第 23 卷 第 4 期　航 空 学 报　Vol. 23 No. 4
2002 年 7 月　ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA　July 2002

文章编号: 1000-6893(2002) 04-0334-04

战略储备系统备件最优储备量计算的解析方法

周江华[1,2], 肖　刚[2], 苗育红[2]
(1. 西安交通大学 系统工程研究所, 陕西 西安　710049)
(2. 第二炮兵工程学院 603 教研室, 陕西 西安　710025)

ANALYTICAL METHOD FOR CALCULATING THE OPTIMUM SPARE-PART QUANTITIES OF STRATEGIC STORAGE SYSTEM

ZHOU Jiang-hua[1,2], XIAO Gang[2], MIAO Yu-hong[2]
(1. Institute of Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an　710049, China)
(2. Faculty 603, The Second Artillery Engineering College, Xi'an　710025, China)

摘　要: 首先简要介绍了战略储备系统及其寿命过程。然后从分析系统的寿命过程入手, 将其寿命过程分为两个阶段, 每个阶段分别用一连续时间马尔可夫链来描述系统的动态过程, 在此基础上给出了战略储备系统最优战略储备量计算的解析方法, 并针对不可修的情况给出了简化的计算公式。

关键词: 可靠性; 优化; 马尔可夫链; 备件; 冗余系统
中图分类号: O213.2　　文献标识码: A

Abstract: The problem of optimum spare parts quantities of Strategic Storage System $(n:k(S))$ is first introduced by the Second Artillery Army of PLA for their needs. A major challenge of this problem is that the aging process of $n:k(S)$ is quite different from and more complex than ordinary redundant systems. In this paper, the aging process of $n:k(S)$ is split into two stages. Each stage is modeled by a continuous-time Markov chain. An analytical method based on such Markov chain models is provided for calculating the optimum spare parts quantities of $n:k(S)$ under reliability restriction. Moreover, a simple and efficient formula is presented to deal with unrepairable $n:k(S)$. The present work can be used as guidance in the spare-part supply planning of $n:k(S)$.

Key words: reliability; optimization; Markov chain; spare part; redundant system

提高武器装备的可靠性是作战保障的重要课题, 采用冗余技术其中的一个重要的方面, 当前最广泛使用的冗余技术是采用储备系统。由于储备系统的大量使用, 备件供应规划工作的主要任务之一就是按规定的约束条件和备件需求说明确定出经济、合理的备件储备量。为适应现代战争的需要, 第二炮兵部队结合自身特点作提出了战略储备系统的最优储备问题。与常规储备系统相比, 战略储备系统的寿命过程有较大的不同, 有关该系统的最优储备量问题尚未有现成的计算方法, 本文对战略储备系统的备件最优储备问题进行了讨论。

1　问题描述

(1) 战储系统及其寿命过程描述　战储系统定义为由同型的保障的对象与它们的备份件所构成的系统, 以下用 $n:k(S)$ 表示, 其中 k 为保障对象个数, $n-k$ 为备件数, 括号中的 S 为英文单词"战略"的首字母, 表示战储系统。$n:k(S)$ 的寿命过程分为普通战备和作战值班两个阶段。如图 1, T 为系统最大保障时间, h 为系统进入作战值班的时刻。在普通战备阶段即 $[0, h]$ 阶段, 并不动用战略储备件, 仅按规定的管理和维护方式对保障对象进行保养和维修, h 时刻系统进入作战值班阶段($[h, T]$ 阶段)。在该阶段, 一旦保障对象处于非正常状态立即换上完好的备件, 以确保作战不受影响。

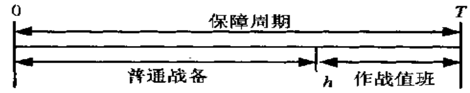

图 1　战储系统寿命过程

Fig. 1　Aging process of strategic storage system

对 $n:k(S)$ 系统来说, 作战值班阶段系统的可靠性是反映系统作战效能最重要的指标。因此如何合理的规划备件储备量, 使得在作战值班的

收稿日期: 2001-04-09; 修订日期: 2002-04-16
基金项目: 国家自然科学基金(70171029)资助项目
文章网址: http://www.hkxb.net.cn/hkxb/2002/04/0334/

任何时候, 一旦保障对象失效总能有备件可替换, 是战储系统备件规划中需要解决的关键问题。由于系统本身的特殊性, $n:k(S)$ 系统的备件储备量无法参照常规的 $n:k$ 系统备件量的计算方法[1～4]。它和一般的 $n:k$ 储备系统有如下区别: ①一般的储备系统在整个保障周期内, 只要保障对象出现失效, 即用备件进行替换, 而战储系统的寿命过程比较特殊; ②为了满足作战的需要, 战略储备系统必须考虑备件的储备寿命, 而常规系统视需要可不考虑备件的储备寿命。

