

基于 MRP 的全局稳定的 PID 刚体姿态控制

宿敬亚, 张瑞峰, 蔡开元*

北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191

摘要: 针对刚性航天器姿态控制问题,建立了由修正 Rodrigues 参数(MRP)表示的混杂姿态模型,并基于此模型设计了一种具有迟滞特性的非线性比例-积分-微分(PID)切换控制器。该控制器包含一个对克里奥利力矩和期望机动力矩的前馈补偿项和一个用于消除轨迹跟踪误差的 PID 反馈项。通过一个特别的 Lyapunov 函数分析得到了全局渐进稳定的结果。该控制器可全局渐近跟踪期望姿态轨迹,无姿态转动的奇异值点,无展开现象,能够抑制常值干扰力矩,对测量噪声具有鲁棒性。针对一个航天器进行了大角度控制仿真实验,仿真结果验证了控制器具有渐近跟踪特性、可避免展开现象的特性以及对常值干扰和测量噪声的鲁棒性。

关键词: 姿态控制; 修正 Rodrigues 参数; 比例-积分-微分; 混杂系统; 迟滞

中图分类号: V448 **文献标识码:** A

姿态控制对航天器和航空器非常重要^[1-10]。在实际应用中,由于存在摩擦力、建模误差和外部干扰等因素,姿态控制常常会出现稳态误差^[1-2]。为了消除稳态误差,许多控制器中引入了积分项^[3-7]。文献[3]和文献[4]中设计了基于欧拉角的鲁棒比例-积分-微分(PID)姿态控制器。文献[5]中给出了一个基于修正 Rodrigues 参数(MRP)的 PID 姿态控制器。由于姿态的任何三参数表示都会有奇异值现象,所以这些控制器不能使刚体转动任意角度。文献[6]中利用了 MRP 与它的影子(Shadow MRP)设计了一个切换控制器,避免了奇异值现象。但是这一切换造成了 Lyapunov 函数的不连续性,同时也不能说明 Lyapunov 函数在切换面上是严格递减的,所以不能得到全局渐近稳定的结果。文献[7]中设计了一种基于四元数的连续控制器。用四元数表示姿

态虽然不会出现奇异值现象,但是任何基于四元数的连续控制器都不能得到全局渐近稳定的结果^[8]。控制器常常会出现展开(Unwinding)现象,所谓展开现象就是:虽然机体姿态无限接近期望姿态,但是控制器却使得机体沿着大弧度旋转,而再次到达期望姿态。为了解决展开问题,文献[8]~文献[10]分别设计了不连续的比例-微分(PD)控制器,但是它们都没有考虑常值干扰的影响,且不易直接扩展为 PID 控制器。文献[11]中给出了一种基于四元数的全局稳定的 PID 姿态控制器,解决了展开问题。但是,相对于 MRP,在计算精度相同的前提下,四元数增加了计算量,使定姿算法的实现变得复杂^[12]。

为此,本文建立了基于 MRP 的混杂姿态模型,设计了一种切换 PID 控制器,并通过一个特殊的 Lyapunov 函数证明了该控制器的全局渐近

收稿日期:2010-08-02; 退修日期:2010-09-29; 录用日期:2010-11-29

基金项目:国家自然科学基金(60904066)

* 通讯作者。Tel.: 010-82338767 E-mail: kycai@buaa.edu.cn

引用格式: 宿敬亚, 张瑞峰, 蔡开元. 基于 MRP 的全局稳定的 PID 刚体姿态控制[J]. 航空学报, 2011, 32(4): 710-719. Su Jingya, Zhang Rui Feng, Cai Kaiyuan. Globally stabilizing PID attitude control of rigid body based on MRP [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(4): 710-719.

稳定性。

1 混杂姿态模型和问题描述

刚体姿态动力学方程为^[13]

$$\left. \begin{aligned} J\dot{\boldsymbol{\omega}} &= -\boldsymbol{\omega}^\times J\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{\omega}(0) &= \boldsymbol{\omega}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $J \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 为机体转动惯量矩阵; $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^3$ 为机体角速度向量; $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3$ 为控制力矩向量; $\boldsymbol{d} \in \mathbf{R}^3$ 为未知常值干扰力矩; $\boldsymbol{\omega}^\times$ 为一个反对称矩阵, 且满足 $\boldsymbol{a}^\times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 。本文中机体坐标系和期望坐标系的相对姿态用MRP表示, 设为 $\boldsymbol{\sigma}(t) = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]^\top \in \mathbf{R}^3$, 其中 $\sigma_i \in \mathbf{R} (i=1, 2, 3)$ 。

刚体姿态运动学方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= B(\boldsymbol{\sigma})\delta\boldsymbol{\omega}/4 \\ \boldsymbol{\sigma}(0) &= \boldsymbol{\sigma}_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}$ 为机体相对于期望轨迹坐标系的姿态; $B(\boldsymbol{\sigma}) = (1 - \boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{\sigma}^\times + 2\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^\top$, 其中 \boldsymbol{E} 为相容维数的单位阵; $\delta\boldsymbol{\omega} = [\delta\omega_1 \ \delta\omega_2 \ \delta\omega_3]^\top \in \mathbf{R}^3$ 为角速度误差在机体坐标系上的投影, 其中 $\delta\omega_i \in \mathbf{R} (i=1, 2, 3)$ 。定义期望的姿态角速度为 $\boldsymbol{\omega}_d(t) \in \mathbf{R}^3$, 则有

$$\delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - G(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega}_d \quad (3)$$

式中:

$$G(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{E} + [8(\boldsymbol{\sigma}^\times)^2 - 4(1 - \boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}^\times] / (1 + \boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\sigma})^2$$

由式(2)和式(3)可得

$$\delta\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} - G(\boldsymbol{\sigma})\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \boldsymbol{\omega}^\times G(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega}_d$$

