

第4章 导热问题的数值解法

4-1 数值解法的基本思想与步骤

4-2 有限差分法的基本原理

4-3 非稳态导热问题的数值解法

4-3 非稳态导热问题的数值解法

非稳态导热数值解法的特点：

(1) 非稳态导热微分方程多了非稳态项，因此单值性条件中增加了初始条件；

(2) 除了对空间域进行离散外，还需要对时间进行域离散；

(3) 利用热平衡法导出节点温度方程时需要考虑控制容积的热力学能随时间的变化；

(4) 由于时间和空间同时离散，在有些情况下空间步长和时间步长不能任意选择，否则会带来节点温度方程求解的**稳定性问题**。

1. 一维非稳态导热的数值求解

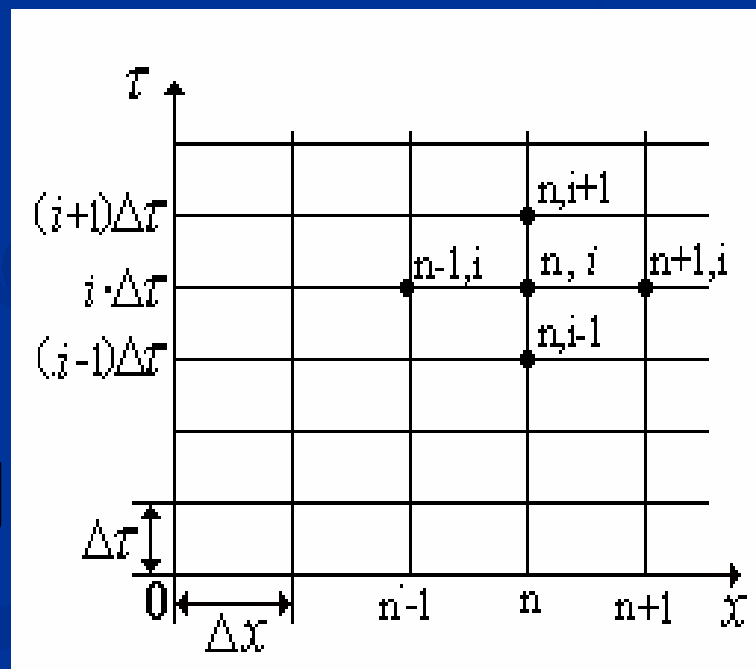
以第三类边界条件下常物性、无内热源大平壁的一维非稳态导热问题为例：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

