

文章编号: 1000-6893(2003)04-0323-05

# 空间柔性网)膜结构分析的数学规划算法

张洪武, 汪 敏, 郭 旭

(大连理工大学 工程力学系 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

## Mathematical Programming Method for Numerical Analysis of Flexible Net-Membrane Structures

ZHANG Hongwu, WANG Min, GUO Xu

(Department of Engineering Mechanics, State Key Lab. for Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**摘 要:** 提出了以参数变分原理为基础的数学规划算法, 以计算分析太空用品中网-膜结构起皱现象。针对网状柔性结构分析, 算法的原理是将结构化成多个具有一定非线性本构关系的杆单元, 并在此基础上进行杆系结构非线性分析的规划算法构造, 可以较好地模拟网状柔性结构的起皱性质。而对于一般的膜结构, 则构造了用于直接分析的膜单元相对应的本构模型, 并在此基础上构造问题的求解算法。不同于常规的数值计算方法, 提出的算法不依赖于应力的迭代过程。参数变分原理和数学规划算法的应用, 使本算法可以很有效地分析预测网-膜起皱的区域、模式和应力分布, 从而为解决网-膜结构起皱问题提供依据。给出的数值算例说明了方法正确与有效性。

**关键词:** 柔性结构; 规划算法; 有限元法

**中图分类号:** O221; V214.9 **文献标识码:** A

**Abstract:** This paper gives a detailed introduction to the development of a new method for numerical simulation of wrinkled behavior of space flexible structures. The flexible net-structure is modeled as a network of bars with a special nonlinear constitutive relationship. Based on the parametric variational principle, a mathematical programming method is developed for the nonlinear analysis of the network of bars. For the analysis of the membrane structure, a new method is developed to simulate directly the mechanic behaviors of the structure. The method is based on the finite element method with membrane elements and is constructed in terms of the corresponding constitutive relationship, from which the nonlinear behavior of the structure can be truly simulated. Compared with the conventional methods, the new method can provide a good convergence property and hence can obtain accurate predictions of wrinkled regions/patterns and stress distributions of the membrane structures. Numerical examples are presented and illustrate the validity and efficiency of the method proposed.

**Key words:** flexible structure; mathematical programming method; the finite element method

各式各样的太空设备, 如新一代太空望远镜、带可伸缩光圈的人造雷达、太阳能配置、太阳能帆和反射镜等, 都是以网状或薄膜为基本结构。一般网)膜只具有很小的抗压能力, 因而当负应力出现时, 网-膜会起皱。起皱是一种常见的变形结果, 它不仅降低了太空网)膜结构的可靠性与影响工作情况, 还会引起故障, 甚至破坏系统。所以, 能够正确预测网)膜结构起皱的形式和范围, 对于不断提高太空用品的安全性是很重要的。

鉴于问题的重要性, 力学工作者不断地研究

网-膜起皱现象。其大致可以分为张力场理论、部分量化起皱膜单元的构造、松弛应变能密度0概念的引入以及有限元迭代分析算法的研究等。早期代表性的工作由文献[1]给出。文献[2]则开展了问题分析的数学规划算法的研究工作。

本文提出了一种新的解决方法, 即以参数变分原理为基础的算法<sup>[3]</sup>, 参数变分原理已在多方面得到成功应用, 包括对弹性与弹塑性接触问题的分析<sup>[3]</sup>、热结构耦合接触分析<sup>[4]</sup>、动力弹塑性与软化分析<sup>[5]</sup>、以及非线性多尺度计算<sup>[6]</sup>。本文则引入考虑组成网-膜结构的材料凹性强化本构关系, 并以此为基础对膜结构分析的数学规划算法进行系统的推导与构造。构造出的算法可以很好的模拟和分析网-膜结构部分起皱现象。