为了无奇异地表示机体姿态, 采用MRP的影子 $\boldsymbol{\sigma}_s = -\boldsymbol{\sigma} / (\boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\sigma})$ 与MRP共同表示机体姿态。由于 $\boldsymbol{\sigma}_s$ 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 互为影子且运动学方程相同, 所以在系统方程中不再明确区分。引入积分项 $\boldsymbol{I}_\sigma = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(\tau) d\tau =$

$[I_{\sigma_1} \ I_{\sigma_2} \ I_{\sigma_3}]$ 。姿态跟踪误差方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{I}}_\sigma &= \boldsymbol{\sigma} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= B(\boldsymbol{\sigma})\delta\boldsymbol{\omega}/4 \\ J\delta\dot{\boldsymbol{\omega}} &= -\boldsymbol{\omega}^\times J\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{d} - \\ &\quad J(G(\boldsymbol{\sigma})\dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \boldsymbol{\omega}^\times G(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega}_d) \\ (\boldsymbol{I}_\sigma, \boldsymbol{\sigma}, \delta\boldsymbol{\omega}) &\in C \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^+ &= -\boldsymbol{\sigma} / (\boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\sigma}) \\ (\boldsymbol{I}_\sigma, \boldsymbol{\sigma}, \delta\boldsymbol{\omega}) &\in D \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}^+$ 为跳跃后姿态值; C 为连续演化域; D 为不连续演化域。状态既有连续演化过程又存在不

连续的跳跃过程, 因此为一个混杂系统^[14]。

根据前面相对姿态 $\boldsymbol{\sigma}$ 的定义, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ 意味着飞行器的姿态和期望姿态重合, 因此控制任务可以归纳为设计一个控制器使得系统状态全局渐近收敛于 $(\boldsymbol{c}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, 其中 $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^3$ 为任意有界常值向量, $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^3$ 为零向量。

2 控制器设计

本文的控制器设计包含两个方面, 一是MRP和它影子的切换规律设计, 二是PID控制律设计。两者相互联系, 共同构成姿态控制器。

2.1 切换律的设计

常用的切换方式是在 $\boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\sigma} = 1$ 时切换。这种切换方式可以保证 $\boldsymbol{\sigma}$ 始终表示刚体姿态到期望姿态所需的最小角转动。但是这样的切换对测量噪声没有鲁棒性, 即存在任意小的测量噪声使得 $\boldsymbol{\sigma}$ 始终在切换面附近^[15]。为了解决这一问题, 采用具有迟滞特性的切换方式, 下面详细说明这种切换方式。

连续和离散演化域分别设计为

$$\left\{ \begin{aligned} C &= \{(\boldsymbol{I}_\sigma, \boldsymbol{\sigma}, \delta\boldsymbol{\omega}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\sigma} < 1 + \epsilon\} \\ D &= \{(\boldsymbol{I}_\sigma, \boldsymbol{\sigma}, \delta\boldsymbol{\omega}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\sigma} \geq 1 + \epsilon\} \end{aligned} \right.$$

式中: ϵ 为迟滞系数, $\epsilon > 0$ 。

具有迟滞特性的切换方式如图1所示。图中, 横轴表示 $\boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\sigma}$ 和它影子 $(\boldsymbol{\sigma}_s)^\top \boldsymbol{\sigma}_s$ 的值, 纵轴表示计算控制信号时使用的姿态表示, 横轴以上的 $u(\boldsymbol{\sigma}_s)$ 表示应用影子MRP即 $\boldsymbol{\sigma}_s$ 计算控制信号, 横轴以下的 $u(\boldsymbol{\sigma})$ 表示应用原MRP即 $\boldsymbol{\sigma}$ 计算控制信号 u 。存在小的测量噪声, 使得测量值 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\top \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \geq 1 + \epsilon$, 意味着 $\boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\sigma} \geq 1$ 。那么切换后 $(\boldsymbol{\sigma}_s)^\top \boldsymbol{\sigma}_s \leq 1$, 系统状态在连续演化域 C 内, 且小测量噪声不能使测量值 $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s)^\top \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s > 1 + \epsilon$ 。如果控制器在无测量噪声的情况下是渐近稳定的, 那么系统状态将收敛于原点附近^[16]。而在 $\epsilon = 0$ 的情况下, 对于某些在 $\boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\sigma} = 1$ 上的初始值, 任意小的测量噪声都有可能使得它的测量值 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\top \tilde{\boldsymbol{\sigma}} > 1$, 导致状态发生切换。切换后不久, 测量噪声又使 $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s)^\top \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s > 1$, 再次进行切换。如此反复, 将控制姿态停留在 $S = \{(\boldsymbol{I}_\sigma, \boldsymbol{\sigma}, \delta\boldsymbol{\omega}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\sigma} = 1\}$ 面附近^[15]。因此, 具有迟滞特性的控制器对小幅值测量噪声具有鲁棒性。

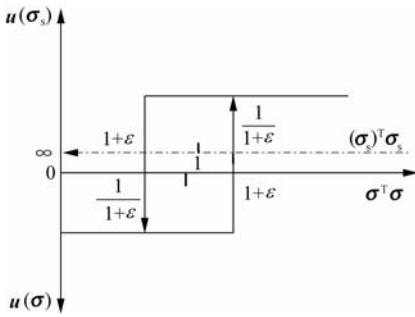


图1 切换控制的迟滞特性

Fig. 1 Hysteretic property of switching control

2.2 PID 控制律的设计

迟滞切换的引入以及姿态运动学方程本身的非线性,使得控制律的设计变得非常困难。已有的PID非线性设计方法^[5-7]没有考虑切换(不连续)的影响,即不能保证Lyapunov函数在切换发生时是严格递减的,得不到全局渐近稳定的结果。为此,需要设计一个在状态切换时为“严格减”的备选Lyapunov函数。由于它直接影响到PID控制律形式,所以是控制律设计的关键。本节给出的备选Lyapunov函数通过放宽反步法中能量函数“严格减”的性质得出,同时需借助LaSalle不变集原理才能证明闭环系统的全局渐近稳定性。