(2) 备件最优储备问题　本文主要从备件供应规划的角度来看待备件最优储备问题。由于普通战备阶段, 并不进行替换, 从备件供应的角度分析, 保障对象在该阶段具体的状态演变无需关心, 只需知道 h 时刻保障对象的完好性指标即可, 由于该阶段保障对象的管理和维护方式是既定的, h 时刻保障对象的完好性指标是一个确定的量, 该完好性指标通常用可用度 $A(h)$ 或战备完好率 $P_b(h)$ 表示。$P_b(h)$ 是指 h 时刻可用保障对象数 $K(h)$ 与保障对象总数 k 之比。

$$P_b(h) = \frac{K(h)}{k} \tag{1}$$

$P_b(h)$ 的可信度, 用置信水平 α 来描述。

$$\alpha = P\{K(h) \le [kP_b(h)]\} \tag{2}$$

符号“[ ]”表示取整。与保障对象的可用度 $A(h)$ 之间有下述关系

$$\sum_{i=0}^{x} C_k^i A(h)^i [1 - A(h)]^{k-i} = \alpha \tag{3}$$

式中: $x = [kP_b(h)]$。

从备件供应规划的角度看, 反映战储系统作战保障水平主要指标是作战值班阶段的备件保障率 $P_R(t)$, $t > h$, 它定义为系统在 $[h, t]$ 内当保障对象失效时不出现无备件可替换的概率。以此为约束条件, $n:k(S)$ 系统的备件最优储备问题可表述为: 设保障对象的数量为 k; 系统要求的最大保障时间为 T; 系统进入作战值班的时间为 h, 并且 h 时刻保障对象以可用度 A (或战备完好率 P, 置信水平 α) 进入作战值班阶段, 求初始战略备件最优储备量 m, 使得系资助项目统在作战值班阶段的备件保障率不低于 R。

在对 $n:k(S)$ 系统进行分析时, 假定: ①保障期内不补充备件; ②保障对象之间、备件之间、保障对象与备件之间状态相互独立; ③替换失效部件的时间忽略不计; ④备件的储备寿命服从参数为 ν 的指数分布, 保障对象在作战值班阶段的失效时间服从参数为 λ 的指数分布, 失效部件的维修时间均服从参数为的 μ 指数分布。由于当前具有战略储备价值的设备主要是电子设备, 指数分布的假设是合理的[1,2]。

2　最优储备量计算

(1) 系统的状态转移图　战储系统的寿命过程显然可分成两个阶段, 由于指数分布的无后效性, 可以将系统的状态分成两个阶段进行分析。

①$[0, h]$ 阶段　该阶段由于不对保障对象进行替换, 且 h 时刻保障对象战备完好性指标已知, 因此在该阶段只需关心备件的状态。以完好备件数作为系统的状态量, 得到系统的状态转移图。该阶段系统总共 $m+1$ 个可能的状态, 为方便在图中状态框正下方标以记号 $0, 1, \cdots, m$。图 2 中 b_i 和 d_i 分别表示由备件失效和维修引起的状态转移。

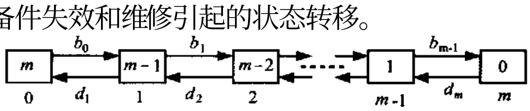

图 2　$[0, h)$ 阶段系统状态转移图

Fig. 2　State transition diagram of $n:k(S)$ in $[0, h)$ stage

$$b_j = (m-j)\nu,\ j = 0, \cdots, m-1 \tag{4}$$

$$d_j = \mu,\ j = 1, \cdots, m \tag{5}$$

②$[h, T]$ 阶段　在该阶段取可用保障对象和完好备件的总数作为系统的状态量, 显然该状态量的可能的取值范围为从 $m+k$ 至 $k-1$, 其中状态量为 $k-1$ 时为吸收态(保障对象失效而无备件可替换)。可能的状态总数为 $m+2$ 个, 在图 3 中标以记号 $0, 1, \cdots, m+1$。图中 d_j 同式(5), a_j 表示由保障对象失效和备件失效导致的状态转移。

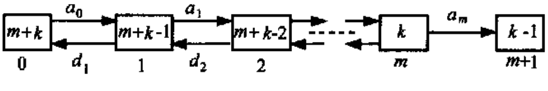

图 3　$[h, T]$ 阶段系统状态转移图

Fig. 3　State transition diagram of $n:k(S)$ in $[h, T]$ stage

$$a_j = k\lambda + (m-j)\nu,\ j = 0, 1, \cdots m \tag{6}$$

(2) 解算步骤　首先求出战储系统备件保障率与初始备件量 m 的关系, 然后由该关系式得到备件最优储备量的计算公式, 具体的步骤为:

