

## 离散信号空间上的最小能量框架在升余弦脉冲信号上的去噪算法

谢映海<sup>1,2</sup>, 杨维<sup>1,2</sup>, 樊婷婷<sup>1,2</sup>

(1.北京交通大学 轨道交通控制与安全国家重点实验室, 北京 100044; 2.东南大学 移动通信国家重点实验室, 江苏 南京 210096)

**摘 要:** 利用离散信号空间上的最小能量(小波)框架对升余弦脉冲信号展开去噪算法的研究。对于所给的 2 组不同最小能量框架, 升余弦脉冲信号和加性高斯白噪声的抽样离散信号在这 2 组框架的各个子数列下的分解系数将出现明显不同的统计特征。据此给出了 2 个具体的阈值去噪算法, 两者都充分利用了最小能量框架在信号去噪应用上的优点, 在保持发送原始信号成分的同时去除了部分噪声成分, 获得了较好的处理效果。仿真结果表明, 当调制方式为 BPSK 且升余弦脉冲信号受加性高斯白噪声影响时, 如果利用 2 个算法对接收波形进行去噪预处理, 则接收信号的信噪比大幅度提升, 在误码率上可以分别获得 3.1dB 和 2.7dB 左右的性能增益。

**关键词:** 离散信号空间; 最小能量(小波)框架; 升余弦脉冲信号; 阈值去噪算法

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2012)03-0044-08

## De-noising algorithms for the raised cosine pulse signal using the minimum-energy frame in the discrete signal space

XIE Ying-hai<sup>1,2</sup>, YANG Wei<sup>1,2</sup>, FAN Ting-ting<sup>1,2</sup>

(1. State Key Laboratory of Rail Traffic Control and Safety, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. National Mobile Communications Research Laboratory, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**Abstract:** The de-noising algorithms were proposed for the raised cosine pulse signal using minimum-energy (wavelet) frame in the discrete signal space. For the given two minimum-energy frames, the decomposition coefficients of sampled sequence appeared significant statistical characteristics difference between the raised cosine pulse signal and additive Gaussian noise under the frames' sub-sequences. Based on this, two threshold de-noising algorithms were provided to makes full use of the merit that the frame was fit for the de-noising work, they removed partial noise component while keeping the component of original signal and got efficient de-noising result. The simulation results show that, when the modulating method is BPSK and its raised cosine pulse signal is polluted by the additive Gaussian noise, then if add a pre-processing link to denoise the receiving waveform using the algorithms, the receiver can greatly increase the signal-to-noise ratio of receiving signal and have about 3.1dB and 2.7dB performance gain of bit error ratio, respectively.

**Key words:** discrete signal space; minimum-energy (wavelet) frame; raised cosine pulse signal; threshold de-noising algorithm

收稿日期: 2011-03-14; 修回日期: 2011-12-20

**基金项目:** 轨道交通控制与安全国家重点实验室自主研究基金资助项目(RCS2009ZT014); 东南大学移动通信国家重点实验室开放研究基金资助项目(2010D11); 国家科技支撑计划基金资助项目(SQ2012BAJY3504-03); 国家自然科学基金资助项目(60972089)

**Foundation Items:** The State Key Laboratory of Rail Traffic Control and Safety (RCS2009ZT014); The Open Research Fund of National Mobile Communications Research Laboratory, Southeast University(2010D11); The National Science & Technology Pillar Program (SQ2012BAJY3504-03); The National Natural Science Foundation of China (60972089)

## 1 引言

小波分析<sup>[1~4]</sup>在数学理论和实际应用中都有着十分重要的意义,特别是在信号处理领域上有着广泛的应用<sup>[5~10]</sup>。而在正交小波基础上 CHUI C K 等<sup>[4]</sup>提出了最小能量(小波)框架的概念并研究了其性质,它既可以利用小波理论对信号进行时频分析和处理,又克服了正交小波不能同时具备光滑性、紧支性、和对称性的缺点,在信号处理领域上有着良好的应用前景。

虽然从信息论角度出发,对连续信号进行离散化处理不可能取得比直接处理更好的结果。但随着相关技术的不断发展,数字信号处理技术渐渐在稳定性,可控性,集成规模等方面都比模拟信号处理有着较大优势,因此连续信号的离散化处理是信号处理领域中的一个总趋势。

目前关于小波理论的研究大部分集中在连续信号空间上,为了把相关理论扩展至离散信号处理领域,谢映海等<sup>[11]</sup>在连续信号空间的最小能量框架基础上,首次给出离散信号空间上的最小能量框架的定义,并证明了它所具备的一些和连续信号空间上的最小能量框架相类似的优良性质;该文献还针对数字通信系统中用来携带数字信息的矩形脉冲信号展开了去噪算法的研究,并获得了较好的处理效果。

与矩形脉冲信号相比,升余弦脉冲信号的功率密度谱虽然具有较宽的主瓣,但拖尾衰减速度要快很多,在应用中具有更高的实用价值。因此本文将在文献[11]的基础上,利用离散信号空间上的最小能量框架进一步对这种类型的信号展开去噪算法的研究。对于所挑选的2组不同的最小能量框架,详细地分析了抽样离散化后的升余弦脉冲信号数列和加性高斯噪声数列在这2组框架的各个子数列下的分解系数的各自统计特征,并根据它们呈现出来的明显差异和阈值去噪算法的思想<sup>[12,13]</sup>,分别给出了其对应的去噪算法。