这里首先给出PID控制律形式,然后基于所设计的备选Lyapunov函数证明系统的渐近稳定性。

PID控制律设计为

$$u = \omega^\times J\omega + J(G(\sigma)\dot{\omega}_d - \omega^\times G(\sigma)\omega_d) - [C_d\delta\omega + (k_p E + J C_i)\sigma + C_d C_i \bar{I}_\sigma] \quad (5)$$

式中: $0 < C_d \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$; $0 < C_i \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$; $0 < k_p \in \mathbf{R}$ 。闭环系统总体框图如图2所示。

接下来将详细说明该切换PID控制器可以完成第1节中所描述的控制任务。

令

$$\bar{I}_\sigma = I_\sigma - (C_d C_i)^{-1} d \quad (6)$$

将式(5)和式(6)代入式(4),得到闭环系统的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{I}}_\sigma &= \sigma \\ \dot{\sigma} &= B(\sigma)\delta\omega/4 \\ J\delta\dot{\omega} &= -C_d(\delta\omega + C_i \bar{I}_\sigma) - (k_p E + J C_i)\sigma \\ (I_\sigma, \sigma, \delta\omega) &\in C \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma^+ &= -\sigma/(\sigma^T \sigma) \\ (I_\sigma, \sigma, \delta\omega) &\in D \end{aligned} \right\} \quad (7b)$$

为了说明在式(5)的作用下 σ 能够收敛到零,只需证明闭环系统式(7)的原点 $(\bar{I}_\sigma, \sigma, \delta\omega) = (0, 0, 0)$ 是渐近稳定的。定理1给出了闭环系统原点的全局渐近稳定性。

定理1 闭环系统式(7)的原点是全局渐近稳定的。

证明 考虑如下备选Lyapunov函数:

$$V = 2k_p \ln(1 + \sigma^T \sigma) + k_p \bar{I}_\sigma^T C_i \bar{I}_\sigma / 2 + (\delta\omega + C_i \bar{I}_\sigma)^T J (\delta\omega + C_i \bar{I}_\sigma) / 2 \quad (8)$$

在连续演化时,它沿闭环系统的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= k_p \sigma^T \delta\omega + k_p \bar{I}_\sigma^T C_i \dot{\sigma} + \\ &(\delta\omega + C_i \bar{I}_\sigma)^T J (\delta\dot{\omega} + C_i \dot{\sigma}) = \end{aligned}$$

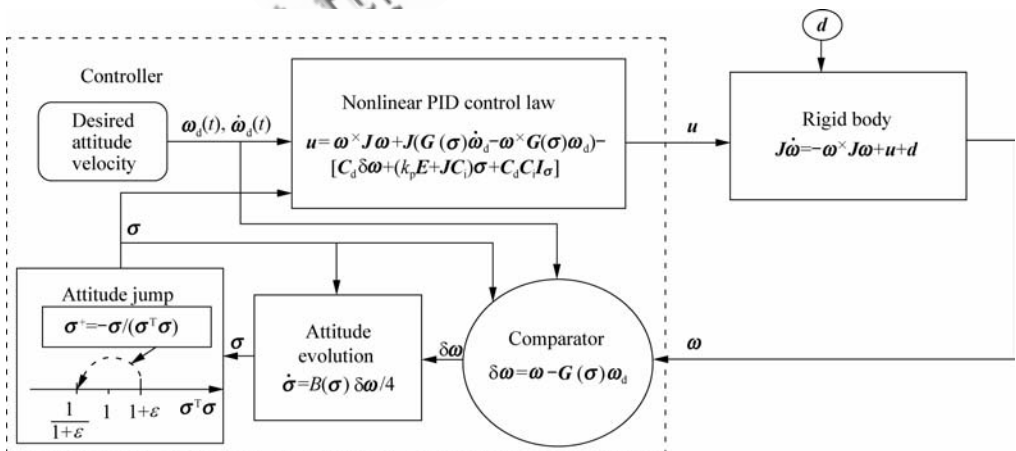


图2 姿态控制框图

Fig. 2 Attitude control block diagram

$$(\delta\omega + C_i \tilde{I}_\sigma)^T (k_p \sigma + J \delta\dot{\omega} + J C_i \sigma) - (\delta\omega + C_i \tilde{I}_\sigma)^T C_d (\delta\omega + C_i \tilde{I}_\sigma) \quad (9)$$

切换时

$$V^+ - V = 2k_p \ln(1 + (\sigma_s)^T \sigma_s) - 2k_p \ln(1 + \sigma^T \sigma) = -2k_p \ln(\sigma^T \sigma) \leq -2k_p \ln(1 + \varepsilon) < 0 \quad (10)$$

又由于 $V \geq 0$, 可知切换次数 \bar{j} 是有限的, $\bar{j} < [V(0)/[2k_p \ln(1 + \varepsilon)]]$, 其中 $[\cdot]$ 为大于“ \cdot ”的最小整数。假设对于某固定初值, 系统最多切换了 m 次, 且第 m 次切换发生在时刻 t_m , 则当 $t > t_m$ 时, 闭环系统为连续演化过程, 相应的 V 为连续演化过程。根据 LaSalle 不变集原理^[17] 和式(9)可知, 系统最终收敛于 $U = \{(\tilde{I}_\sigma, \sigma, \delta\omega) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \dot{V}(\tilde{I}_\sigma, \sigma, \delta\omega) = 0\}$ 内最大不变集。

下面说明只有零解 $(\tilde{I}_\sigma, \sigma, \delta\omega) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ 为 U 内最大不变集。易知 $U = \{(\tilde{I}_\sigma, \sigma, \delta\omega) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \delta\omega + C_i \tilde{I}_\sigma = \mathbf{0}\}$ 。令 $(\hat{I}_\sigma, \hat{\sigma}, \hat{\delta\omega})$ 为 U 内一条整轨线, 从而有

$$\delta\hat{\omega} + C_i \hat{I}_\sigma \equiv \mathbf{0} \quad (11)$$

由式(11)可得

$$\delta\hat{\omega} \equiv -C_i \hat{I}_\sigma = -C_i \hat{\sigma} \quad (12)$$

再由式(7a)第3式可得

$$J \delta\hat{\omega} = -C_d (\delta\hat{\omega} + C_i \hat{I}_\sigma) - (k_p E + J C_i) \hat{\sigma} \quad (13)$$