①求出 h 时刻完好备件数的概率分布　定义 $p_j(t)$ 为系统 t 时刻处于状态 j 的概率, 引入状态概率向量

$$\boldsymbol{p}(t) = [p_0(t)\quad p_1(t)\quad p_2(t)\quad \cdots\quad p_m(t)] \tag{7}$$

则对马尔可夫系统有

$$\boldsymbol{p}(h) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \exp\{\boldsymbol{Q}h\} \tag{8}$$

其中:$\boldsymbol{p}(0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$为初始状态概率分布; $\boldsymbol{Q}$ 为转移速率矩阵(transition rate matrix)[5,6]。对应图2, $\boldsymbol{Q}$ 为3对角矩阵其对角线上的元素为

$$Q_{j,j+1} = b_j,\ Q_{j,j-1} = d_j,\ Q_{j,j} = -(b_j + d_j) \tag{9}$$

式(8)的求解可参考文献[7], 也可用的专门的科学计算软件包(如Matlab)计算。设h时刻完好备件数为X, 则

$$P\{Y = j\} = P_{m-j}(h),\ j = 0,\cdots,m \tag{10}$$

②求出h时刻可用保障对象数目的概率分布 首先由保障对象的战备完好率, 按式(3)求出h时刻对应的可用度指标A。再设h时刻可用保障对象数为Y, 则

$$P\{Y = j\} = C_k^j A^j (1 - A)^{1-j},\ j = 0,\cdots,k \tag{11}$$

③求出h时刻可用保障对象数与完好备件的总数的概率分布 设h时刻可用保障对象与完好备件的总数为Z, 则

$$Z = X + Y \tag{12}$$

由式(10)和式(11), 即可得到Z的概率分布

$$P\{Z = l\} = \sum_{i=i\min}^{i\max} P\{X = i\} P\{Y = l - i\} \tag{13}$$

式中: $i\min = \max\{0, l - m\}$, $i\max = \min\{k, l\}$, $l = 0, 1, \cdots, m + k$。

④以式(13)作为系统在$[h, T]$阶段初始概率分布, 求出系统T时刻的状态概率分布 引入系统在$[h, T]$阶段的非吸收状态概率向量

$$\boldsymbol{q}(t) = [q_0(t) \quad q_1(t) \quad \cdots \quad q_m(t)] \tag{14}$$

T时刻的状态概率分布, 由下式计算

$$\boldsymbol{q}(T) = \boldsymbol{q}(h) \cdot \exp\{\boldsymbol{B}(T - h)\} \tag{15}$$

其中: $\boldsymbol{q}(h) = [q_0(h) \quad q_1(h) \quad \cdots \quad q_m(h)]$为系统在$[h, T]$阶段的初始非吸收状态概率分布

$$q_i(h) = P\{Z = m + k - i\},\ i = 0,\cdots,m \tag{16}$$

$\boldsymbol{B}$为系统在$[h, T]$阶段的转移速率矩阵, 其3条对角线上的元素为

$$B_{i,i+1} = a_i,\ B_{i,i-1} = d_i,$$
$$B_{i,i} = -(a_i + d) \tag{17}$$

⑤求系统在T时刻的备件的保障率 记为$R(m)$为配备m个备件时, 战储系统在T时刻的备件保障率, 由图3

$$R(m) = \sum_{i=0}^{m} q_i(T) \tag{18}$$

⑥计算战储系统备件最优储备量 满足以下条件的m, 即为战储系统备件最优储备量

$$R(m - 1) < R \leq R(m) \tag{19}$$

3 不可修时的封闭解

不可修$n:k(S)$系统和通常的含义略有区别, 在普通战备阶段只针对备件(保障对象仍按规定的管理和维护方式进行保养和维修), 进入作战值班阶段后, 不可修的含义和通常的含义相同, 在实际应用中, 这种情况具有一定的普遍性。不可修$n:k(S)$系统的备件最优储备量计算可简化为更简单的形式。

设初始备件数为m, 则不考虑对备件的维修时, h时刻完好备件数的概率分布为

$$P\{X = j\} = C_m^j e^{-j\nu h}(1 - e^{-\nu h})^{m-j} \tag{20}$$

由式(11)、式(13)、式(16), 求出系统在$[h, T]$阶段的初始非吸收态的状态概率分布$\boldsymbol{q}(h)$。然后做变换$u = t - h$, 由图3非吸收状态转移的微分方程简化为下述形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_0(u)}{\mathrm{d}u} = -a_0 q_0(u) \\ \dfrac{\mathrm{d}q_j(u)}{\mathrm{d}u} = -a_j q_j(u) + a_{j-1} q_{j-1}(u), \\ \qquad (j = 1, \cdots, m) \end{cases} \tag{21}$$