1) 求解域的离散

空间步长为 Δx ，时间步长为 $\Delta \tau$ ， Δx 、 $\Delta \tau$ 大小的选择需要保证节点温度方程求解的稳定性。

t_n^i 表示空间节点 n 在 $i\Delta \tau$ 时刻（简称 i 时刻）的节点温度。



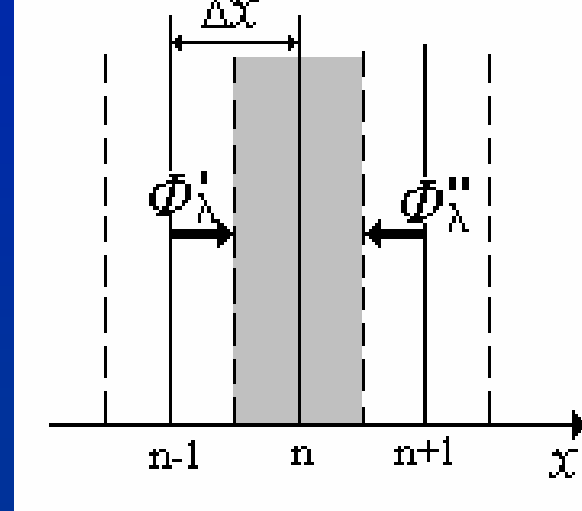
2) 节点温度差分方程的建立

运用热平衡法可以建立非稳态导热物体内部节点和边界节点温度差分方程。

(1) 内部节点温度差分方程

内部节点 n 所代表的控制容积在 i 时刻的热平衡： $\Phi'_\lambda + \Phi''_\lambda = dU$

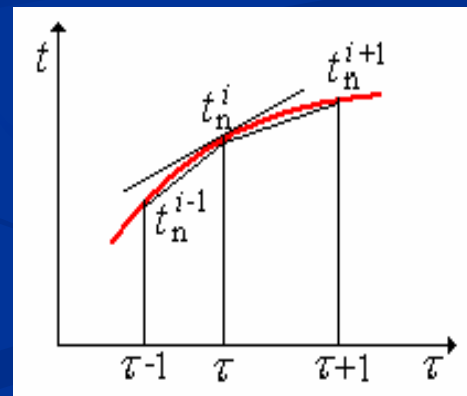
如果节点 n 的温度对时间的变化率采用**向前差分**，热平衡方程式可写成



$$A\lambda \frac{t_{n-1}^i - t_n^i}{\Delta x} + A\lambda \frac{t_{n+1}^i - t_n^i}{\Delta x} = A\Delta x \rho c \frac{t_n^{i+1} - t_n^i}{\Delta \tau}$$

→
$$\frac{t_n^{i+1} - t_n^i}{\Delta \tau} = a \frac{t_{n-1}^i + t_{n+1}^i - 2t_n^i}{\Delta x^2}$$

→
$$t_n^{i+1} - t_n^i = \frac{a \cdot \Delta \tau}{\Delta x^2} (t_{n-1}^i + t_{n+1}^i - 2t_n^i)$$



$$t_n^{i+1} = Fo_{\Delta} (t_{n-1}^i + t_{n+1}^i) + (1 - 2Fo_{\Delta}) t_n^i$$

内部节点温度方程的显式差分格式

$$\text{令 } Fo_{\Delta} = \frac{a \cdot \Delta \tau}{\Delta x^2}$$

网格付里叶数

$$t_n^{i+1} = Fo_{\Delta} (t_{n-1}^i + t_{n+1}^i) + (1 - 2Fo_{\Delta}) t_n^i$$

两点结论：

(a) 任意一个内部节点 n 在 $(i+1)$ 时刻的温度都可以由该节点及其相邻节点在 i 时刻的温度由上式直接求出，不必联立求解方程组，这是显式差分格式的优点。这样就可以从初始温度出发依次求出各时刻的节点温度；

(b) 必须满足显式差分格式的稳定性条件，即

$$1 - 2Fo_{\Delta} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Fo_{\Delta} \leq \frac{1}{2} \quad \text{物理意义?}$$

稳定性条件说明，一旦空间步长 Δx 或时间步长 $\Delta \tau$ 的数值确定之后，另一个步长的数值的就不能任意选择，必须满足稳定性条件。

隐式差分格式：

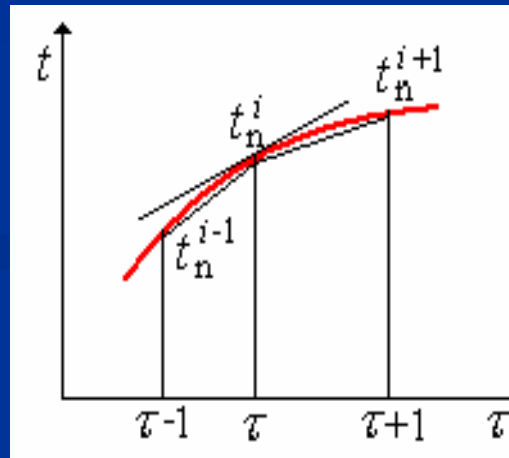
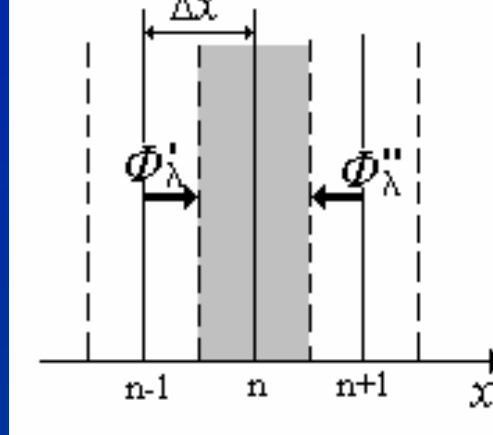
如果节点*i*的温度对时间的变化率采用**向后差分**，内部节点*i*所代表的控制容积的热平衡方程式可写成