将式(11)和式(12)代入式(13)可得

$$k_p \hat{\sigma} \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \hat{\sigma} \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \hat{\delta\omega} \equiv \mathbf{0} \quad (14)$$

再根据式(7a)第2式可得

$$\delta\hat{\omega} \equiv \mathbf{0} \quad (15)$$

将式(15)代入式(11)可得

$$\hat{I}_\sigma \equiv \mathbf{0} \quad (16)$$

由式(14)~式(16)可知, 只有零解 $(\hat{I}_\sigma, \hat{\sigma}, \hat{\delta\omega}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ 可以始终在 U 内。所以零解为 U 内最大不变集。

由以上分析可知, 闭环系统状态最终收敛于原点, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{I}_\sigma(t), \sigma(t), \delta\omega(t)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ 。又由文献[14]的定理 4.2 可知原点是稳定的。根据

混杂系统渐近稳定的定义^[14], 可得原点是全局渐近稳定的。

证毕。

注:

(1) 控制律式(5)中不含有未知变量 $\tilde{I}_\sigma, \tilde{I}_\sigma$ 只是用于证明的一个辅助变量, 因此控制器中不含有未知因素。

(2) 控制律式(5)的前两项直接前馈补偿了克里奥利力矩 $\omega^\times J \omega$ 和期望机动力矩 $J(G(\sigma)\dot{\omega}_d - \omega^\times G(\sigma)\omega_d) = J\dot{\omega}_d^b$, 其中 ω_d^b 为期望角速度在机体坐标系上的投影; 其余项为一个线性 PID 反馈控制律, 其比例系数 $K_p \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 、微分系数 $K_d \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 和积分系数 $K_i \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 的表达式分别为

$$\begin{cases} K_p = k_p E + J C_i \\ K_d = C_d \\ K_i = C_d C_i \end{cases}$$

一般来讲, 积分项系数很小, 所以由 C_d 调节微分系数, 由 C_i 调节积分系数, 由 k_p 调节比例系数。由定理 1 可知, 只要 $C_d > \mathbf{0}, C_i > \mathbf{0}$ 且 $k_p > 0$ 就可以保证闭环系统的全局渐近稳定性。

K_p, K_d 和 K_i 可通过常规 PID 参数调节方法进行设定。需要说明的是本文应用的参数不一定是最好的, 最优参数的选取作为以后的工作。

(3) 控制律式(5)中显含转动惯量 J , 因此转动惯量对控制效果有影响。如果转动惯量未知, 需应用其他方法进行估计, 例如自适应的方法。当转动惯量发生大的改变或受到大的干扰时, 前馈中对期望机动所需力矩的补偿不准确, 导致系统响应落后于期望姿态, 从而出现跟踪误差, 闭环误差系统不能渐近收敛到零。但是可以通过增大 PID 增益来加快系统响应速度, 从而减小跟踪误差。当期望姿态为常值时, 闭环系统的渐近稳定性一般不会受到破坏。但是, 由于控制律参数的变化, 动态响应过程有所改变。

(4) 如图 1 所示, 迟滞特性发生在切换面 $S = \{\sigma \mid \sigma^T \sigma = 1\}$ 附近, 它是物理上离稳定点 $\sigma = \mathbf{0}$ 最远的姿态集合(即 S 是刚体绕空间中某轴转动 180° 所到达的姿态的集合), 所以当系统收敛速度变慢时, 即系统收敛到平衡点($\sigma = \mathbf{0}$)附近时, 系统呈现连续演化过程, 迟滞特性不再产生作用。

迟滞系数 ε 的大小对控制性能有影响。 ε 过

小,可能对测量噪声缺乏抑制作用; ϵ 过大,则会使得 σ 不能及时进行切换,物理上出现绕大圈现象。 ϵ 的大小需通过对测量噪声的估计得到。设 σ 的测量噪声为 $\eta(t)$,则一般选择 $\epsilon > \|\eta(t)\|$,其中 $\|\cdot\|$ 为“ \cdot ”的欧拉范数。详细解释如下。

设初始时 $\sigma(0)$ 在切换面附近。对于有迟滞特性的控制器,切换发生时

$$1 + \epsilon \leq \|\eta + \sigma\| \leq \|\sigma\| + \|\eta\|$$

因为 $\|\eta\| < \epsilon$,所以 $1 < \|\sigma\|$ 。切换后

$$\|\sigma^+\| = \|\sigma - \sigma/(\sigma^T \sigma)\| < 1$$

切换后 $\|\sigma\|$ 减小了,相应的测量值 $\|\eta + \sigma^+\| < 1 + \epsilon$ 在连续演化域内。连续演化时,控制器会驱使 $\|\sigma\|$ 减小(有初始速度时,由于惯性, $\|\sigma\|$ 可能仍会增加,一旦再次发生切换,控制器就会推动姿态顺着原有的速度方向旋转,也就是使得再次切换后的 $\|\sigma\|$ 减小),测量值远离切换面,从而避免了在切换面附近滞留的现象。

3 仿真

以一个空间飞行器的姿态控制为例来验证所设计的姿态控制器的作用,该飞行器的转动惯量为^[3]

$$J = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 5 \\ 10 & 20 & 3 \\ 5 & 3 & 15 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

仿真参数为: $\omega(0) = \mathbf{0}$ rad/s, $I_\sigma = \mathbf{0}$, $\omega_d = [\sin(0.1t) \quad \sin(0.1t) \quad \sin(0.1t)]^T$ rad/s, $d = [1 \quad -2 \quad -1]^T$ N·m。PID控制律参数设计为: $C_d = 25E$, $C_i = 0.05E$, $k_p = 30$ 。下面进行4个仿真。

(1) 与文献[5]中PID控制器的比较。文献[5]中PID控制器为

$$\begin{aligned} u = & \omega^\times J\omega + J(G(\sigma)\dot{\omega}_d - \omega^\times G(\sigma)\omega_d) - \\ & J(K_1 + K_2 B(\sigma)/4)\delta\omega - \\ & J[(K_1 K_2 + 2E)\sigma + K_1] \int_0^t \sigma dt \end{aligned} \quad (17)$$

