

# 基于极限诱导分岔的电压稳定分析

马兆兴, 万秋兰, 丁涛, 李红美

(东南大学 电气工程学院, 江苏省 南京市 210096)

## Voltage Stability Analysis Based on Limit Induced Bifurcation

MA Zhaoxing, WAN Qiulan, DING Tao, LI Hongmei

(School of Electrical Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, Jiangsu Province, China)

**ABSTRACT:** Limit induced bifurcation (LIB), which occurs while reactive power output of generators exceeds the limit or output of dynamic reactive power sources is over-limited, is very dangerous to power system voltage stability. The conditions by which LIB may occurs is given while reactive power is over-limited; a criterion to judge whether voltage stability can be maintained is proposed while LIB occurs due to over-limited reactive power, and an explanation on the mechanism of how LIB influencing voltage stability is given. LIB reflects the importance of dynamic reactive power sources in maintaining system voltage stability, so the influence of increasing reactive power source on LIB is researched. The correctness of the proposed method and the given explanation on the mechanism of LIB are verified by results of digital simulation.

**KEY WORDS:** power system; voltage stability; reactive power limit; stability analysis; limit-induced bifurcation

**摘要:** 给出了达到无功越限后, 可能出现极限诱导分岔的条件; 提出了变量达到输出极限导致极限诱导分岔时, 影响系统电压稳定与否的判据; 给出了极限诱导分岔影响电压稳定的一种机理解释。极限诱导分岔反映了动态无功源在维持系统电压稳定性中的重要性, 并研究了增加无功源对极限诱导分岔的影响。数字仿真结果进一步验证了文中所提出方法和机理解释的正确性。

**关键词:** 电力系统; 电压稳定; 无功极限; 稳定分析; 极限诱导分岔

## 0 引言

20 世纪 80 年代以来, 国际上多个大型电力系统相继发生多起电压持续偏低、电压崩溃事件, 使电压稳定逐渐成为国际电工学界关注的焦点, 目前已取得了非常大的进展。

电力系统是典型的非线性非自治系统, 其动态行为包含许多复杂的非线性机电振荡现象。由此研究电力系统电压稳定的方法也是多种多样, 其中

分岔理论已成为揭示电力系统非线性特性的重要研究工具。在以往的研究中大多认为引起电力系统电压稳定问题最常见的分岔是鞍结分岔和 Hopf 分岔<sup>[1-5]</sup>。文献[1-2]分析了电力系统中硬限制和终止限制对系统稳定性的影响, 虽没有提及极限诱导分岔的概念, 但这些研究已涉及到动态分析; 文献[6]介绍了鞍结分岔和跨临界分岔等与电力系统电压不稳定及崩溃密切相关的静态分岔的判别理论和控制方法; 文献[7]考虑了发电机无功输出限制对电压稳定的影响, 得出若考虑多个限制时其转变限制流形是不光滑的, 这些性质对电压稳定研究是非常有价值的; 文献[8]追踪并辨识了电压崩溃点; 文献[9]提出了约束优化方法计算负荷裕度, 并以此评估引起电压崩溃的极限诱导分岔和鞍结分岔; 文献[10]概述了电压稳定的分析方法; 文献[11]阐述了电力系统稳定的不同定义和分类依据; 文献[12]给出了无功越限后, 从特征值角度来判别失稳与否, 但未给出具体的电压稳定判据; 文献[13]分析并计算了影响电压稳定的鞍结分岔点; 文献[14]对极限诱导分岔发生的原因进行了分析, 并提出了一种基于主导节点法的分岔类型检测方法; 文献[15]分析了当参数改变时, 系统限值对特征值计算的影响; 文献[16]分析了考虑励磁限制时非线性电力系统出现的复杂现象, 研究了系统出现不同的分岔现象和周期性摇摆; 文献[17]提出了一种考虑负荷波动的电压稳定指标; 文献[18]阐述了短期及中长期电压稳定分析方法, 指出了电压稳定仿真存在的问题, 分析了短期电压崩溃和中期电压崩溃过程的事故特征并评价了电压失稳机理。

本文采用小扰动分析研究电力系统出现的极

限诱导分岔对电压稳定的影响, 提出系统发生极限诱导分岔发生的条件及引起电压失稳的稳定判据, 并给出极限诱导分岔影响电压稳定的机制性分析。

### 1 电力系统分岔分析模型

电力系统的状态方程可表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \lambda), & x \in \mathbf{R}^n \\ x_i = F_i(x, y, \lambda) = \begin{cases} x_{i\max}, & x_i \geq x_{i\max} \\ F_i(x, y, \lambda), & x_{i\min} < x_i < x_{i\max} \\ x_{i\min}, & x_i \leq x_{i\min} \end{cases} \end{cases}$$

