

文章编号:1000-6793(2003)06-0507-05

具有任意边界的弹性力学梁固有特性的解法

谢文剑, 邢誉峰, 诸德超

(北京航空航天大学 固体力学研究所, 北京 100083)

Solution Methods of Inherent Characteristics of Plane Beam with Arbitrary Boundary Conditions

XIE Wen-jian, XING Yu-feng, ZHU De-chao

(The Solid Mechanics Research Center, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

摘要: 给出了可以用于求解具有任意边界条件的弹性力学梁的固有振动特性的双向展开方法和半解析方法。这两种方法均把梁看成为平面应力问题, 不对纵向位移和横向位移作任何假设, 涉及到的结构刚度和质量矩阵的元素均为显式。以简支梁固有特性求解问题为例, 通过对本文结果和解析解进行比较, 说明了给出的半解析方法和双向展开方法的精度和效率。

关键词: 梁; 平面问题; 半解析方法; 固有特性; 展开方法

中图分类号: V214.3 **文献标识码:** A

Abstract: A semi-analytical method and a two-direction expansion method, have been presented and used to find the natural vibration characteristics of two-dimension beam with arbitrary boundary conditions. In these two methods there are no any assumptions on the transverse and the longitudinal displacements along x -axis and z -axis directions, *i. e.*, the beam is considered to be in a state of plane stress, and the elements of structure stiffness and mass matrices can be given explicitly. The geometrical properties of mode shapes are investigated, and the simply supported beam is taken as an example to discuss the accuracy and efficiency of semi-analytical method and two-direction expansion method of comparing the results of the two methods and that of the analytical method.

Key words: beam; plane problem; semi-analytical method; inherent characteristics; two-direction expansion method

梁的理论主要包括 Euler-Bernoulli (欧拉 - 伯努利) 梁、Timoshenko (铁摩辛柯) 梁和各种高阶梁理论。铁摩辛柯梁理论与欧拉 - 伯努利梁理论都假设横向位移 w 沿厚度方向不变, 梁的横截面在变形后仍为平面。但铁摩辛柯梁考虑了一阶剪切变形。

Cowper^[1]于 1968 年改进了一阶铁摩辛柯剪切梁理论; Stephen 和 Levinson^[2]于 1979 年提出了考虑截面翘曲变形的二阶梁理论。此后 Reddy, Levinson 等人又相继提出了三阶、四阶等各种高阶梁理论^[3~7]。诸德超^[8]于 1991 年提出了适合于复合材料叠层结构静动力分析的截面剪切翘曲逐步修正理论。这些高阶理论在假设 w 沿厚度方向不变的基础上, 对 u 沿厚度方向的变化做出各种假设。若考虑碰撞等瞬态振动问题时, 有必要考虑横向正应变, 即考虑 w 沿着厚度方向的

变化。

Pagano^[9]和 Srinivas^[10]分别得到了简支梁的静力学问题和动力学问题的弹性力学精确解。虽然弹性力学解法难以用于除简支之外的其他边界的情况, 但其结果可以用于考察其他解法的精度。

用弹性力学平面应力理论来分析梁的有关问题时, 只有对两端简支这一特殊情况才可以获得解析解。为了分析非两端简支梁的静、动力学特性, 本文研究了可以用于研究具有任意边界弹性力学平面梁问题的半解析方法和双向展开方法。

半解析方法和双向展开方法对纵向位移 u 和横向位移 w 在厚度 z 方向和 x 方向均不作任何假设。本文首先推导了对于均质各向同性材料的半解析方法和双向展开方法的有关公式, 然后以两端简支梁的固有特性求解问题为例, 对用本文方法得到的结果和解析解进行了比较, 说明了半解析方法和双向展开方法的精度和效率。

1 半解析方法

平面应力问题本构方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= C_{11} x + C_{13} z \\ z &= C_{13} x + C_{33} z \\ z_x &= C_{55} z_x \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $C_{11} = E / (1 - \nu^2)$; $C_{13} = E \nu / (1 - \nu^2)$; $C_{33} = C_{11}$ 和 $C_{55} = G$; E, G 和 ν 分别为材料的杨氏模量、剪切模量和泊松比。梁的长度为 l , 高度为 h , 见图 1。