比起传统的直接对连续信号波形进行处理的D4单小波阈值去噪算法<sup>[12]</sup>,这2个去噪算法的本质都是连续接收信号的离散抽样信号进行分解,然后对分解子数列进行一定的去噪处理后再重构信号。使用具有一定冗余性的最小能量框架数列变换算法可以减少误差,提高重构精度,同时算法更有利于分离接收信号中的原始信号成分和噪声成分,

从而获得比传统的不具冗余性的正交小波变换算法更好的去噪效果。由于充分利用了接收信号的先验信息,本文提出的对接收信号的抽样离散序列进行去噪处理可以有效提高接收信号的输出信噪比。而系统如果在接收机上增加了这样的一个信号去噪的预处理环节,可以大幅度降低噪声影响,减少解调的误码率,获得较大的性能增益。理论分析和仿真结果表明,当调制方式为BPSK且升余弦脉冲信号受加性高斯白噪声的影响时,2个去噪算法在误码率上可以分别获得约3.1dB和2.7dB左右的性能增益。

## 2 离散信号空间上的最小能量框架的基础知识

本节主要介绍一下框架和文献[11]给出的离散信号空间上的最小能量框架的一些基本性质。

**定义 1** 设 $\{x_j : j \in J\}$ 是希尔伯特空间 $H$ 上的一组元素,如果对于任意的元素 $f \in H$ ,存在正数 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ ,有

$$\lambda_1 \|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, x_j \rangle|^2 \leq \lambda_2 \|f\|^2 \quad (1)$$

则称 $\{x_j : j \in J\}$ 是 $H$ 上的一个框架, $\lambda_1, \lambda_2$ 分别称为框架的下、上框架界。而如果 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,则称框架是一个Parseval框架。而对于一个Parseval框架,有下列通用的分解和重构公式:

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, x_j \rangle x_j \quad (2)$$

**定义 2** 设数列 $p_{[k]} \in \ell^2$ 是一个数字低通滤波器的单位抽样响应,如果一数列组 $q_{[k]}^i \in \ell^2 : i = 1, 2, \dots, N$ 对所有的整数 $j$ 和 $l$ 满足下列条件:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (p_{[j-2k]} p_{[l-2k]} + \sum_{i=1}^n q_{[j-2k]}^i q_{[l-2k]}^i) = 2\delta_{j,l} \quad (3)$$

则称数列组 $q_{[k]}^i : i = 1, 2, \dots, N$ 生成了离散信号空间上的一个和数列 $p_{[k]}$ 相联系的最小能量框架。这里,

$$\delta_{j,l} \text{ 定义如下: } \delta_{j,l} = \begin{cases} 1, & j=l \\ 0, & j \neq l \end{cases}$$

最小能量框架不但可以使用Parseval框架的分解和重构公式,而且也可以使用小波理论中特有的塔式分解和重构算法,这为它们在离散信号上的广泛应用奠定了坚实的基础。

**引理 1** 如果数列 $q_{[k]}^i : i = 1, 2, \dots, N$ 生成了离

散信号空间上一个和数列  $p_{[k]}$  相联系的最小能量框架, 则对任意数列  $c_{[j+1,k]} \in \ell^2$ , 有分解算法如下:

$$c_{[j,l]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k p_{[k-2l]} c_{[j+1,k]}$$

$$d_{[j,l]}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k q_{[k-2l]}^i c_{[j+1,k]}, \quad i=1,2,\dots,N \quad (4)$$

其重构算法如下:

$$c_{[j+1,l]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \{ p_{[l-2k]} c_{[j,k]} + \sum_{i=1}^N q_{[l-2k]}^i d_{[j,k]}^i \} \quad (5)$$

及满足分解前后的能量不变性等式:

$$\sum_{k \in Z} |c_{[j+1,k]}|^2 = \sum_{l \in Z} |c_{[j,l]}|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{l \in Z} |d_{[j,l]}^i|^2 \quad (6)$$

注: 由于可以利用分解公式对数列进行逐层分解, 因此数列  $c_{[j+1,k]}$  的下标第一个表示层数, 第二个表示整数轴。

比起其他 Parseval 框架, 离散信号空间上的最小能量框架的一个优点就在于它可以使用塔式分解和重构算法。从时域上看, 塔式分解公式时可以对离散信号在不同尺度下进行逐层分解, 通过分析各层的分解子信号的性质来研究信号本身整体和局部的一些特征; 从频域上看, 由于存在明确的重构公式, 最小能量框架可以看作是一个可准确重建, 由  $N+1$  个单位抽样响应分别为  $p_{[k]}$  和  $q_{[k]}^i : i=1,2,\dots,N$  的数字滤波器组成的滤波器组, 可从多个不同频带上对信号频谱信息进行分析处理。

### 3 离散信号空间上的最小能量框架在升余弦脉冲信号上的去噪应用

在数字通信领域, 脉冲宽度为  $T$  的矩形脉冲信号  $g_1(t) = A(0 \leq t \leq T)$  和升余弦脉冲信号

$$g_2(t) = \frac{A}{2} \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{T}{2} \right) \right] (0 \leq t \leq T)$$

