x_k)(x - x_k) + o(\|x - x_k\|^2) \quad (35)$$

当 x 在 x_k 的某个领域内, 可以忽略泰勒余项, 得

$$F(x) = F(x_k) + J(x_k)(x - x_k) = 0 \quad (36)$$

则

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} E_0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}_k - J^{-1}(E_0, \alpha, \beta)_k \cdot F(E_0, \alpha, \beta)_k \quad (37)$$

图 1 给出本文所述数字图像自相关函数逼近的最优化算法详细步骤。

```

Initialize  $x = [E_0, \alpha, \beta]^T, \varepsilon$ 
Repeat
    1. Initialize  $J(x_k), F(x_k)$ 
    2. Compute the step size
        $J(x_k)s_k = -F(x_k)$ 
    3. update  $x_{k+1} = x_k + s_k$ 
Until  $|\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k}| \leq \varepsilon$  (Stop Criterion)
    
```

图 1 优化逼近算法的步骤

4 最优算法的性能

为了比较最优算法的性能, 本文对 Albert Cohen 逼近模型与本文所提数字图像自相关函数多参数逼近模型进行了计算机仿真。为了确保仿真比较的一致性和可靠性, 本文采用与文献[8]相同的标准图例 Lena(512×512), 如图 2 所示。



图 2 Lena

计算机读取 Lena 的真实数据若干次, 并分别做自相关处理, 得到很多自相关向量的真值 $T(\xi) ((k+1) \times 1)$ 。仿真试验中, 自相关函数的延迟 k 取 18, 则采样得到真值 $T(\xi)$ 为 19×1 的向量。

分段平稳随机过程自相关函数的逼近误差, 以式(29)取对数来评价。即

$$Error = 10 \lg Q = 10 \lg \left\{ \sum_{\xi=0}^k [E_0 + E_0(e^{-\alpha\xi} - e^{-\beta\xi}) - T(\xi)]^2 \right\} \quad (38)$$

单位为分贝(dB)。显然, 逼近真值的误差应该越小越好。

图 3 为若干次自相关曲线真值 $T(\xi)$ 逼近误差比较。逼近程序从 Lena 图像获取 $M \times M$ 的矩阵(本

文中 M 取 250)，即得到 250×250 的矩阵点。从中抽取某一列作自相关处理，得到一个 $T(\xi)$ 真值序列，分别采用 Albert Cohen 模型和本文所述优化逼近模型做逼近仿真，以计算其误差。计算机仿真中逐列取值，以验证本文模型效果；误差比较中，由 250×250 矩阵首列开始，5 列为间隔取值。为确保逼近误差的可靠性，对每一列的自相关真值曲线做多次逼近，加权取平均值，得到逼近误差。

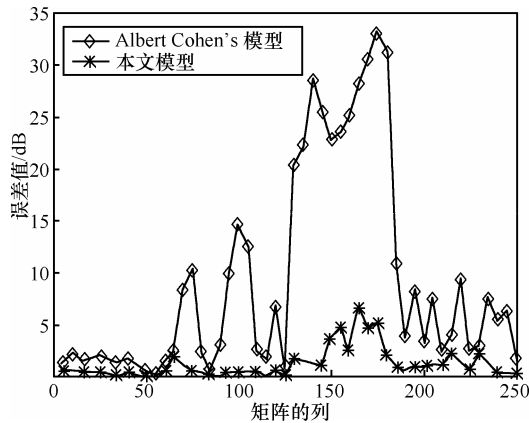
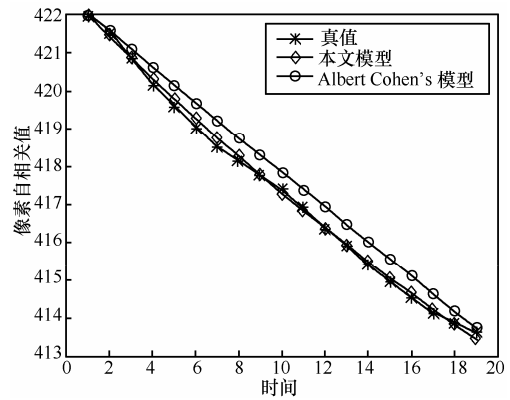
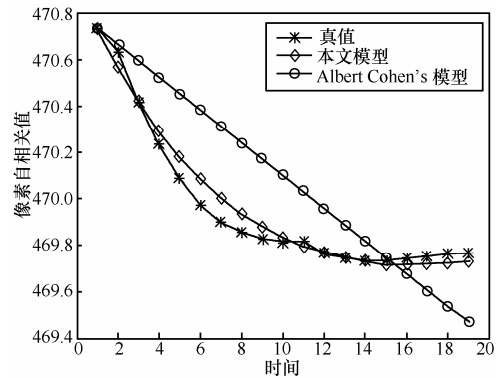