$$A\lambda \frac{t_{n-1}^i - t_n^i}{\Delta x} + A\lambda \frac{t_{n+1}^i - t_n^i}{\Delta x} = A\Delta x \rho c \frac{t_n^i - t_n^{i-1}}{\Delta \tau}$$

$$\Rightarrow \frac{t_n^i - t_n^{i-1}}{\Delta \tau} = a \frac{t_{n-1}^i + t_{n+1}^i - 2t_n^i}{\Delta x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{t_n^{i+1} - t_n^i}{\Delta \tau} = a \frac{t_{n-1}^{i+1} + t_{n+1}^{i+1} - 2t_n^{i+1}}{\Delta x^2}$$

$$\Rightarrow t_n^{i+1} - t_n^i = \frac{a \cdot \Delta \tau}{\Delta x^2} (t_{n-1}^{i+1} + t_{n+1}^{i+1} - 2t_n^{i+1})$$



$$\text{令 } Fo_{\Delta} = \frac{a \cdot \Delta \tau}{\Delta x^2}$$

网格付里叶数



$$\left(1 + 2Fo_{\Delta} \right) t_n^{i+1} = Fo_{\Delta} \left(t_{n+1}^{i+1} + t_{n-1}^{i+1} \right) + t_n^i$$

内部节点温度方程的隐式差分格式

隐式格式与显式格式的区别：

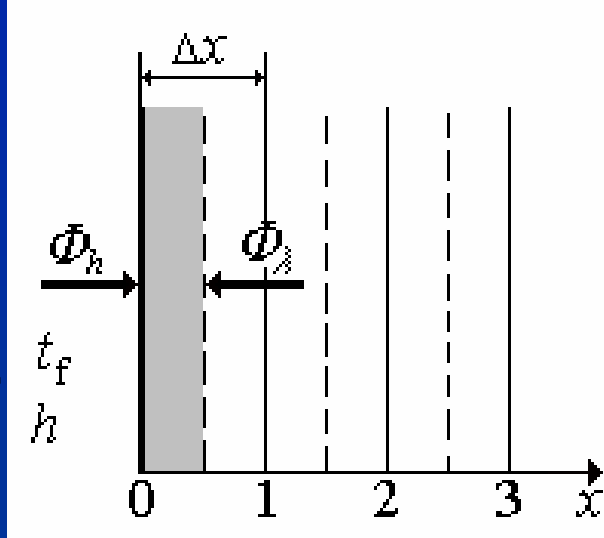
节点 n 的下一时刻温度是用自身节点的当前时刻以及相邻节点的下一时刻温度来表示的，因此必须一次列出全部待求节点的差分方程并联立求解。隐式格式的计算工作量大，但不受上述稳定性条件的限制，即可以任意选择时间与空间步长。

(2) 边界节点温度差分方程

边界节点0所代表的控制容积

在 k 时刻的热平衡： $\Phi_\lambda + \Phi_h = dU$

如果节点0的温度对时间的变化率采用**向前差分**，热平衡方程式可写成



$$A\lambda \frac{t_1^i - t_0^i}{\Delta x} + Ah(t_f^i - t_0^i) = A \frac{\Delta x}{2} \rho c \frac{t_0^{i+1} - t_0^i}{\Delta \tau}$$

引进网格付里叶数 $Fo_\Delta = \frac{a \cdot \Delta \tau}{\Delta x^2}$ 和网格毕渥数 $Bi_\Delta = \frac{h \cdot \Delta x}{\lambda}$

上式写成显函数的形式

$$t_0^{i+1} = 2Fo_\Delta (t_1^i + Bi_\Delta t_f^i) + (1 - 2Bi_\Delta Fo_\Delta - 2Fo_\Delta) t_0^i$$