是比较常用的 2 种用来携带数字信息的基本信号类型。在频谱方面, 升余弦脉冲信号的谱函数

$$G_2(f) = \frac{AT}{2} \frac{\sin \pi f T}{\pi f T (1 - f^2 T^2)} e^{-j\pi f T}$$

信号的谱函数  $G_1(f) = AT \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} e^{-j\pi f T}$  具有更宽的主瓣, 但拖尾的衰减速度无疑要快很多, 因此具有更高的实用价值。

任何形式的信号在传输过程中不可避免的都会受到各种噪声的污染, 因此信号去噪一直是信号处理领域中的一个研究热点。对采用升余弦脉冲的 BPSK 基带信号  $s(t)$  而言, 如果传输信道为加性高斯白噪声信道, 不失一般性, 发送功率归一化后接收信号  $r(t)$  可以表示为

$$r(t) = \sum_n \pm \sqrt{\frac{2}{3T}} [1 + \cos \frac{2\pi}{T} (t - nT - \frac{T}{2})] + u(t) \quad (7)$$

其中,  $\pm$  分别代表数字信息 0 和 1,  $u(t)$  是功率密度谱为  $\delta^2$  的高斯白噪声的样本函数。而检测器将根据输出向量的正负性来判决接收信号上的所携带的数字信息。

从频带角度上看, 虽然接收信号受到了加性高斯白噪声的污染, 其在整个频率范围内都具有平坦的功率密度谱, 但假定接收端的信号和噪声通过了一个理想的, 带宽足够大的带通滤波器, 使得接收信号是一个带限随机信号。因此接收信号可以用一个非唯一, 抽样速率不低于其奈奎斯特速率的数字序列  $r_{[n]} = s_{[n]} + u_{[n]}$  来表示。利用式 (4) 对  $r_{[n]}$  进行分解, 有

$$c_{[l]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k p_{[k-2l]} r_{[k]}, \quad d_{[l]}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k q_{[k-2l]}^i r_{[k]},$$

$$i=1,2,\dots,N \quad (8)$$

对于式(8), 从频域上看, 各个子数列代表着接收信号数列通过不同滤波器后的滤波结果, 因此滤波器如果具有线性相位, 即框架实系数  $p_{[k]}$  和  $q_{[k]}^i (i=1,2,\dots,N)$  是中心对称的或反对称的, 重构过程就可以避免失真; 而从时域上看, 各个子数列代表着对接收信号的局部信号数列进行不同线性加权的结果。不同于一个波形周期内矩形脉冲信号的恒幅度, 升余弦脉冲信号的幅度是不断变化的, 因此如果系数  $p_{[k]}$  和  $q_{[k]}^i$  的长度较长, 将使得加权过程所涉及局部信号数过多, 信号之间的相关性下降, 导致分解效果降低, 同时也大大提高了分解和重构算法的计算复杂度。出于这种考虑, 本文从众多已经构造出来的最小能量框架中选用了下列 2 组<sup>[4]</sup>:

$$\begin{cases} p_{[k]} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}] \\ q_{[k]}^1 = [\frac{\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{-\sqrt{2}}{4}] \\ q_{[k]}^2 = [\frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{4}] \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \tilde{p}_{[k]} = [\dot{1}, \frac{1}{16}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}] \\ \tilde{q}_{[k]}^1 = [0, \frac{1}{16}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}] \\ \tilde{q}_{[k]}^2 = [\dot{1}, \frac{1}{16}, -\frac{\sqrt{7}}{8}, 0, \frac{\sqrt{7}}{8}, -\frac{1}{16}] \\ \tilde{q}_{[k]}^3 = [0, \frac{1}{16}, \frac{\sqrt{7}}{8}, 0, -\frac{\sqrt{7}}{8}, -\frac{1}{16}] \end{cases} \quad (10)$$

注：数列上的黑点表示零点位置。

应用离散信号空间上最小能量框架进行去噪的理论基础就是先分析发送信号数列  $s_{[n]}$  和噪声数列  $u_{[n]}$  在框架的各个子数列下的分解系数的不同统计特征，再根据这些特征的差异性制定一个具体算法来对其接收信号的分解系数进行修正后重构信号，从而去除噪声的部分影响，尽量恢复原始信号。下面将基于上述 2 组最小能量框架分别给出其对应的去噪算法。

### 3.1 基于式(9)的阈值去噪算法 I

下面开始分析正升余弦脉冲信号  $s(t) = +\sqrt{\frac{2}{3T}}$

$[1 + \cos \frac{2\pi}{T}(t - nT - \frac{T}{2})]$ ,  $0 \leq t \leq T$  的抽样离散数列在式(9)下的 3 个子数列的分解系数的特性（注：负信号和正信号的区别仅在于 Y 轴的正负性，因此在本质是一样的），设每个脉冲信号的时间宽度为  $T = 1$ ，抽样间隔为 0.01，则根据式(5)的分解算法对  $s(t)$  的抽样信号  $s_{[n]}$ ,  $0 \leq n \leq 100$  进行分解，产生了 3 个点数为 50 的子数列，依次为  $c_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{100} p_{[k-2n]} s_{[k]}$ 、 $d_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{100} q_{[k-2n]}^1 s_{[k]}$  和  $e_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{100} q_{[k-2n]}^2 s_{[k]}$ ，具体情况如图 1 所示。