式中: $K_1 = 0.1E$, $K_2 = E$ 。

姿态初值 $\sigma(0) = [1.2 \quad 0.5 \quad 0.5]^T$ 。应用迟滞姿态控制器的仿真结果如图3和图4所示。由图3可知,姿态误差 σ 首先切换为 $\sigma^+ \approx$

$[-0.6186 \quad -0.2577 \quad -0.2577]^T$,然后趋向于零,而不是由 $\sigma(0) = [1.2 \quad 0.5 \quad 0.5]^T$ 直接趋向于零,避免了绕大圈的现象,减小了能量消耗。从图4可知角速度误差趋向于零。应用控制器式(17)的仿真结果如图5和图6所示。由图5可知,姿态误差没有进行切换,物理上绕了大弧度趋向于期望值,增加了能量消耗。同时,由图5和图6可知这一控制器最终也使得刚体跟踪期望姿态轨迹。由于式(17)中的PID系数不能解耦,所以对其控制器参数的选择有很大限制,这使得动态效果很不理想。而本文所设计的控制器在一定程度上克服了这一缺点。

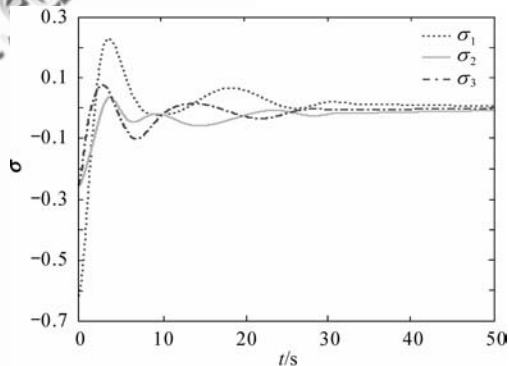


图3 应用迟滞控制器的姿态 σ 输出

Fig. 3 Attitude σ via hysteretic controller

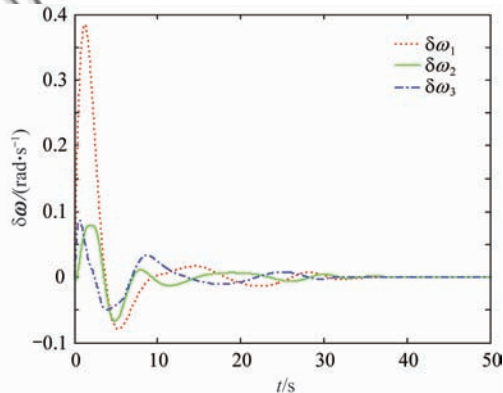


图4 应用迟滞控制器的角速度误差 $\delta\omega$ 输出

Fig. 4 Angular velocity error $\delta\omega$ via hysteretic controller

(2) 具有迟滞的控制器($\epsilon = 0.2$)与无迟滞的控制器($\epsilon = 0$)的比较。设角速度 ω 中存在 $[0.2\sin(40t + 3\pi/4) \quad 0.2\sin(40t + 3\pi/4) \quad 0.2\sin(40t + 3\pi/4)]^T$ 的噪声(这里设姿态由角速度积分得到,如果姿态可以直接测量,则直接在姿态上加入测量噪声)。姿态初值 $\sigma(0) = [1$

$0 \ 0 \ 0]^T$ 。姿态 σ_1 、角速度 ω 和积分项 I_σ 的输出分别如图 7~图 9 所示。如图 7 所示,无迟滞的控制使得 σ_1 在切换面 S 附近抖动,而具有迟滞的控制避免了这一现象的发生。由图 8 可知机体角速度对期望信号的跟踪误差有界,说明了控制器的收敛性。图 9 表明 $\lim_{t \rightarrow \infty} C_d C_i I_\sigma \approx d$, 即控制器

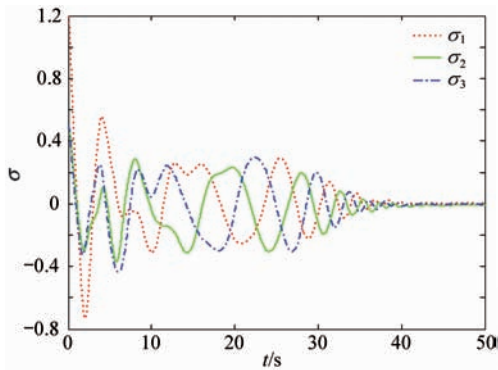


图 5 应用控制器式(17)的姿态 σ 输出
Fig. 5 Attitude σ via controller Eq. (17)

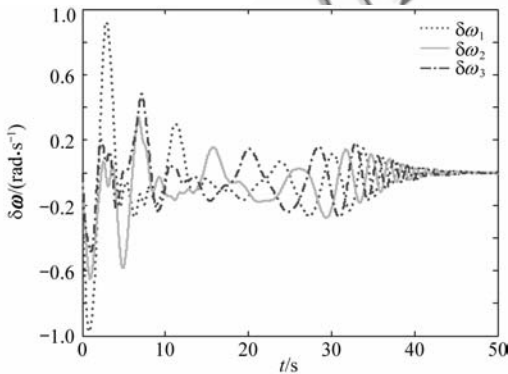


图 6 应用控制器式(17)的角速度误差 $\delta\omega$ 输出
Fig. 6 Angular velocity error $\delta\omega$ via controller Eq. (17)