收稿日期: 20020905; 修订日期: 200212202

基金项目: 国家杰出青年基金与自然科学基金(50178016, 10225212), 国家基础性发展规划 973 项目(G19990328)资助课题

文章网址: <http://www.cnki.net/cn/jkxb/2003/04/0323/>

### 1 单折点本构模型

如图1所示结构,以此结构分析来对本文方法的基本原理进行说明。结构中的各杆受拉和受压的刚度不同,且呈现强化现象。图2中  $\lambda$  表示杆件材料应变;  $F$  为应力;  $K_i$  为材料弹性模量。

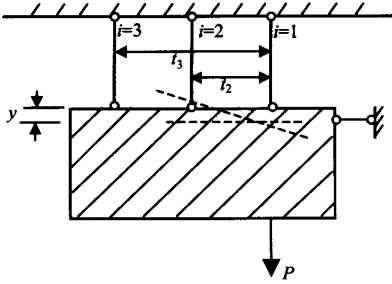


图1 杆系结构  
Fig1 Truss structure

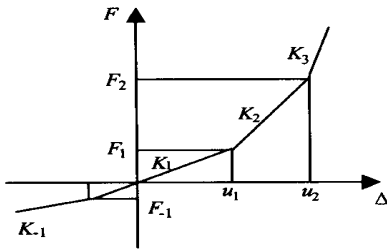


图2 多折点强化本构模型

Fig2 Mult2point hardening constitutive model

为说明问题清楚起见,首先讨论单折线模型,即  $K_{-1}, K_1$  两种情况。杆件的本构关系可以描述为

$$\lambda = \begin{cases} F/K & \text{当 } F > 0 \\ F/K_{-1} & \text{当 } F \leq 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

如果以受压刚度为基本刚度进行求解,显然当杆件是受压状态时,获得的结果也正是问题的解。但杆件可能是受拉的,则应有(见图3)

$$\lambda = F/K_{-1} - K \quad (2)$$

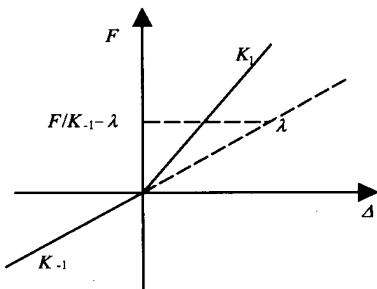


图3 杆件的附加伸长量

Fig3 A complementary amount of the elongation of a bar

其中:  $K$ 是附加伸长量,可表示为

$$K = F/K_{-1} - F/K_1 \quad (3)$$

且有

$$F = K_{-1}(\lambda + K) \quad (4)$$

令

$$f = F - KH, \quad H = \frac{K_{-1}K_1}{K_{-1} - K_1} \quad (5)$$

如满足  $f = 0$ , 则杆件受拉;  $K \geq 0$ ; 而当  $f < 0$  时, 则杆件受压, 且  $K = 0$ , 即

$$K = \begin{cases} \geq 0, & f_i = 0 \\ = 0, & f_i < 0 \end{cases} \quad (6)$$

这就是杆件不论受拉或受压时的本构关系。

### 2 多折点本构模型的描述

下面回到图2所示的具有一般意义的本构模型,不失一般性,对于压缩方向,只考虑一个折点。这里取  $K_{-1}$  为基本弹性模量,容易获得以下方程。

对于拉伸方向:

$$\lambda = \frac{F}{K_{-1}} - (F - F_1)(1/K_{-1} - 1/K_2) \quad \text{当 } F_1 \leq F \leq F_2 \text{ 时}$$

$$\lambda = F/K_{-1} - (F - F_1)(1/K_{-1} - 1/K_2) - (F - F_2)(1/K_2 - 1/K_3) \quad \text{当 } F_2 \leq F \leq F_3 \text{ 时}$$

$$\lambda = F/K_{-1} - (F - F_1)(1/K_{-1} - 1/K_2) - \dots - (F - F_N)(1/K_N - 1/K_{N+1}) \quad \text{当 } F_N \leq F \leq F_{N+1} \text{ 时} \quad (7)$$