接着产生一个长度为 100，均值为 0，方差为 1 的高斯噪声序列  $u_{[n]}$ ，同样对其进行分解，也产生了 3 个点数为 50 的子数列，即  $c_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{100} p_{[k-2n]} u_{[k]}$ 、 $d_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{100} q_{[k-2n]}^1 u_{[k]}$  和  $e_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{100} q_{[k-2n]}^2 u_{[k]}$ ，具体情况如图 2 所示。

比较图 1 和图 2，可以清楚看出对  $s_{[n]}$  而言，其子数列  $c_{[n]}$  基本反映  $s_{[n]}$  的基本细节部分，承载了信

号的大部分信息和能量，而  $d_{[n]}$ 、 $e_{[n]}$  则都代表  $s_{[n]}$  的高频部分，2 个子数列的绝对值大小和数列  $c_{[n]}$  相比较，几乎可以忽略不计；对高斯噪声数列  $u_{[n]}$  而言，由于其各点之间的不相关性，3 个子数列的值仍然都表现出高斯噪声的统计特征，且噪声信号的能量均匀的分布在 3 个子数列上。而且在这组框架下，其他均值为 0，任意方差的高斯噪声序列的分解子数列也均表现出了这种统计特性。

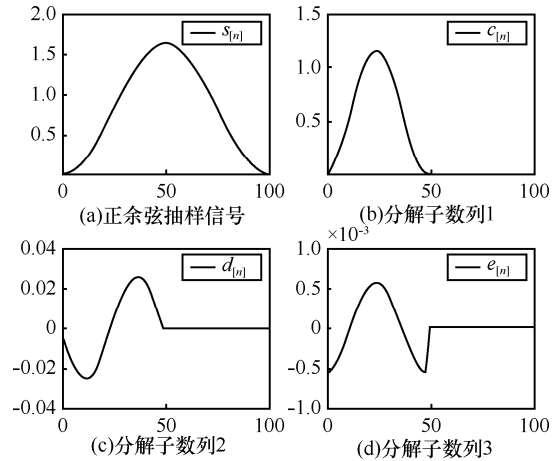


图 1 升余弦脉冲信号抽样数列在式(9)下的分解

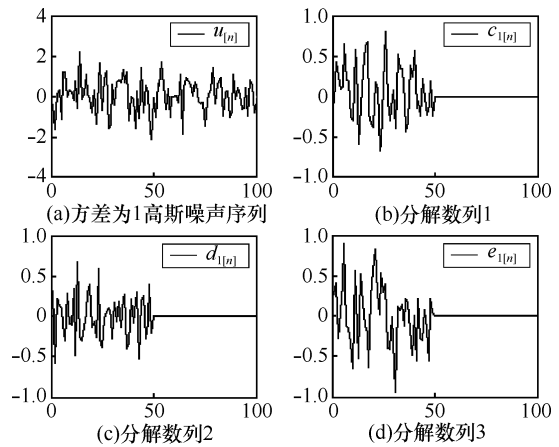


图 2 高斯白噪声抽样数列在式(9)下的分解

基于图 1 和图 2 的结果，在制定去噪算法时需要针对不同的子数列采用了不同的策略，以尽量保持原始信号成分和最大化地去除噪声影响，达到最佳的去噪效果。对于加性高斯白噪声，有如下的硬阈值函数<sup>[12,13]</sup>：

$$\eta^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq \varepsilon \\ x, & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

其中， $\varepsilon$  是阈值， $x$  是分解系数。

根据上述分析,在数字通信系统的接收机端增加了一个信号去噪的预处理环节,在解调器对受加性高斯白噪声污染的二进制升余弦脉冲信号进行解调之前进行信号去噪的预处理工作,其相关过程具体描述如下。

1) 原始设定:脉冲宽度为  $T_s$ ,归一化后发射功率恒定为 1,且升余弦脉冲波形在信道传输过程中受到均值为 0,方差为  $\delta^2$  的加性高斯白噪声的影响。两端同步后接收机对每个接收波形  $r(t)$ ,  $NT_s \leq t \leq (N+1)T_s, N=0,1,\dots$  进行抽样间隔为  $T_s/100$  的等距抽样且得到离散信号数列  $r_{[n]}$ 。

2) 信号预处理环节:

① 分解:

第一层分解:令  $c_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100} p_{[k-2n]} r_{[k]}$ ,

$$d_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100} q^1_{[k-2n]} r_{[k]}, \quad e_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100} q^2_{[k-2n]} r_{[k]}$$

第二层分解:令  $cc_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{50} p_{[k-2n]} c_{[k]}$ ,

$$dc_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{50} q^1_{[k-2n]} c_{[k]}, \quad ec_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{50} q^2_{[k-2n]} c_{[k]}$$