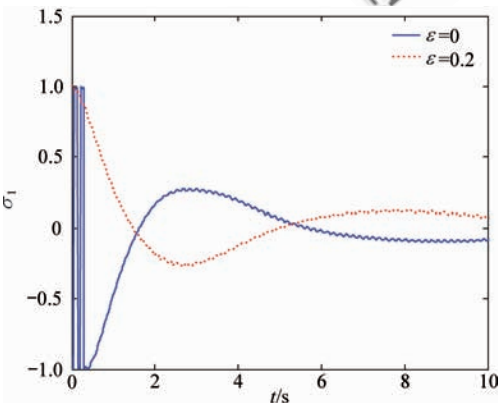


图 7 有测量噪声情况下的姿态 σ_1 输出
Fig. 7 Attitude σ_1 in presence of measurement noise

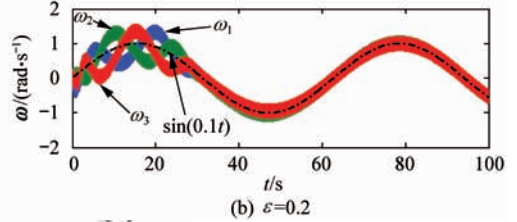
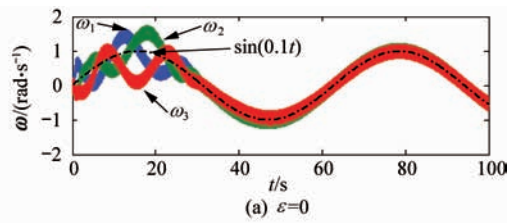


图 8 有测量噪声情况下的机体角速度 ω 输出
Fig. 8 Angular velocity ω in presence of measurement noise

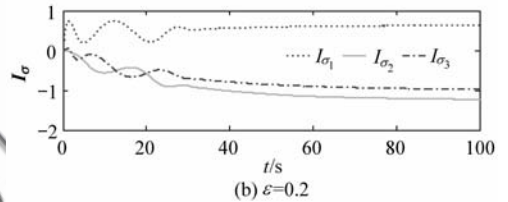
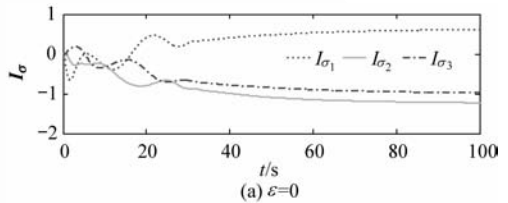


图 9 有测量噪声情况下的积分 I_σ 输出
Fig. 9 Integral term I_σ in presence of measurement noise

中的积分项自动抵消了未知常值干扰力矩,说明了控制器对常值干扰力矩具有抑制作用。仿真结果表明具有迟滞特性的 PID 控制器在有小测量噪声的情况下仍可以使系统姿态跟踪期望姿态轨迹,验证了控制器对测量噪声的鲁棒性。

(3) 对转动惯量的敏感性。对象转动惯量有 10% 误差,实际值取 $J = 0.9J_e$ (用于姿态动力学模型的仿真), 其中 J_e 为估计值,用于计算控制律;姿态初值 $\sigma(0) = [1.2 \ 0.5 \ 0.5]^T$ 。跟踪正弦信号的仿真结果如图 10 和图 11 所示,可见 σ 和 $\delta\omega$ 分别存在 0.15 和 0.05 rad/s 的误差,且呈现出周期特性。这是因为控制器不能准确预测正弦机动所需的力矩。仅仅靠

状态误差 PID 进行控制时,由于系统响应需要一定时间,所以系统姿态总是落后于期望姿态。

和 $k_p=60$ 时的仿真结果如图 13 和图 14 所示。可见 σ 的误差减小到 0.04 以内,而 $\delta\omega$ 的误差也缩小到 0.005 rad/s 以内。从图 10~图 14 可知,在转动惯量不准确的情况下,跟踪误差是有界的。

定点控制($\omega_d \equiv 0$)的仿真结果如图 15 和图 16 所示。控制器参数应用原参数($C_d = 25E, C_i = 0.05E, k_p = 30$)。从图中可见 σ 和 $\delta\omega$ 都趋向于零。这说明,定点控制时,控制器可以应对转动惯量不精确的情况,但是转动惯量的误差会使得系统动态过程有所改变。例如, k 的增加意味着控制律中 PID 系数的相对减小,从而使得调节时间增加。

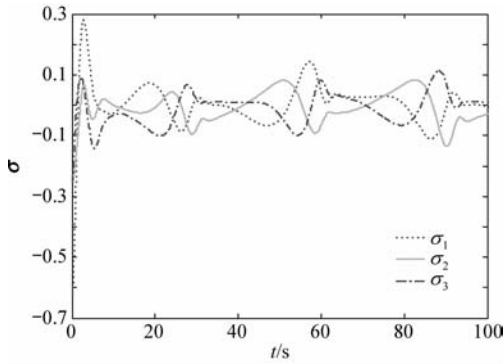


图 10 在常值干扰、转动惯量有 10% 误差情况下的姿态 σ 输出

Fig. 10 Attitude σ in presence of constant external disturbance and 10% errors in inertial matrix

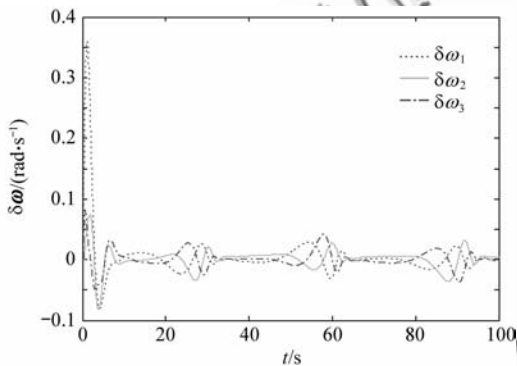


图 11 在常值干扰、转动惯量有 10% 误差情况下的角速度误差 $\delta\omega$ 输出

Fig. 11 Angular velocity error $\delta\omega$ in presence of constant external disturbance and 10% errors in inertial matrix

令 $k = J/J_c$, 分别对 $k = 0.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 1, 1.05, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 2$ 时进行仿真。得到 k 和系统趋于稳态后 $\|\sigma\|_\infty$ 以及 $\|\delta\omega\|_\infty$ 的关系如图 12 所示。从图 12 可知无论估计值比实际值大还是小,都会使得系统存在稳态误差,且随着转动惯量误差范数的增加,跟踪误差幅值增加。