对于压缩方向:

$$\lambda = F/K_{N+1} - (F - F_{-1})(1/K_{-1} - 1/K_{-1}) \quad \text{当 } F \leq F_{-1} \text{ 时} \quad (8)$$

定义

$$F = K_{-1}(\lambda + K) \quad (9)$$

对于拉伸方向:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= (F - F_1)(1/K_{-1} - 1/K_2) \\ K_2 &= (F - F_2)(1/K_2 - 1/K_3) \\ &\dots \\ K_N &= (F - F_N)(1/K_N - 1/K_{N+1}) \\ K &= K_1 + K_2 + \dots + K_N \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

对于压缩方向:

$$\left. \begin{aligned} K_{-1} &= (F - F_{-1})(1/K_{-1} - 1/K_{-1}) \\ K &= K_{-1} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

又定义

$$\left. \begin{aligned}
 f_1 &= F - F_1 - K_1 H_1, \\
 f_2 &= F - F_2 - K_2 H_2, \\
 &\dots \\
 f_N &= F - F_N - K_N H_N, \\
 f_{-1} &= -F + F_{-1} + K_{-1} H_{-1}, \\
 H_1 &= \frac{K_1 K_2}{K_2 - K_1}, H_2 = \frac{K_2 K_3}{K_3 - K_2}, \dots, \\
 H_i &= \frac{K_N K_{N+1}}{K_{N+1} - K_N}, H_{-1} = \frac{K_{-1} K_1}{K_{-1} - K_1}
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

容易验证问题求解的本构方程可统一归结为下列问题

$$\left. \begin{aligned}
 F &= K_1(S + K) \\
 K &= K_1 + K_2 + \dots + K_N + K_{-1} \\
 f_1 &< 0, K_1 = 0; f_1 = 0, K_1 \setminus 0 \\
 f_2 &< 0, K_2 = 0; f_2 = 0, K_2 \setminus 0 \\
 &\dots \\
 f_N &< 0, K_N = 0; f_N = 0, K_N \setminus 0; \\
 f_{-1} &< 0, K_{-1} = 0; f_{-1} = 0, K_{-1} \setminus 0
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

引入松弛变量  $T_i$ , 问题成为

$$f_i + T_i = 0, K \setminus 0, T_i \setminus 0, K T_i = 0 \quad (14)$$

### 3 网系结构计算的方法与基本原理

仍然以图 1 所示结构为例, 并为描述方便, 仍取单折点本构模型。此结构分析要满足 3 个方面的要求。

平衡条件

$$\sum_i N_i - P = 0, \sum_i N_i t_i = 0 \quad (15)$$

其中:  $N_i (i = 1, 2, 3)$  为杆件内力;  $t_1 = 0, t_2, t_3$  表示杆件距离, 其他参数见图 1 所示。

连续条件

$$S_i = y - H t_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (16)$$

本构关系由式 (6) 给出。

对于问题的求解, 可以建立参数最小势能原理的变分方程。 $y$  和  $H$  满足连续条件, 用  $(y, H)$  为状态变量写出系统的总势能

$$\begin{aligned}
 F(y, H, K) &= \sum_i \left[ \frac{1}{2} K_{-1i} (y - H_i)^2 \right] + \\
 &\sum_i \left[ + K K_{-1i} (y - H_i) + \frac{1}{2} K_{-1i} K_i^2 \right] - P y
 \end{aligned} \quad (17)$$

参数变分原理的策略是作  $F$  对状态变量  $H$  和  $y$  的变分来给出 2 个平衡方程, 而让控制变量  $K$  不参加变分。这样得出的平衡方程中含有  $K$  留待

状态方程 (6) 来决定, 以满足本构关系。既然  $K$  不参加变分, 则式 (18) 方括号中的最后一项可以略去。于是, 满足平衡、连续和本构关系的解将由下列二次规划给出

$$\min. F [K(\#)] \quad (18a)$$

$$s. t. f_i(y, H, K) + T_i = 0, T_i K = 0, T_i, K \setminus 0 \quad (18b)$$

在这个二次规划中, 状态变量  $y$  和  $H$  参加  $F$  的变分, 3 个控制变量  $K$  不参加变分, 但应满足代表本构关系的约束, 所以它们虽不参加变分, 但控制着整个变分过程。