边界节点温度方程的显式差分格式

$$t_0^{i+1} = 2Fo_{\Delta} (t_1^i + Bi_{\Delta} t_f^i) + (1 - 2Bi_{\Delta} Fo_{\Delta} - 2Fo_{\Delta}) t_0^i$$

同内部节点温度方程的显式差分格式的道理一样，上式必须满足**显式差分格式的稳定性条件**，即

$$1 - 2Bi_{\Delta} Fo_{\Delta} - 2Fo_{\Delta} \geq 0$$

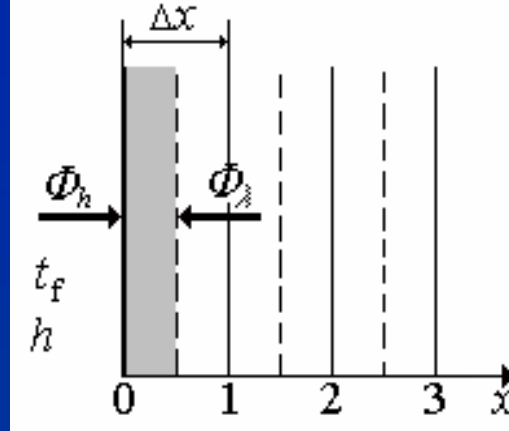
$$\rightarrow Fo_{\Delta} \leq \frac{1}{2Bi_{\Delta} + 2} \quad \text{对比} \quad Fo_{\Delta} \leq \frac{1}{2}$$

因为 $Bi_{\Delta} > 0$ ，所以只要满足上式，自然满足内部节点温度方程显式差分格式的稳定性条件。因此上式是第三类边界条件下一维非稳态导热所有节点温度方程显式差分格式的稳定性条件。

边界节点温度方程的隐式差分格式

如果节点0的温度对时间的变化率采用**向后差分**，热平衡方程式可写成

$$A\lambda \frac{t_1^i - t_0^i}{\Delta x} + Ah(t_f^i - t_0^i) = A \frac{\Delta x}{2} \rho c \frac{t_0^i - t_0^{i-1}}{\Delta \tau}$$



$$A\lambda \frac{t_1^{i+1} - t_0^{i+1}}{\Delta x} + Ah(t_f^{i+1} - t_0^{i+1}) = A \frac{\Delta x}{2} \rho c \frac{t_0^{i+1} - t_0^i}{\Delta \tau}$$

引进网格付里叶数 $Fo_{\Delta} = \frac{a \cdot \Delta \tau}{\Delta x^2}$ 和网格毕渥数 $Bi_{\Delta} = \frac{h \cdot \Delta x}{\lambda}$

上式写成显函数的形式

$$(2Fo_{\Delta} + 2Fo_{\Delta} - 1)t_0^{k+1} + 2Fo_{\Delta}t_1^{i+1} + 2Fo_{\Delta}Bi_{\Delta}t_f^{i+1} + t_0^k = 0$$

边界节点温度方程的显式差分格式

第四章小结

重点掌握以下内容：

- (1) 理解数值解法的基本思想，熟悉数值解法的基本步骤；
- (2) 掌握有限差分法的原理；
- (3) 能够根据导热问题的特点，合理地进行求解域的离散；
- (4) 重点掌握热平衡法建立节点温度差分方程；
- (5) 会利用计算机求解节点温度差分方程组，并掌握求解结果表达方法。

大作业

一厚度为**0.1m**的无限大平壁，两侧均为对流换热边界条件，初始时 两侧流体温度与壁内温度一致， $t_{f1}=t_{f2}=t_0=5$ ；已知两侧对流换热系数分别为 **$h_1=11 \text{ W/m}^2\text{K}$** 、 **$h_2=23 \text{ W/m}^2\text{K}$** ，壁的导热系数 **$\lambda=0.43 \text{ W/mK}$** ，导温系数 **$a=0.3437 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$** 。如果一侧的环境温度 **$t_{f1}$** 突然升高为**50** 并维持不变，计算在其它参数不变的条件下，平壁内温度分布及两侧壁面热流密度随时间的变化规律（用图形表示）。

要求：将全部计算内容（包括网格的划分、节点方程组、计算框图、程序及计算结果）用A4纸打印。