加大 PID 系数,即减小系统响应时间,可以减小误差。PID 参数增加为 $C_d = 50E, C_i = 0.1E$

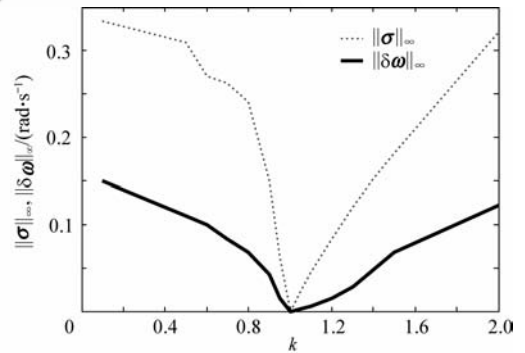


图 12 k 与 σ 的稳态误差幅值以及 $\delta\omega$ 稳态误差幅值之间的关系

Fig. 12 Relationship between k and magnitudes of steady-state error of σ and steady-state error of $\delta\omega$

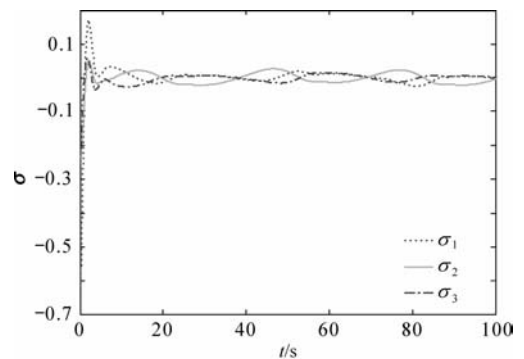


图 13 在常值干扰、转动惯量有 10% 误差、大 PID 系数情况下的姿态 σ 输出

Fig. 13 Attitude σ in presence of constant external disturbance, 10% errors in inertial matrix and large PID coefficient

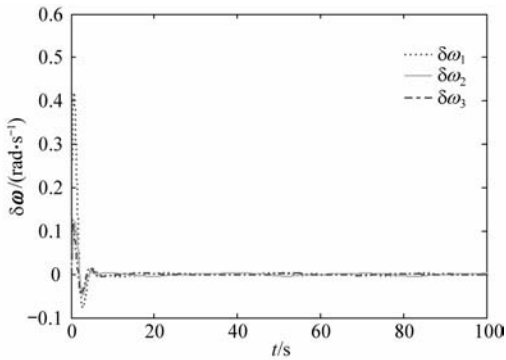


图 14 在常值干扰、转动惯量有 10% 误差、大的 PID 系数情况下的角速度误差 $\delta\omega$ 输出

Fig. 14 Angular velocity error $\delta\omega$ in presence of constant external disturbance, 10% errors in inertial matrix and large PID coefficient

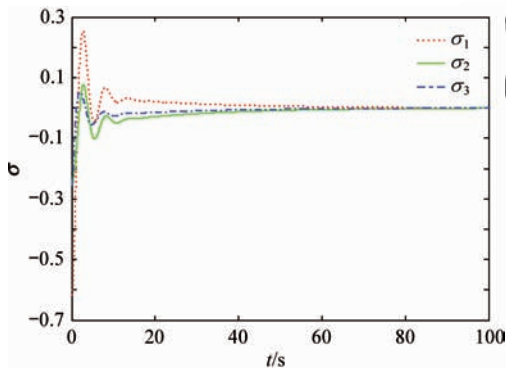


图 15 在常值干扰、转动惯量有 10% 误差、定点控制情况下的姿态 σ 输出

Fig. 15 Attitude σ of set-point control in presence of constant external disturbance and 10% errors in inertial matrix

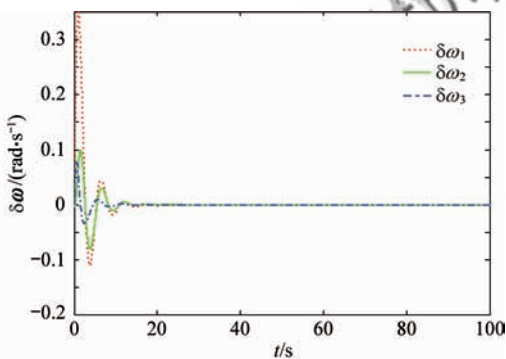


图 16 在常值干扰、转动惯量有 10% 误差、定点控制情况下的角速度误差 $\delta\omega$ 输出

Fig. 16 Angular velocity error $\delta\omega$ of set-point control in presence of constant external disturbance and 10% errors in inertial matrix

(4) 对参数时变的鲁棒性。对象转动惯量存在 10% 误差, 实际值取 $J = 0.9J_c$; 干扰为 $d = [\sin(0.01t) \quad -2 \quad -\cos(0.001t)]^T$; 其他参数不变。跟踪控制的仿真结果如图 17 和图 18 所示。

由图 10、图 11 和图 17、图 18 相比可知二者相差不大, 这说明控制器对时变干扰也具有一定鲁棒性。对比图 12 可知, 相对于干扰时变, 转动惯量误差对系统控制性能影响更大。

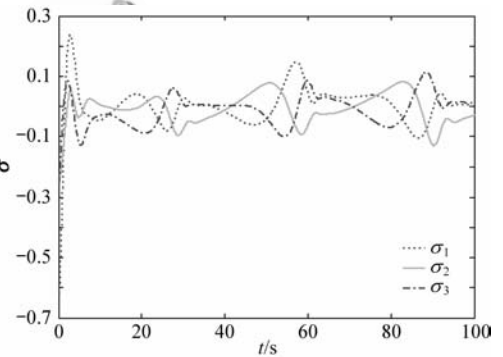


图 17 在时变干扰、转动惯量有 10% 误差情况下的姿态 σ 输出

Fig. 17 Attitude σ in the presence of time-varying external disturbance and 10% errors in inertial matrix