其中,  $p_{[k]}, q^1_{[k]}, q^2_{[k]}$  数值如式(9)所示。

② 去噪:对分解系数数列  $d_{[n]}, e_{[n]}, dc_{[n]}$  和  $ec_{[n]}$  而言,设定其阈值大小依次为  $\varepsilon_d = 2.6 \times 10^{-2}$ 、 $\varepsilon_e = 5.7 \times 10^{-4}$ 、 $\varepsilon_{dc} = 1.8 \times 10^{-2}$  和  $\varepsilon_{ec} = 4.0 \times 10^{-4}$ 。采用式(11)的硬阈值函数,即凡是绝对值小于这个阈值的点全部置零,依次得到 4 个新数列  $d'_{[n]}, e'_{[n]}, dc'_{[n]}$  和  $ec'_{[n]}$ 。

③ 重构:利用重构式(6)对数列  $cc_{[n]}, dc'_{[n]}$  和  $ec'_{[n]}$  进行重构得到一个新数列  $c'_{[n]}$ ,再利用重构公式对数列  $c'_{[n]}, d'_{[n]}$  和  $e'_{[n]}$  进行重构得到去噪后的新信号  $\hat{r}_{[n]}$ ,根据抽样定理的重构公式,使用序列  $\hat{r}_{[n]}$  进行重构且得到信号波形  $\hat{r}(t)$ 。

3) 解调:对处理后的波形  $\hat{r}(t)$  进行解调检测,输出判决结果。

### 3.2 基于式(10)的阈值去噪算法 II

下面开始分析升余弦脉冲信号  $s(t)$  的抽样离散数列  $\tilde{s}_{[n]}$  在式(11)下的子数列的分解系数的特性,则根据式(5)的分解算法得到了 4 个点数为 50 的子数列,

$$\text{依次为 } \tilde{c}_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{100} \tilde{p}_{[k-2n]} \tilde{s}_{[k]}, \quad \tilde{d}_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{100} \tilde{q}^1_{[k-2n]} \tilde{s}_{[k]},$$

$$\tilde{e}_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{100} \tilde{q}^2_{[k-2n]} \tilde{s}_{[k]} \text{ 和 } \tilde{f}_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{100} \tilde{q}^3_{[k-2n]} \tilde{s}_{[k]}, \text{ 具体情况如图 3 所示。}$$

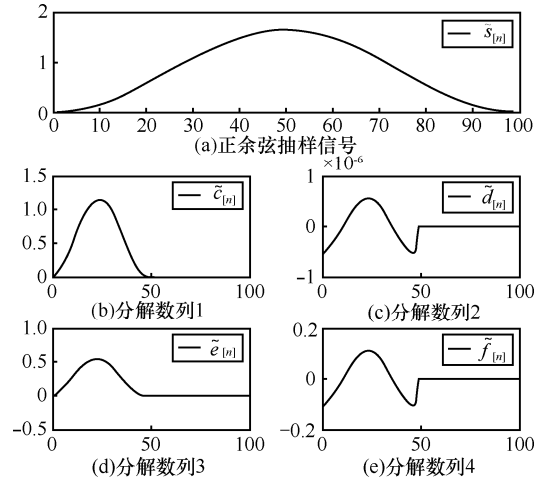


图 3 升余弦脉冲信号抽样数列在式(10)下的分解

接着产生一个长度为 100,均值为 0,方差为 1 高斯噪声序列  $\tilde{u}_{[n]}$ ,同样对其进行分解,也产生了 4

$$\text{个点数为 50 的子数列,即 } \tilde{c}_{1[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{100} \tilde{p}_{[k-2n]} \tilde{u}_{[k]},$$

$$\tilde{d}_{1[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{100} \tilde{q}^1_{[k-2n]} \tilde{u}_{[k]}, \quad \tilde{e}_{1[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{100} \tilde{q}^2_{[k-2n]} \tilde{u}_{[k]} \text{ 和}$$

$$\tilde{f}_{1[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{100} \tilde{q}^3_{[k-2n]} \tilde{u}_{[k]}, \text{ 具体情况如图 4 所示。}$$

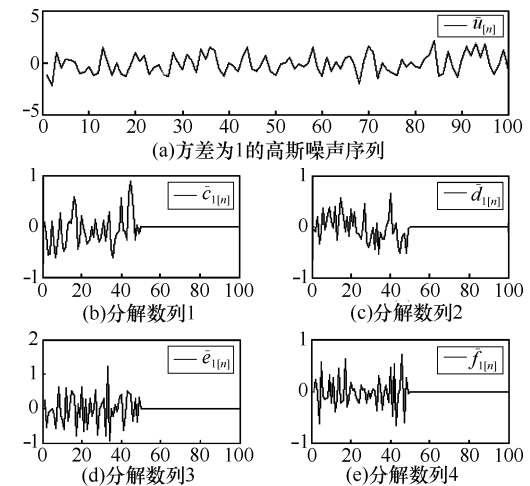


图 4 高斯白噪声抽样数列在式(10)下的分解

比较图 3 和图 4,可以清楚看出对  $\tilde{s}_{[n]}$  而言,  $\tilde{c}_{[n]}, \tilde{e}_{[n]}$  和  $\tilde{f}_{[n]}$  基本反映  $\tilde{s}_{[n]}$  的细节部分,但幅度有着较大差异,而  $\tilde{d}_{[n]}$  绝对值大小基本趋近零值;而对高斯噪声数列  $\tilde{u}_{[n]}$  而言,由于其各点之间的不相关性,