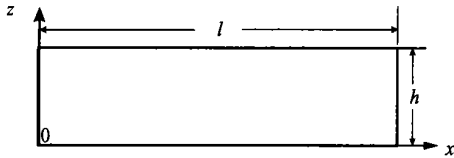


图 1 梁的坐标图

Fig. 1 The beam and its coordinate axis

将梁的模式函数 u 和 w 在 z 向展开为 C^0 类升阶谱形函数, 即

$$\left. \begin{aligned} u(x, z) &= f^T u \\ w(x, z) &= g^T w \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $\xi = (2z - h) / h$; $\eta = (2x - l) / l$, 列向量 f, g, u 和 w 的元素分别为 $f_i(\eta), g_j(\xi), u_i(\eta)$ 和 $w_j(\xi) (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M)$ 。 $u_i(\eta)$ 和 $w_j(\xi)$ 为待求函数, 而

$$f_i(\eta) = \phi_i(\eta), \quad g_j(\xi) = \psi_j(\xi) \quad (3)$$

式中: ϕ 为通过 Legendre 正交多项式得到的 C^0 类升阶谱位移形函数^[11]。

$$\phi_1(\eta) = \frac{1}{2}(\eta - 1), \quad \phi_2(\eta) = \frac{1}{2}(\eta + 1) \quad (4a)$$

$$\phi_m(\eta) = \sum_{n=0}^{m/2} \frac{(-1)^n (2m - 2n - 3)!!}{2^n n! (m - 2n)!} \eta^{m-2n} \quad (4b)$$

式中: $(-1)!! = 1, m!! = m(m-2)\dots(2 \text{ 或 } 1), 0!! = 1, (-1)!! = 1, m/2$ 只取整数部分, $m > 2$ 。

平面应力梁的势能函数的幅值 U_{max} 和动能系数 T_0 为

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^h \left\{ u_{,x}^2 C_{11} + w_{,z}^2 C_{33} + \right. \quad (5a)$$

$$\left. 2 u_{,x} w_{,z} C_{13} + (u_{,z} + w_{,x})^2 C_{55} \right\} dz dx$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^h \left\{ u^2 + w^2 \right\} dz dx \quad (5b)$$

根据式(2)和 Rayleigh 商 $\lambda_{max} = U_{max} / T_0$, 经过变分运算后得到关于 u, w 的二阶欧拉方程。引入 $p = Du, q = Dw (D = \partial / \partial x$ 为微分算子), 把二阶欧拉方程变为关于 u, w, p, q 的一阶欧拉方程, 也就是系统的状态方程

$$AX = DBX \quad (6)$$

式中: $X^T = \{u^T, p^T, w^T, q^T\}$, 而非对称矩阵 A 和 B 的子矩阵为 $A_{ij}, B_{ij}, (i, j = 1, 2, 3, 4)$ 。非零子矩阵 A_{ij}, B_{ij} 包括

$$A_{11} = K_{55} H_{11}^{uu} l / (2h) - \overline{H}_{00}^{uu}$$

$$A_{14} = -K_{13} H_{01}^{uq} + K_{55} H_{10}^{uq}$$

$$A_{22} = E^{pp}, \quad A_{44} = E^{qq}$$

$$A_{32} = K_{13} H_{10}^{wp} - K_{55} H_{01}^{wp}$$

$$A_{33} = K_{33} H_{11}^{ww} l / (2h) - \overline{H}_{00}^{ww}$$

$$B_{12} = 2 H_{00}^{up} h / l, \quad B_{21} = E^{pu}$$

$$B_{34} = 2 K_{55} H_{00}^{wq} h / l, \quad B_{43} = E^{qw}$$

式中: $K_{ij} = C_{ij} / C_{11}$; $\overline{H}_{00} = \int_0^1 \int_0^1 H_{00} d\xi d\eta = 2hl / (2C_{11})$; ω 为系统固有角频率; ρ 为质量密度; E 为对角单位矩阵, 矩阵 H, E 的上标“ ab ”表示维数, 即列向量 a 和 b 的维数分别为对应矩阵的行数和列数, 如若“ ab ” = uq , 则 H 的行数和列数分别为 N 和 M 。而 H 的元素为