图 3 Albert Cohen 模型与本文模型逼近误差比较

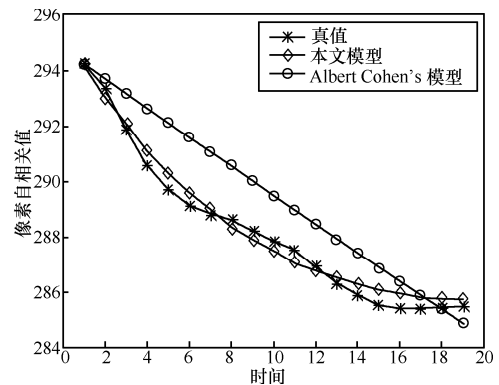
由图 3 可知，本文所述数字图像自相关函数优化逼近模型(式(24))的逼近误差，明显小于 Albert Cohen 模型(式(8))，平均降低 7.985 2dB，最大处相差 29.167 1dB。式(8)模型的误差曲线，最初变化相对平缓，65 列之后变化较大，呈上升趋势，总体误差区间为[0.125 3, 33.196 2]。而本文所述优化逼近模型误差变化平缓，误差区间为[0.002 5, 6.614 6]。对于上述 250×250 的矩阵，在 65 列之后，其自相关函数曲线波动较大，Albert Cohen 模型的逼近误差非常大，说明其对非平稳信号的尚欠实用性，而本文模型能够预估分段平稳信号的断点，迭代出适合该曲线的模型系数，从而在数字图像自相关函数曲线出现波动时，能够有效地逼近它。0~65 列的自相关函数曲线相对平滑，Albert Cohen 模型逼近误差相对较小，平均 2.501dB，而本文模型在该段平均逼近误差为 0.494 5dB。在第 55 列，该自相关函数曲线近乎斜直线，本文模型逼近误差为 0.002 5dB，Albert Cohen 模型逼近误差为 0.125 3。由此说明，Albert Cohen 模型仅适用于平稳的曲线逼近，尤其是近乎直线的逼近，对波动较大的分段平稳信号适应性偏弱。而本文所述优化逼近模型，对于上述情况均能很好地逼近，表现出良好的性能。



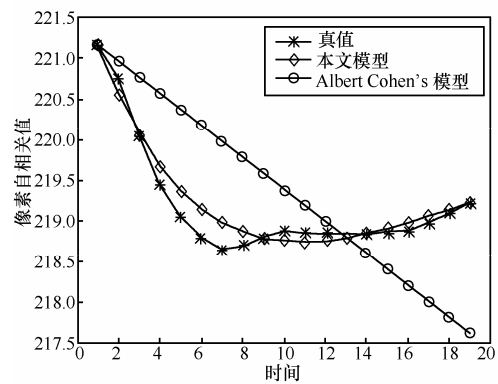
(a) 250 列逼近效果(平滑)



(b) 300 列逼近效果(曲折)



(c) 160 列逼近效果(曲折)



(d) 100 列逼近效果(曲折)

图 4 Albert Cohen 模型与本文优化逼近模型逼近效果比较

图 4 为数字图像自相关函数曲线逼近效果比较。其中,图 4(a)~图 4(d)分别是对标准测试图例 Lena (512×512)第 250 列、300 列、160 列、100 列的逼近比较,即提取 Lena 的相应列信号做自相关处理,分别采用 Albert Cohen 模型与本文所述模型进行逼近。Lena 图例的第 250 列,其自相关函数曲线相对平滑,本文模型逼近误差为 0.271 4dB, Albert Cohen 模型的误差为 1.388 2dB。第 100 列、160 列和 300 列,曲线波动较大, Albert Cohen 模型的逼近误差分别为 14.628 7dB, 25.024 9dB, 27.776 0dB, 而本文模型的逼近误差大大降低,分别为 0.513 1dB, 2.594 0dB 和 0.052 2dB。可见, Albert Cohen 模型对于曲率较大的非平稳序列难以有效逼近,而本文所述算法模型,在逼近曲折型自相关曲线时,显示出更大的优势。