4 个子数列的值仍然都表现出高斯噪声的统计特征,且噪声信号能量也是均匀分布在 4 个子数列上。而且在这组框架下,其他均值为 0,任意方差的高斯噪声序列的分解子数列也均表现出了这种统计特性。

根据上述分析,同样增加信号去噪的预处理环节,过程具体描述如下:

1) 原始设定:同 3.1 节的设定且得到了离散信号数列  $\tilde{r}_{[n]}$ 。

2) 信号预处理环节:

①分解:

第一层分解:令  $\tilde{c}_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100} \tilde{p}_{[k-2n]} \tilde{r}_{[k]}$ 、  
 $\tilde{d}_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100} \tilde{q}_{[k-2n]}^1 \tilde{r}_{[k]}$ 、 $\tilde{e}_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100} \tilde{q}_{[k-2n]}^2 \tilde{r}_{[k]}$  和  
 $\tilde{f}_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100} \tilde{q}_{[k-2n]}^3 \tilde{r}_{[k]}$ 。其中,  $\tilde{p}_{[k]}$ 、 $\tilde{q}_{[k]}^1$ 、 $\tilde{q}_{[k]}^2$  和  $\tilde{q}_{[k]}^3$   
 的数值如式(11)所示。

第二层分解:对数列  $\tilde{c}_{[n]}$ 、 $\tilde{e}_{[n]}$  分别设定阈值  $\varepsilon_{\tilde{c}} = 1.15$  和  $\varepsilon_{\tilde{e}} = 0.56$ ,并利用分解公式对处理后这 2 个数列再进行一次分解,得到 2 组共 8 个子数列,依次为  $\tilde{c}\tilde{c}_{[n]}$ 、 $\tilde{c}\tilde{d}_{[n]}$ 、 $\tilde{c}\tilde{e}_{[n]}$  和  $\tilde{c}\tilde{f}_{[n]}$ ;  $\tilde{e}\tilde{c}_{[n]}$ 、 $\tilde{e}\tilde{d}_{[n]}$ 、 $\tilde{e}\tilde{e}_{[n]}$  和  $\tilde{e}\tilde{f}_{[n]}$ 。

② 去噪:把数列  $\tilde{d}_{[n]}$ 、 $\tilde{c}\tilde{d}_{[n]}$ 、 $\tilde{e}\tilde{d}_{[n]}$  和  $\tilde{f}\tilde{d}_{[n]}$  的值全部置零;对数列  $\tilde{f}_{[n]}$  设阈值  $\varepsilon_{\tilde{f}} = 0.15$ ;而对数列  $\tilde{c}\tilde{c}_{[n]}$ 、 $\tilde{c}\tilde{e}_{[n]}$  和  $\tilde{c}\tilde{f}_{[n]}$  分别设定阈值  $\varepsilon_{\tilde{c}\tilde{c}} = 0.83$ 、 $\varepsilon_{\tilde{c}\tilde{e}} = 0.40$  和  $\varepsilon_{\tilde{c}\tilde{f}} = 0.1$ ;对数列  $\tilde{e}\tilde{c}_{[n]}$ 、 $\tilde{e}\tilde{e}_{[n]}$  和  $\tilde{e}\tilde{f}_{[n]}$  分别设定阈值  $\varepsilon_{\tilde{e}\tilde{c}} = 0.40$ 、 $\varepsilon_{\tilde{e}\tilde{e}} = 0.20$  和  $\varepsilon_{\tilde{e}\tilde{f}} = 0.05$ 。

③ 重构:利用重构式(5)对处理后数列进行逐层重构,最终得到去噪后的新信号  $\hat{r}_{[n]}$ ,根据抽样定理的重构公式,使用序列  $\hat{r}_{[n]}$  进行重构且得到信号波形  $\hat{r}(t)$ 。

3) 解调:对处理后的波形  $\hat{r}(t)$  进行解调检测,输出判决结果。

最后解释一下阈值及分解层数的设定问题:分析文献[11]给出的关于矩形脉冲信号和高斯噪声的分解效果图可知,由于矩形脉冲的幅度恒定,因此在分解时其原始信号能量将绝大部分集中于第一个分解子数列中,因此阈值仅仅设定了一个;而升余弦信号由于幅度是变化的,因此原始信号能量的分布相对分散一些,因此需要针对不同子数列设定

不同阈值。本文把阈值都设定在分解后各自子数列的最大绝对值上,这样就可以在不损害原始信号成分的前提下尽量去除噪声成分。而部分数列因为绝对值太小,为降低去噪算法的复杂度,因此在基本不影响效果的情况下就把它们直接置零处理;而在分解层数的选择上,我们注意到,原始信号成分和噪声成分得以分离的一个原因是由于信号数列值之间的局部较强相关性和噪声数列值之间的不相关性,但随着分解的进行,这两者都会受到一定的破坏。相关研究表明,当分解层数大于 2 后,就基本上再难以分离原始信号成分与噪声成分,因此这里把分解层数设定为 2。