$$H_{11}(i, j) = 2 \int_{-1}^1 \phi_i(\eta) \phi_j(\eta) d\eta \quad (7a)$$

$$H_{00}(i, j) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \phi_i(\eta) \phi_j(\eta) d\eta \quad (7b)$$

$$H_{01}(i, j) = \int_{-1}^1 \phi_i(\eta) \phi_j(\eta) d\eta \quad (7c)$$

并且, $H_{01} = H_{10}^T$ 。文献[11]中给出了 H 矩阵所有元素的显式, 无须进行数值积分计算, 从而避免了形成质量矩阵和刚度矩阵时数值积分带来的误差。式(6)相当于把求解关于 u, w 的二阶微分方程组的本征值问题变为广义特征值的求解问题。通过求解广义特征值问题(式(6))就可以得到特征向量 X 和特征值 D , 进而有

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= G_u(x) C, \quad w(x) = G_w(x) C \\ p(x) &= G_p(x) C, \quad q(x) = G_q(x) C \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: $C^T = \{C_1, C_2, \dots, C_{2(N+M)}\}$ 为待定参数, 需要根据梁两端的边界条件来确定, 矩阵 G 的元素为

$$G_{lk, u}(x) = X_{l, k} e^{D_k x}, \quad G_{lk, w}(x) = X_{k, 2N+l} e^{D_k x}$$

$$G_{lk, p}(x) = X_{k, N+l} e^{D_k x}, \quad G_{lk, q}(x) = X_{k, 2N+M+l} e^{D_k x}$$

其中: X_l^k 为与特征值 D_k 相对应的特征向量 X_k 的第 l 个元素, $k = 1, \dots, 2(N+M)$ 。对 G_u 和 $G_p, l = 1, \dots, N$; 对 G_w 和 $G_q, l = 1, \dots, M$ 。表 1 给出了边界条件。

将式(8)代入表 1 给出的边界条件, 就可以得到关于 C 的齐次方程组

$$GC = 0 \quad (9)$$

表 1 半解析方法中梁的边界条件
Table 1 Boundary conditions of beam for the semi-analytical method

强制条件	自然边界条件
简支端 $w = 0$	$H_{00}^{wp} = 0$
固定端 $u = 0$ $w = 0$	
自由端	$2 K_{11} h l^{-1} H_{00}^{wp} p + K_{13} H_{01}^{wv} w = 0$ $2 h l^{-1} H_{00}^{wq} q + H_{01}^{wu} u = 0$

式中:系数矩阵 G 取决于梁的边界条件,若其行列式为零,则对应的频率就是结构的固有频率,由式(2)可以得到对应该频率的模态函数。

这种方法不局限于简支梁,适合其他任何边界条件。这种方法的特点是将模态函数沿着 z 向的分布规律展开为升阶谱形函数的形式,沿着 x 方向的分布规律则由微分方程来确定,并且严格满足 x 方向的边界条件,因此这种方法为一种半解析方法。它不但适用于各向同性材料,还可以应用于正交各向异性复合材料。

2 双向展开方法

该方法把模态函数 u 和 w 在 z 方向(横向)和 x 方向(纵向)均展开成为已知的 C^0 类升阶谱形函数,即

$$\left. \begin{aligned} u(,) &= U^T \\ w(,) &= W^T \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中:列向量 的元素 $ij = \phi_i() \phi_j() (i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, N)$ 为两个一维 C^0 类升阶谱形函数的乘积; I, N 分别为模态函数沿着 x 和 z 方向的展开阶次; U, W 为广义位移列向量。值得注意的是,这里列向量的下标用了两个整数。 U_{ij}, W_{ij} 与 ij 相对应, U_{1j}, W_{1j} 和 $U_{2j}, W_{2j} (j = 1, 2)$ 表示梁两端的结点位移。根据式(10)和 Rayleigh 商得到如下广义特征值问题