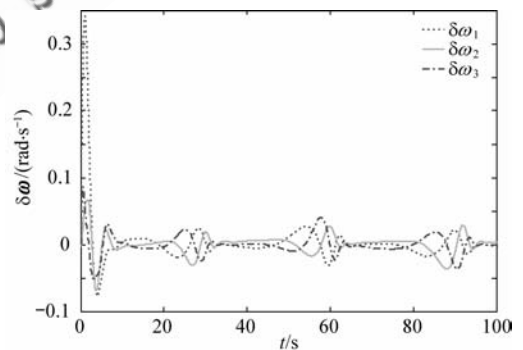


图 18 在时变干扰、转动惯量有 10% 误差情况下的角速度误差 $\delta\omega$ 输出

Fig. 18 Angular velocity error $\delta\omega$ in presence of time-varying external disturbance and 10% errors in inertial matrix

4 结 论

基于 MRP, 设计了一类具有迟滞特性的全局渐近稳定的 PID 姿态控制器。该类控制器可全

局跟踪期望姿态轨迹,无姿态转动的奇异值点,无大角度旋转现象,能抑制常值干扰,对测量噪声具有鲁棒性。

未来的工作将考虑设计一个全局渐近稳定、且对转动惯量具有很好鲁棒性的 PID 控制器。

参 考 文 献

- [1] Garber T B. Influence of constant disturbing torques on the motion of gravity-gradient stabilized satellites [J]. AIAA Journal, 1963, 1(4): 968-969.
- [2] Shrivastava S K. Satellite attitude dynamics and control in the presence of environmental torques—a brief survey [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1983, 6(6): 461-471.
- [3] Show L L, Juang J C, Lin C T, et al. Spacecraft robust attitude tracking design: PID control approach[C]//Proceedings of the 2002 American Control Conference. 2002, 1360-1365.
- [4] Uang H J, Lien C C. Mixed H_2/H_∞ PID tracking control design for uncertain spacecraft systems using a cerebellar model articulation controller[J]. IEE Proceedings Control Theory and Applications, 2006, 153(1): 1-13.
- [5] Subbarao K. Nonlinear PID-like controllers for rigid-body attitude stabilization[J]. Journal of the Astronautical Sciences, 2004, 52(1/2): 61-74.
- [6] Li C J, Ma G F. Adaptive backstepping control for attitude tracking of a spacecraft [C] // IEEE International Symposium on Industrial Electronics. 2007: 83-88.
- [7] Subbarao K, Akella R M. Differentiator-free nonlinear proportional-integral controllers for rigid-body attitude stabilization[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2004, 27(6): 1092-1096.
- [8] Mayhew C G, Sanfelice R G, Teel A R. Robust global asymptotic attitude stabilization of a rigid body by quaternion-based hybrid feedback[C]//Proceedings of Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. 2009: 2522-2527.
- [9] Fragopoulos D, Innocenti M. Stability considerations in quaternion attitude control using discontinuous Lyapunov functions[J]. IEE Proceedings Control Theory and Applications, 2004, 151(3): 253-258.
- [10] Schaub H, Junkins J L. Stereographic orientation parameters for attitude dynamics: a generalization of the Rodrigues parameters[J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1996, 44(1): 1-20.
- [11] Su J, Cai K Y. Globally stabilizing proportional-integral-derivative control laws for rigid-body attitude tracking [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics (in press).
- [12] Chen J Z, Yuan J P, Fang Q. Flight vehicle attitude determination using the modified Rodrigues parameters [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008, 21(5): 433-440.
- [13] Akella M R. Rigid body attitude tracking without angular velocity feedback[J]. Systems & Control Letters, 2004, 42(4): 321-326.
- [14] Sanfelice R G. Robust hybrid control systems[D]. Santa Barbara: University of California, 2007.
- [15] Sanfelice R G, Messina M J, Tuna S E, et al. Robust hybrid controllers for continuous-time systems with applications to obstacle avoidance and regulation to disconnected set of points[C]//Proceedings of the 2006 American Control Conference. 2006: 3352-3357.
- [16] Goebel R, Teel A R. Solutions to hybrid inclusions via set and graphical convergence with stability theory applications[J]. Automatica, 2006, 42(4): 573-587.
- [17] Khalil H. Nonlinear systems[M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002: 128.

作者简介:

宿敬亚(1981—) 女,博士研究生。主要研究方向:切换系统,姿态控制与仿真。

Tel: 010-82338767

E-mail: xiujingya@asee.buaa.edu.cn

张瑞峰(1975—) 男,博士研究生。主要研究方向:可靠飞行控制。

Tel: 010-82338767

E-mail: zhangruifeng635@gmail.com

蔡开元(1965—) 男,博士生导师。主要研究方向:软件可靠性与测试、可靠飞行控制、软件控制论。

Tel: 010-82338767

E-mail: kycai@buaa.edu.cn

Globally Stabilizing PID Attitude Control of Rigid Body Based on MRP

SU Jingya, ZHANG Ruifeng, CAI Kaiyuan *

School of Automatic Science and Electronic Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China

Abstract: For the attitude control of a rigid spacecraft, a hybrid attitude model with modified Rodrigues parameter (MRP) representation is constructed, based on which a nonlinear proportional-integral-derivative (PID) switching controller with hysteresis is proposed. The proposed controller consists of a feed-forward term, which is used to compensate for the Coriolis torque and the desired maneuver torque, and a feedback term with PID structure, which is used to eliminate the attitude trajectory tracking error. Global asymptotic stability is guaranteed by defining a particular Lyapunov function. The proposed controller is able to achieve global asymptotic tracking of the desired attitude trajectory, avoid singular orientation and unwinding, reject constant disturbance torques and it is robust against measurement noises. Simulation experiments on the large-angle attitude control of a rigid spacecraft are conducted, and the results show the asymptotical tracking property of the proposed controller as well as its avoidance of unwinding phenomenon and its robustness against constant disturbances and measurement noises.

Key words: attitude control; modified Rodrigues parameter; proportional-integral-derivative; hybrid system; hysteresis

Received: 2010-08-02; **Revised:** 2010-09-29; **Accepted:** 2010-11-29

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (60904066)

* **Corresponding author.** Tel.: 010-82338767 E-mail: kycai@buaa.edu.cn