### 4 仿真结果

上节给出的 2 个去噪算法都充分利用了信号的先验信息,分析了原始信号和噪声的分解子序列的各自统计特性,去噪时通过使用合适的阈值和直接归零的方法,最大化去除噪声对信号影响。以式(9)的去噪算法为例,图 5 给出了其处理信号过程。

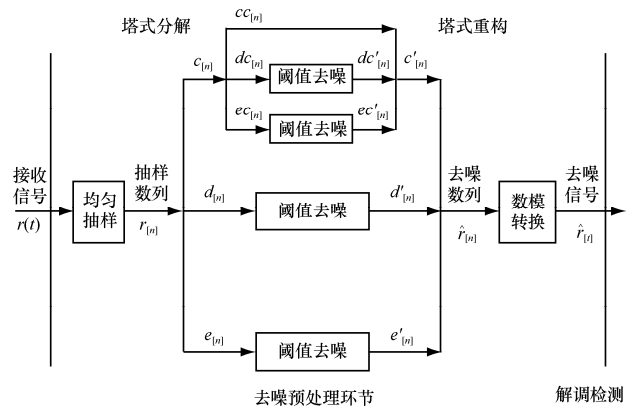


图 5 式(9)的去噪预处理环节

这里通过计算机仿真来验证这套算法的具体去噪效果,设发射机采用 BPSK 调制方式且采用脉冲宽度为 1 单位时间,发射功率为 1 的升余弦脉冲信号,信号  $s(t)$  在传输过程中受功率密度谱为  $\delta^2$  的高斯白噪声的污染。

信号  $s(t)$  一共包含了  $10^6$  个脉冲信号,两端同步后接收机对接收波形  $r(t)$  进行抽样间隔为 0.01 的等距抽样且得到离散信号数列  $r_{[n]}$ 。利用上节给出的 2 个去噪算法逐个对接收信号的每 100 个点的抽样数列进行去噪,处理后分别得到新信号  $r_{1[n]}$  和  $r_{2[n]}$ ,把这 2 个离散信号分别进行数模转换,最终得到了预处理后的模拟信号  $r_1(t)$

和  $r_2(t)$ 。为更好地评价效果，这里也利用直接对连续信号波形进行处理的 D4 单小波阈值去噪算法对接收波形  $r(t)$  进行去噪处理，得到了信号  $r_3(t)$ 。假定接收信号的去噪过程都是在一个叫“去噪器”的黑箱子中完成的，则其输入信号的信噪比和使用不同去噪算法去噪后的 3 个输出信号的信噪比之间的关系曲线如图 6 所示。

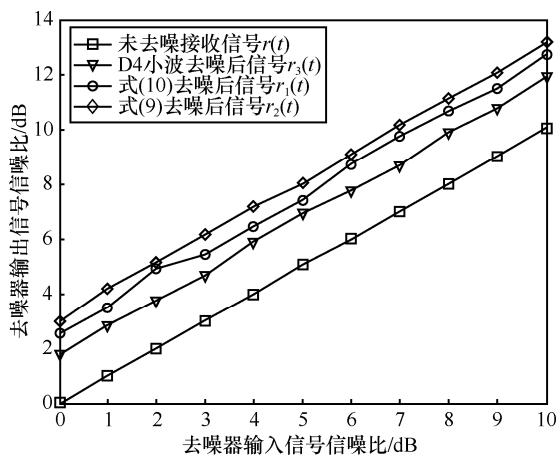


图 6 不同去噪算法的去噪效果

离散空间上的最小能量框架在对接收信号的抽样数列进行分解时，去噪算法可以把被污染的信号分解到多个子带上，在充分利用先验信息的情况，可以有效分离和去除噪声成分，因此利用式(9)和式(10)的最小能量框架都可以取得较好的去噪效果，且其效果明显优于传统的 D4 小波去噪算法。观察图 6 的结果，可以清楚看出对于受到加性高斯白噪声影响的二进制升余弦脉冲信号，去噪后部分噪声能量从接收信号中被去除，从而使得处理后的信号的信噪比获得提升。不管噪声功率密度谱的大小，D4 小波去噪算法可以获得 1.8 dB 左右的信噪比指标提升，基于式(11)的去噪算法的提升幅度为 2.7 dB 左右，而基于式(10)的去噪算法的性能更好一些，提升幅度为 3.1 dB 左右。究其原因，D4 小波去噪时把信号分解成 2 个子数列时，原始信号成分和噪声成分的分离程度明显劣于后面两者，因此去噪效果要差一些。而观察图 1~图 4 可以看出，式(9)分解时原始抽样信号的能量绝大部分都集中在第 1 个子数列上，而式(10)分解时原始信号的能量虽然大部分集中在第 1 个子数列，但第 3 和第 4 个子数列上也占据了一定的份额，在噪声能量在 2 个框架上分解时都是均匀分布的情况

下，显然式(9)的阈值去噪效果会比式(10)要好一些。

由此可见，如果接收机增加了一个简单的预处理环节，在发射功率没有提高的情况下，进入解调检测环节的信号的信噪比可以大幅度提高，有效降低了信息传输的误码率，从而提高通信系统的整体性能。