$$KX = MX \quad (11)$$

其中: $X^T = \{U^T \ W^T\}$; K, M 为无因次刚度矩阵和质量矩阵; $\omega = \sqrt{2hl / C_{11}}$ 为无因次频率。并且 K, M 的所有元素具有显式,这为减少数值计算误差和建立自适应算法提供了条件。

$$K = \begin{bmatrix} K_x + K_{zz} & K_{xz} + K_{xz} \\ K_{xz}^T + K_{xz}^T & K_z + K_{xx} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_z \end{bmatrix}$$

令 $r = (i - 1)N + m, c = (j - 1)N + n; i, j = 1, \dots, I; m, n = 1, \dots, N$ 。刚度矩阵 K 和

质量矩阵 M 的子矩阵的元素分别为

$$\left. \begin{aligned} k_{r,c}^x &= H_{11}(i, j) H_{00}(m, n) h / l \\ k_{r,c}^z &= K_{33} H_{00}(i, j) H_{11}(m, n) l / h \\ k_{r,c}^{xz} &= K_{13} H_{10}(i, j) H_{01}(m, n) \\ k_{r,c}^{zz} &= K_{55} H_{00}(i, j) H_{11}(m, n) l / h \\ k_{r,c}^{xx} &= K_{55} H_{11}(i, j) H_{00}(m, n) l / h \\ k_{r,c}^{xz} &= K_{55} H_{01}(i, j) H_{10}(m, n) \\ m_{r,c}^x &= H_{00}(i, j) H_{00}(m, n) \\ m_{r,c}^z &= H_{00}(i, j) H_{00}(m, n) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中:矩阵 H 元素的计算式同式(7),同样具有显式。 $H(i, j)$ 为对 x 进行积分得到的结果,而 $H(m, n)$ 为对 z 进行积分得到的结果。

在式(11)中引入梁的位移边界条件(见表 2,表中 $j = 1, 2, \dots, N$),求解该特征问题就可以得到特征向量和特征值,进而根据式(10)得到系统的模态函数。这种方法实际上是升阶谱有限元方法, I, N 取值的大小决定了这种方法的精度和计算量。

表 2 双向展开方法中的位移边界条件

Table 2 Displace boundary conditions for the two direction expansion method

	固支端	简支端
边界条件	$U_{1j} = W_{1j} = 0$	$W_{1j} = 0$

3 数值分析

本文旨在研究用半解析方法和双向展开方法在计算一定数量的频率时的展开阶次和精度的关系。显然展开阶次愈高,计算量愈大。

考虑简支梁,其无量纲参数如下: $h = 1$, 宽度 $b = 1, \nu = 0.002, E = 2.2 \times 10^6, \rho = 0.3$, 长高比 $l / h = 4$ 。对于简支梁,可以用弹性力学的方法得到模态函数的解析形式

$$\left. \begin{aligned} u(x, z) &= \cos(m x / l) \cos(n z) \\ w(x, z) &= \sin(m x / l) \sin(n z) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中: m 为一整数,代表模态在 x 方向的半波数, n 要通过解微分方程来确定,对任意一个 m , 可以获得无穷多个固有频率 $\omega_{mn} (n = 1, 2, \dots)$, 并且可以根据式(13)确定模态函数。

对于简支梁,对应同一个半波数 m , Euler 梁只有一个固有频率,对应的模态是弯曲模态; Timoshenko 梁有两个固有频率,对应的模态一个以弯曲为主,一个以剪切为主;而弹性力学平面梁将有无限多个固有频率,其中不同的频率对应不