### 4 膜单元分析的本构模型与有限元方程

对于连续膜结构, 一种简便的方法是将连续结构通过等效的手段简化成网体结构模型, 并进一步利用上面的方法进行求解, 这种方法可以较好地模拟膜的起皱现象。自然更合理与精确的办法是采用膜单元进行直接分析。以下论述针对膜结构分析的本构方程的建立问题。

由上面的表述可知, 本文以参变量变分原理为基础的规划算法方程的一般形式由式 (19) 给出, 对于不同的问题, 主要的区别与关键问题就是建立针对不同的模型的本构方程, 对于膜结构, 应采用与之相应的合理的屈服准则和流动准则。由于膜结构本构关系的特殊性, 此处建立该类材料对应的屈服准则, 且为描述方便, 以拉伸和压缩方向各为一个折点的本构模型为例对方法进行说明, 而且假设该问题为塑性势面与屈服面重合的相关联流动问题。定义如下:

在拉伸方向:

$$\left. \begin{aligned}
 f_1 &= R_1 - R_1^* - K_1 H_1 \\
 f_2 &= R_3 - R_3^* - K_1 H_1
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

在压缩方向:

$$\left. \begin{aligned}
 f_1 &= -R_1 + R_1^* + K_1 H_1 \\
 f_2 &= -R_3 + R_3^* + K_1 H_1
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中:  $R_1, R_3$  为主应力。

显然只要满足  $f_1$  和  $f_2$  中的任何一个屈服函数, 膜单元就进入了塑性区。而一旦规定了主应力  $R_1 \setminus R_3$ , 就可以在计算机上的实现过程中简化: 认为在拉伸方向只采用屈服函数  $f_1$ , 而在压缩方向只采用屈服函数  $f_2$ , 即

$$\text{拉伸方向: } f_1 = R_1 - R_1^* - K_1 H_1 \quad (21)$$

$$\text{压缩方向: } f_{-1} = -R_3 + R_3^* + K_1 H_1 \quad (22)$$

以上是以拉伸和压缩方向有一个折点的本构

模型为例,对于多折点情况,根据前面的描述很容易得出,此处不再赘述。有了屈服准则,即可建立仅含有位移增量和控制变量的互补方程。对问题进行有限元离散,可以获得

$$F = \frac{1}{2}u^T Ku - (t - UK)^T u \quad (24)$$

$$Cu - MK - d + M = 0, \bar{M} K = 0, \bar{M} K \setminus 0 \quad (25)$$

其中:

$$K = E_c Q_c N_i^T E N_i d 8, U = E_c Q_c E N_i^T d 8,$$

$$t = E_c \left[ Q_c N_i^T b d 8 + Q_c N_i^T p d S \right],$$

$$C = E_c Q_c \frac{9f}{9D} d 8 = E_c Q_c E_1 N_i d 8 = U^T,$$

$$M = E_c Q_c \frac{9f}{9K} d 8, d = - E_c Q_c f_{oc} d 8$$

这里未作说明的量其物理意义均同弹性力学与杆系有限元分析中的记法。K, C 与 M 是常数矩阵,不随增量步变化。

经过进一步的推导,可得问题求解的线性互补方程

$$M (M - CK^{-1}U)K = -CK^{-1}t + d$$

$$K^T M = 0, K, M \setminus 0 \quad (26)$$

这就是问题求解的基本方程。

上述问题求解的表达式是基于全量形式的,注意到问题的非线性弹性特点,具体应用当中应采用增量表达式。

### 5 数值算例

**例 1** 一个大小为 7m @5m 矩形网状结构,如图 4 所示,除了两个角自由外四边夹支,在角点自由处作用力  $p_1 = p_2 = 01015kN$ 。由 444 个杆单元组成网结构用来模拟膜结构,其本构关系如图 3,杆件有很小的抗压极限应力值  $R_0 = -011kPa, K_{-1} = 0$ ,其  $K_1$  对应的杨氏模量  $E_1 = 10010kPa$ 。水平和垂直方向杆的截面积为  $A_1, 45$  度方向杆的截面积为  $A_2$ 。其中杆的截面积为:  $A_1 = 110 @10^3 m^2, A_2 = 11372 @10^3 m^2$ 。