### 5 结束语

本文利用了 2 个不同的离散信号空间上最小能量框架对升余弦脉冲信号展开去噪算法的研究。结果表明，如果利用本文所提供的 2 个去噪算法，在接收机端增加一个简单的去噪预处理环节，则可以改善数字通信系统的性能，获得了较大的性能增益。这些工作和仿真结果表明离散信号空间上的最小能量框架在信号去噪领域上具备很好的应用前景，值得做进一步深入研究。

### 参考文献:

- [1] DAUBECHIES I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J]. *Comm Pure Appl Math*, 1998,41(7):909-996.
- [2] CHUI C K. *An Introduction to Wavelets*[M]. Boston: Academic Press, 1992.
- [3] DAUBECHIES I. *Ten Lectures on Wavelets*[M]. Philadelphia, 1992.
- [4] CHUI C K, HE W. Compactly supported tight frames associated with refinable functions[J]. *Appl Comp Harm Anal*, 2000, 8(3):293-319.
- [5] SHEN L X, MANOS P, IOANNIS A K. Image denoising using a tight frame[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006,15(5): 309-319.
- [6] 陈世国, 吉世印, 刘万松等. 基于小波分析的指数衰减信号高斯脉冲成形[J]. *物理学报*, 2008,57(5):3041-3046.  
CHEN S G, JI S Y, LIU W S, et al. Gaussian pulse shaping of exponential decay signal based on wavelet analysis[J]. *Acta Physica Sinica*, 2008,57(5):3041-3046.
- [7] 赵文山, 何怡刚. 一种改进的开关电流滤波器实现小波变换的方法[J]. *物理学报*, 2008,58(2):843-848.  
ZHAO W S, HE Y G. An improved method for implementation of wavelet transform utilizing switched-current filters[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(2): 843-848.
- [8] 张煜东, 吴乐南. 基于分割的彩色图像编码[J]. *中国科学 F 辑*, 2009, 39(4):405-415.  
ZHANG Y D, WU L N. Color image coding based segmentation[J].

Scientia Sinica Informations, 2009, 39(4): 405-415.

- [9] 赵瑞珍, 刘晓宇, LI C C. 基于稀疏表示的小波去噪[J]. 中国科学 E 辑, 2010, 40(1): 33-40.

ZHAO R Z, LIU X Y, LI C C. Wavelet de-noising based on sparse representation[J]. Science in China, Series E, Information Sciences, 2010, 40(1): 33-40.

- [10] 罗向阳, 刘粉林, 杨春芳. 基于最优小波包分解的图像隐写通用检测[J]. 中国科学 E 辑, 2010, 40(2):327-339.

LUO X Y, LIU F L, YANG C F. Best wavelet packet decomposition based image steganography detection of common[J]. Science in China, Series E, Information Sciences, 2010, 40(2):327-339.

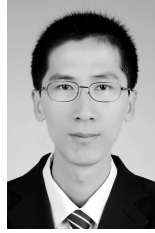
- [11] 谢映海, 杨维, 张玉. 离散空间上的最小能量框架及其在矩阵脉冲信号去噪中的应用研究[J]. 物理学报, 2010, 59(11): 722-731.

XIE Y H, YAGN W, ZHANG Y. Minimum-energy frame of discrete signal space and its denoising application to rectangular pulse signal[J]. Acta Physica Sinica, 2010, 59(11): 722-731.

- [12] MALLAT S. A Wavelet Tour of Signal Processing[M]. Beijing: China Machine Press, 2010.

- [13] DONOHO D. De-noising by soft thresholding[J]. IEEE Trans Inf Theory, 1995, 41(3):613-627.

#### 作者简介:



谢映海 (1983-), 男, 福建莆田人, 北京交通大学博士生, 主要研究方向为数字信号处理。



杨维 (1964-), 男, 北京人, 北京交通大学教授、博士生导师, 主要研究方向为无线宽带通信。



樊婷婷 (1988-), 女, 河南信阳人, 北京交通大学博士生, 主要研究方向为无线宽带通信。

.....  
(上接第 43 页)

- [11] HENZINGER T A, JHALA R, MAJUMDAR R. Lazy abstraction[A]. ACM Symposium on Principles of Programming Language[C]. Oregon, 2002. 58-70.

- [12] DETLEFS D, NELSON G, SAXE J B. Simplify: a theorem prover for program checking[J]. Journal of the ACM, 2005, 52(3): 365-473.

- [13] CHEN T Y, LAU M F. A simulation study on some heuristics for test suite reduction[J]. Information and Software Technology, 1998, 40(13): 777-787.

- [14] 沈昌祥, 张焕国, 冯登国等. 信息安全综述[J]. 中国科学 E 辑, 2007, 37(2): 129-150.

SHEN C X, ZHANG H G, FENG D G, *et al.* Survey of information security[J]. Science in China, Series E, Information Sciences, 2007, 37(2): 129-150.

#### 作者简介:



郭曦 (1983-), 男, 湖北鄂州人, 武汉大学博士生, 主要研究方向为可信软件安全性分析与测试、信息安全等。



张焕国 (1945-), 男, 河北元氏人, 武汉大学教授、博士生导师, 主要研究方向为信息安全、可信计算、纠错编码等。