同的“厚度模态”,第1个频率 m_1 代表“弯曲模态”,其他为“拉伸模态”、“转动模态”及各种组合模态,参见图2。

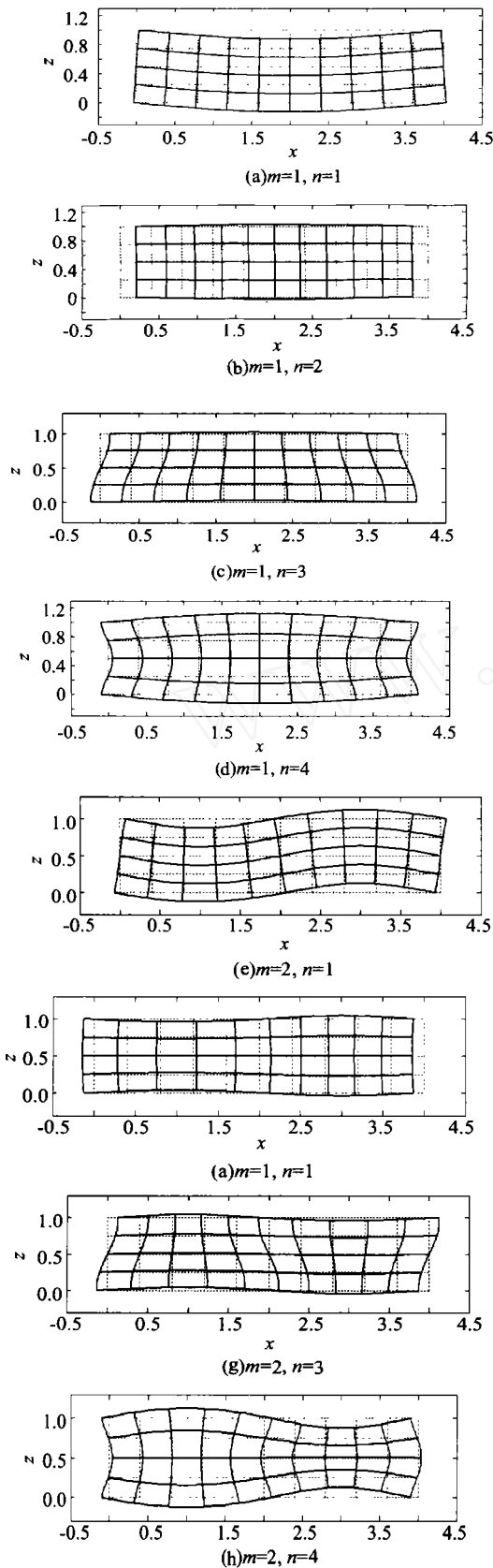


图2 简支梁模态示意图

Fig.2 Mode sketches of beam

在下面频率的数值计算中,双向展开法公式(10)中 l 始终等于10,半解析方法中 $N = M$ 。表3给出用欧拉梁、铁摩辛柯梁和弹性力学3种方法计算得到的频率。表4中频率的精确值是用弹性力学方法得到的,具体数值见表3。表4给出了用半解析方法(SAM)和双向展开方法(TEM)求得和精确频率相同(取前10位有效数字进行比较)的频率时所需要的 z 向分布函数展开次数 N 。

表3 梁的固有频率(m_n)的比较

Table 3 Comparisons of natural frequencies m_n of beam

	n	$m = 1$	$m = 2$
欧拉梁	1	5905.891040	23623.56416
	2	5439.289456	18261.73677
铁摩辛柯梁	1	5396.320123	17890.48034
	2	77456.20633	92281.85287
弹性力学梁 (前4阶)	1	25988.87227	51510.32425
	2	70908.55749	85223.46363
	3	106459.6220	103617.1102
	4		

从表4可以看出,若 x 方向半波数 m 不变,则随着的 n 增加,也就是厚度模态的阶次愈来愈高时, N 基本上越来越大, $n = 2$ 对应的模态性质主要为拉伸模态,厚度方向特征不明显,因此 N 值相对较小。若 n 不变,则随着 m 的增加, N 基本上保持不变。