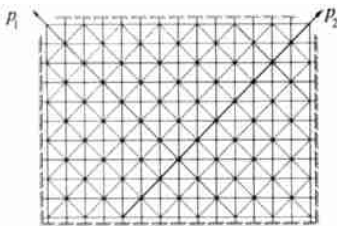


图 4 杆系网状结构

图 5、图 6 给出该网状柔性结构在不同载荷下的压力区分布计算结果,其中涂黑杆件表示已经进入受压状态,具体体现则是会出现起皱现象。

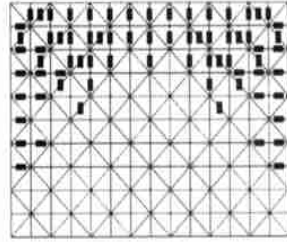


图 5  $p_1 = p_2 = 01005kN$  时的结果

Fig 5 Numerical results when  $p_1 = p_2 = 01005kN$

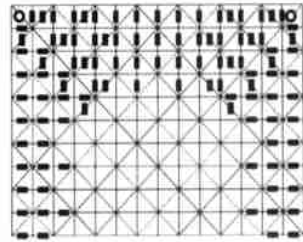


图 6  $p_1 = p_2 = 01015kN$  时的结果

Fig 6 Numerical results when  $p_1 = p_2 = 01015kN$

**例 2** 一个大小为 5m @315m 矩形网状结构,与图 4 相似,除了两个角自由外四边夹支,在角点自由处作用力  $p_1 = p_2$ 。由 227 个杆单元组成网结构用来模拟膜结构,抗压极限应力值  $R_0 = -011kPa$ 。水平和垂直方向杆的截面积为  $A_1 = 110 @10^3 m^2, 45$  度方向杆的截面积为  $A_1 = 11372 @10^3 m^2$ ,本构关系采用如图 2 所示的多折点本构模型,但杆件取很小的抗压极限应力值  $R_0 = -011kPa$ ,且  $K_{-1} = 0$ 。采取了 2 个计算方案: 1 拉伸方向只有一个折线的情况:  $E_1 = 100kPa, R_1 = 7107kPa, E_2 = 1703kPa$ ; 2 拉伸方向有两个折线的情况:  $E_1 = 100kPa, R_1 = 7107kPa, E_2 = 690kPa, R_2 = 54188kPa, E_3 = 2342kPa$ 。

由计算可知当载荷为  $p_1 = p_2 = 0110kN$  时,两种本构模型的屈服情况如图 7 和 8 所示。可见两种本构关系引起的屈服情况的变化不是很大,但是拉伸区的杆件的应力值则发生较大的变化。

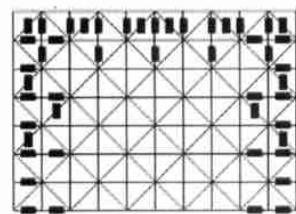


图 7 本构模型 1 对应的结果

Fig 7 Numerical results with constitutive model 1

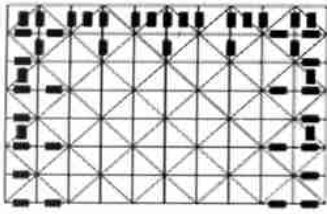


图8 本构模型2对应的结果

Fig 8 Numerical results with constitutive model 2

例 3 一个大小为  $7\text{m} \times 5\text{m}$  的矩形膜结构, 厚度为  $0.01\text{m}$ , 与图 4 相似, 除了两个角自由外四边夹支, 在角点自由处作用力  $p_1 = p_2$ 。但采用 140 个膜单元, 每一个膜单元都具有很小的抗压极限应力值, 令  $R_0 = -0.1\text{kPa}$ , 本构关系曲线同例 1, 其杨氏模量  $E_1 = 10010\text{kPa}$ 。如图 9 给出  $p_1 = p_2 = 0.10\text{kN}$  时的计算结果。