该方程用进行拉氏变换求解, 可解出

$$q_j(T) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{j} \sum_{i=l}^{j} \frac{\exp[-a_i(T - h)]}{\prod\limits_{\substack{w=l,j \\ w \neq i}} (a_w - a_i)} C_l,\ \nu \neq 0 \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{j} \frac{[k\lambda(T - h)]^{j-l} q_l(h)}{(j - l)!} e^{-k\lambda(T-h)},\ \nu = 0 \end{cases} \tag{22}$$

式中: $\nu = 0$为不考虑备件储备寿命的结果。将式(22)代入式(18)、式(19)即可求出备件最优储备量。

当$\nu = 0$且$h = 0$时, $n:k(S)$系统退化为常规的$n:k$系统, 此时由上述公式可求出

$$q_j(T) = \frac{(k\lambda T)^j}{j!} e^{-k\lambda T} \tag{23}$$

$$R(m) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(k\lambda T)^j}{j!} e^{-k\lambda T} \tag{24}$$

该结果与文献[1, 2]给出的结果相同。

4 算 例

算例1 保障对象的个数为1, 最大保障周期

为 $T=6$ 年, 系统进入作战准备的时刻为 $h=5$ 年。h 时刻保障对象的可用度为 $A=0.99$。作战值班阶段保障对象的失效率为 $\lambda=0.33$(1/年), 备件的储备寿命服从参数为 $\nu=0.18$(1/年) 的指数分布。求保障期内备件的保障率不低于 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 0.97, 0.99 所需的备件量。计算结果见表 1。

表 1　1 个保障对象时的备件最优储备量

Table 1　Optimum spare-part quantities of $n:1(S)$

要求保障率	0.8	0.85	0.9	0.95	0.97	0.99
最优备件量	1	2	3	5	6	9

算例 2　保障对象的个数为 5 个, 其余同算例 1, 求保障期内备件的保障率不低于 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 0.97, 0.99 所需的备件量。计算结果见表 2。

表 2　5 个保障对象时的备件最优储备量

Table 2　Optimum spare-part quantities of $n:5(S)$

要求保障率	0.8	0.85	0.9	0.95	0.97	0.99
最优备件量	8	9	11	13	15	19

比较表 1 和表 2 就可看出, $k=5$ 时的备件最优储备量不能看作是 $k=1$ 时最优储备量的简单叠加。例如当要求的保障率为 0.8 时, 采用简单的叠加, 就会造成 $k=5$ 时系统达不到保障率要求, 而当要求的保障率大于 0.9 时, 采用简单的叠加就会造成备件的大量浪费。

致　谢　本文的工作得到了第二炮兵弹头处的大力支持, 对此表示感谢。

参　考　文　献

[1]　胡昌寿. 可靠性工程- 设计、试验分析、管理(上册)[M]. 北京: 宇航出版社, 1989.
(Hu C S. Reliability engineering: design, experiment analysis, management[M]. Beijing: China Astronautics Publishing House, 1989.)

[2]　徐维新. 维修工程学[M]. 北京: 电子工业出版社, 1992. 329- 339.
(Xu W X. Maintainability engineering[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 1992. 329- 339.)

[3]　周江华, 肖刚, 孙国基. $n:k$ 系统可靠度及备件量的仿真计算方法[J]. 系统仿真学报, 2001, 13(2): 159- 162.
(Zhou J H, Xiao G, Sun G J. Simulation based method for computation reliability and optimum quantity of $n:k$ cross-strapping cold standby sytem[J]. Journal of System Simulation, 2001, 13(2): 159- 162.)

[4]　周江华, 胡峰, 孙国基. $n:k$ 交叉储备系统优化配置的仿真方法[J]. 机械强度(已录用).
(Zhou J H, Hu F. Sun G J. Optimum configuration of n: k(m) cross-strapping cold standby system via simulation [J]. (To appear in Journal of Mechanical strength)

[5]　Gross D. Fundamentals of Queueing Theory[M]. Second edition. New York: John Wiley & Sons, 1985.

[6]　邓永录. 随机模型及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 1994.
(Deng Y L. Stochastic Models and their Application[M]. Beijing: High Education Press, 1994.)

[7]　郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.
(Zheng D Z. Linear system theory [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1990.)

作者简介:

周江华(1973-)　男, 江西鹰潭人, 第二炮兵工程学院讲师, 西安交通大学系统工程研究所博士生, 研究方向为系统仿真、性能评估与优化。Email: jhzhou@sei.xjtu.edu.cn

肖　刚(1969-)　男, 四川青神人, 第二炮兵工程学院副教授, 目前的主要研究兴趣在复杂系统可靠性仿真方面, 已经在该领域发表论文 20 多篇。

苗育红(1971-)　女, 河南方成人, 第二炮兵工程学院讲师, 研究方向为飞行力学、计算机仿真。

(责任编辑: 李铁柏)