表4中对应双向展开方法的部分整数为 $N(\cdot)$,其中实数“ \cdot ”表示当 N 等于或大于当前值时用双向展开法求得的频率值,它的前10位有效数字还不能和精确解的相同。之所以当 $m = 2$ 时出现了这种现象,是因为此时模态函数在 x 方向为2个半波,而这里假设 $l = 10$ 已经不能在给定精度上逼近2个半波,但频率不同的位数在最后3位。随着 m 的增加($m \geq 3$),在 x 方向继续用 $l = 10$ 进行计算将导致越来越大的误差。

表4 两种方法展开的次数 N

Table 4 The number N of SAM and TEM

m_n (rad/s) 的 精确解,见表3	$l/h = 4$	
	SAM	TEM
11	7	7
12	6	6
13	9	9
14	10	10
21	7	8(17890.48064)
22	7	7(51510.32550)
23	9	9(85223.46257)
24	10	10

随着 m 和 n 的增大,模态函数在 x 和 z 两个方向的半波数愈来愈大,如果精度要求不变,则需要的 I 和 N 也就愈来愈大。

4 结 论

本文给出了可以用于求解具有任意边界条件的弹性力学梁的固有特性的半解析法和双向展开法,以简支梁为例,把本文结果与精确解进行了比较,结果说明了本文方法的有效性。半解析方法的解严格满足梁两端的边界条件,其精度和效率都由 N 和 M 来决定。若同时增加 I 和 N ,用双向展开方法同样可以得到满足给定精度的解, I 和 N 的选择完全取决于待解问题的性质和要求。在双向展开方法中,结构刚度和质量矩阵具有继承性,并且其元素具有显式,解决了形成刚度矩阵和质量矩阵的积分误差问题,因此双向展开方法适合于发展成为自适应算法。

通过对模态几何特征的分析可以清楚地看到,厚度的影响是值得重视的。尤其在研究瞬态响应等高频振动问题或短梁动态响应问题时,有必要考虑梁横向位移在厚度方向的变化,关于厚度效应对冲击载荷的影响将在另文给出。

参 考 文 献

- [1] Cowper G R. On the accuracy of Timoshenko's beam theory [J]. Journal of Engineering Mechanics Division, American Society of Civil Engineers, 1968, 94: 1447 - 1453.
- [2] Stephen N G, Levinson M. A second order beam theory[J]. Journal of Sound and Vibration. 1979, 67(3): 293 - 305.
- [3] Reddy J N. A simple higher order theory for laminated composite plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 1984, 51(4): 745 - 752.
- [4] Levinson M. A new rectangular beam theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 1981, 74(1): 81 - 87.

- [5] Levinson M. Further results of a new beam theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 1981, 77(4): 440 - 444.
- [6] Bickford W B. A consistent higher order beam theory[J]. Developments in Theoretical and Applied Mechanics, 1982, 11: 137 - 142.
- [7] Reddy J N. Energy and variational methods in applied mechanics[M]. New York: John Wiley, 1984. 389 - 406.
- [8] Zhu D C, Huang C Y. A new mechanical model for composite laminate structures [A]. In: Proceedings of the Fourth Conference of Asian-Pacific Congress on Strength Evaluation [C]. Beijing, China. 1991. 720 - 725.
- [9] Pagano N J. Exact solution for composite laminates in cylindrical bending[J]. Journal of Composite Material, 1969, 3: 398 - 410.
- [10] Srinivas S, Rao A K. Some results from an exact analysis of thick laminates in vibration and buckling[J]. Journal of Applied Mechanics, 1970, 37(3): 868 - 870.
- [11] 诸德超. 升阶谱有限元法[M]. 北京:国防工业出版社, 1993. 30 - 36.
(Zhu D C. Hierarchical finite element method[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1993. 30 - 36.)

作者简介:



谢文剑(1977 -) 男,江西赣州人,北京航空航天大学固体力学研究所博士研究生,主要从事结构动力学分析方法研究,联系电话 010-82317517, xwjbuua@sohu.com。



邢誉峰(1964 -) 男,吉林长春人,北京航空航天大学固体力学研究所教授,主要从事结构动力学、复合材料结构力学和计算力学等方面研究,联系电话 010-82317517, yfxing@public.fhnet.cn.net。

(责任编辑:李铁柏)