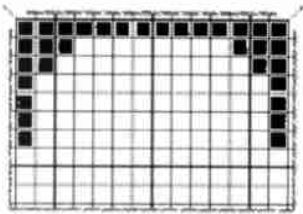


图9 膜结构计算结果

Fig 9 Numerical results of a membrane structure

从以上的计算可以看出, 由膜结构和杆系网状结构的计算结果可以明显地观察到整体结构的起皱情况, 且所获得的结果是合乎实际情况的。但由于膜结构与杆系网状结构在力学特性, 尤其是非线性特征上的不同, 因而两种计算方法的结果对起皱模拟来说并没有严格的等效特性, 这一点在问题的研究中应当特别的注意。

## 6 结 论

鉴于空间柔性结构材料往往体现出凹性强化的特点, 本文采用多折线本构模型对问题进行了分析研究, 建立了求解所涉及问题的数学规划算法, 算法的原理是以参数变分原理为基础的。所构造的算法很好地解决了凹性强化模型分析中算法构造上的困难, 具有良好的收敛特性。

在本文工作的基础上, 通过起皱区的数值模

拟, 还可以进行解决起皱问题的方案研究, 通过优化方法找到解决膜起皱的办法。另外, 空间柔性结构的种类很多, 这里只研究了其中的一种, 希望本文的方法能为其他的柔性结构问题的分析提供借鉴。

## 参 考 文 献

- [1] Jenkins C H, Leonard J W. Dynamic wrinkling of viscoelastic membranes[J]. ASME J of Applied Mechanics, 1993, 60: 575- 582.
- [2] Yang B, Ding H, Lou M, Fang H. A new approach to wrinkling prediction of space membrane structures[A]. The 42<sup>nd</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures [C]. Structural Dynamics and Materials Conference, Seattle WA, 2001.
- [3] 钟万勰, 张洪武, 吴成伟. 参变量变分原理及其在工程中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1997.  
(Zhong W X, Zhang H W, Wu C W. Parametric variational principle and its applications in engineering[M]. Science Press, Beijing, 1997.)
- [4] Zhang H W, Zhong W X, Gu Y X. A combined parametric quadratic programming and iteration method for 3D elastic-plastic frictional contact problem analysis[J]. Comput Meths Appl Mech, 1998, 155: 307- 324.
- [5] 张洪武, 顾元宪, 钟万勰. 传热与接触两类问题耦合作用的有限元分析[J]. 固体力学学报, 2000, 21(3): 217- 224.  
(Zhang H W, Gu Y X, Zhong W X. The finite element analysis for coupled problems between heat transfer and contact processes[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2000, 21(3), 217- 224.)
- [6] 张洪武, 张新伟, 顾元宪. 基于梯度塑性理论的动力软化问题求解的参变量变分原理及有限元方法[J]. 振动工程学报, 2001, 14(2): 135- 139.  
(Zhang H W, Zhang X W, Gu Y X. Analysis of dynamic softening problem with gradient dependent model[J]. J Vibration Engineering, 2001, 14(2), 135- 139.)

作者简介:



张洪武(1964-) 男, 辽宁大连人, 大连理工大学工程力学系教授, 德国汉诺威大学博士学位, 主要从事工程结构数值分析的基本理论与算法方面的研究工作, 近年来则主要致力于计算非线性力学与多相多孔材料方面的研究。E-mail 地址: zhanghw@dlut.edu.cn, 联系电话: 0411- 4708769。

(责任编辑: 李铁柏)