5 结束语

数字图像自相关函数是频谱分析的基础,有助于选择合适的信号基,同时可以作为模糊图像重构的清晰度评价函数。为了能够更好地逼近非平稳的数字图像自相关函数曲线,本文将其视为分段平稳信号处理,依据 AR 模型马尔可夫过程,引出一个全新的分段平稳随机过程自相关函数的逼近模型。计算机仿真表明,逼近效果良好。对于曲折性、平滑型的分段平稳信号,本文所述模型,具有良好的适应性,逼近效果明显优于目前常用的 Albert Cohen 模型。当数字图像自相关函数曲线弯曲度越大时,本文模型的逼近效果更加明显,误差明显下降。

参考文献:

- [1] HASHEMI M, BEHESHTI S. Adaptive noise variance estimation in bayes shrink[J]. IEEE Signal Processing Letters,2010,17(1): 12-15.
- [2] RIVENSON Y, STERN A. Compressed imaging with a separable sensing operator[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2009, 16(6): 449-452.
- [3] SCHOUKENS J, LATAIRE J, PINTELON R, *et al.* Robustness issues of the best linear approximation of a nonlinear system[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2009, 58(5): 1737-1745.
- [4] 王文华, 王宏禹. 分段平稳随机过程的参数估计方法[J]. 电子科学学报, 1997, 19(3):311-317.
WANG W H, WANG H Y. A Research on segmentation of nonstationary stochastic process into piecewise stationary stochastic process[J]. Journal of Electronics, 1997,19(3):311-317
- [5] DJURIC P M, *et al.* Segmentation of nonstationary signal[A]. Proc of IEEE ICASSP[C]. San Francisco, 1992.161-164.
- [6] 陈颖, 李在铭. 一种改进的分段平稳随机过程的参数估计方法[J]. 电子与信息学报, 2003, 25(6): 735-740.
CHEN Y, LI Z M. An advanced method to estimate parameters of piecewise stationary stochastic process[J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2003, 25(6):735-740.
- [7] ARANDIGA F, COHEN A, DONAT R, *et al.* Approximation of piecewise smooth functions and images by edge-adapted(ENO-EA) nonlinear multiresolution techniques[J]. Appl Comput Harmon Anal, 2008, 24(2): 225-250.
- [8] COHEN A, MIREBEAU J M. Adaptive and Anisotropic Piecewise Polynomial Approximation[M]. Multiscale, Nonlinear and Adaptive Approximation, 2009.75-135.
- [9] COHEN A, D'ALESSANDRO J P. Nonlinear approximation of random functions[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1997, 57(2): 518-540.
- [10] COHEN A. Theoretical applied and computational aspects of nonlinear approximation[A]. Multiscale Problems and Methods in Numerical Simulations Lecture Notes in Mathematics[C]. 2003.1-29.
- [11] GAOUDA A M, SALAMA M M A. Monitoring nonstationary signals[J]. IEEE Trans on Power Delivery,2009,24(3):1367-1376.
- [12] 张波, 商豪. 应用随机过程[M]. 北京: 中国人民大学出版社,2010: 286-306.
ZHANG B, SHANG H. Applied Stochastic Process[M]. Beijing: China Renmin University Press, 2010.286-306.
- [13] 索尔. 数值分析[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2010.262-278.
SAUER T. Numerical Analysis[M]. Beijing: Posts & Telecom Press, 2010.262-278.
- [14] SCHOUKENS J, PINTELON R. Study of the variance of parametric estimates of the best linear approximation of nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Instrumentation and Measurement,2010, 2:1-9.

作者简介:



成孝刚 (1980-), 男, 江苏射阳人, 南京大学博士, 主要研究方向为独立成分分析、图像信号处理和雷达信号处理。

陈启美 (1949-), 男, 江苏南京人, 南京大学通信技术研究所副所长, 南京大学教授、博士生导师, 主要研究方向为网络通信、信号处理及交通传感网。

程浩 (1976-), 男, 山东莱阳人, 南京工业大学讲师, 主要研究方向为图像处理、雷达信号处理。

刘国庆 (1966-), 男, 安徽无为, 博士, 南京工业大学教授, 主要研究方向为图像处理、数据融合和雷达信号处理。

安明伟 (1974-), 男, 山东新泰人, 南京大学博士生, 主要研究方向为网络通信。