若单个(或多个发电机)无功越限或者其他动态无功源达到输出极限, 某个状态量将变为常数, 它在潮流方程或稳态方程的结构发生变化, 系统结构也发生相应的变化。这时系统将失去一个自由度, 即可能引起系统失稳性分岔的出现, 这种分岔称为极限诱导分岔。极限诱导分岔对于电力系统电压稳定来说是非常危险的, 有时会导致电力系统电压的立即失稳。从理论基础上来看, 传统分岔通常用来解释光滑动态系统中的行为而无功极限诱导分岔描述的是非光滑动态系统的行为。电力系统特性可用微分-代数数学模型描述为

$$0 = g(x, y, \lambda)$$

式中:  $x \in \mathbf{R}^n$  为系统的状态变量;  $y \in \mathbf{R}^k$  为系统的代数变量;  $\lambda \in \mathbf{R}^m$  为系统参数。满足  $f(x^*, y^*, \lambda) = 0$  的点  $(x^*, y^*, \lambda)$  称为系统的不动点或者平衡点。负荷采用

$$P = P_0(1 + \lambda)$$

$$Q = Q_0(1 + \lambda)$$

式中:  $P_0, Q_0$  为初始负荷;  $\lambda$  为变化参数。

## 2 极限诱导分岔存在性及稳定性判别

### 2.1 极限诱导分岔存在条件

随着负荷参数或其他参数的逐渐增大, 电力系统的发电机发生无功越限或者其他动态无功源达到输出极限, 可能伴随有极限诱导分岔的发生。极限诱导分岔可能发生在鞍结分岔之前, 也可能发生在鞍结分岔之后。研究发生在鞍结分岔之后的情况是没有意义的, 因此需要关注的是发生在鞍结分岔之前的情况。

设  $\alpha[\mathbf{J}]$  为电力系统雅可比矩阵  $\mathbf{J}$  的特征值, 假定系统开始是稳定的, 即特征值均在虚轴左侧, 则表示为

$$S_N(\lambda) = \alpha[\mathbf{J}] = \alpha(\lambda)$$

在电力系统中, 特征值随参数的变化可能是线

性的, 也可能是高度非线性的。为更准确地表明可能发生的鞍结分岔, 取特征值  $\alpha$  的范数  $\|\alpha(\lambda)\|$ , 引入指数

$$L_{SN}(\lambda) = \min\left[\|\alpha(\lambda)\| \left/ \left\| \frac{d\alpha(\lambda)}{d\lambda} \right\| \right]\right] \quad (1)$$

随着参数  $\lambda$  的逐渐变化, 指数  $L_{SN}(\lambda)$  能准确地反映哪个特征值最先达到零点。

设状态量  $x_i$  的最大输出限制为  $x_{i\max}$ , 则在参数  $\lambda$  的变化过程中, 距最大值的裕度可表示为

$$\beta(\lambda) = |x_{i\max} - x_i(\lambda)|$$

参数不断变化时, 状态量  $x_i$  到达输出极限的快慢程度可以表示为

$$L_{TB}(\lambda) = \frac{\beta(\lambda)}{\frac{d\beta(\lambda)}{d\lambda}} = \frac{|x_{i\max} - x_i(\lambda)|}{\left| \frac{dx_i(\lambda)}{d\lambda} \right|} \quad (2)$$

由式(1)(2)能分别表征发生不同分岔的快慢情况, 若  $L_{SN}(\lambda) < L_{TB}(\lambda)$ , 则表示在达到输出极限前, 已经发生了鞍结分岔, 系统电压会因鞍结分岔而失稳, 此种情况下研究极限诱导分岔是没有意义的。若  $L_{SN}(\lambda) = L_{TB}(\lambda)$ , 则是一种临界情况, 即在鞍结点处无功输出达到极限。若  $L_{SN}(\lambda) > L_{TB}(\lambda)$ , 则表示输出极限发生在鞍结分岔前, 极限诱导分岔可能在鞍结分岔发生前出现, 因此会引起电压立即崩溃。这也是本文重点研究的情况。

### 2.2 极限诱导分岔的稳定性判据

发电机无功越限或者其他输出无功输出设备达到输出极限, 发电机的状态也许会发生变化(如在潮流计算或稳定计算过程中, 会由 PV 状态变为 PQ 状态), 引起系统结构变化。系统变得不再光滑, 可能发生极限诱导分岔, 会有 2 种情况出现, 如图 1—2 所示。其稳定与否也是不同的, 文献[12]从特征值角度来判断其稳定性。

图 1 尽管减小了电压稳定裕度, 但电压未发生失稳; 图 2 发生的极限诱导分岔导致电压崩溃。可以确定的是, 这种因输出达到极限导致的状态切换

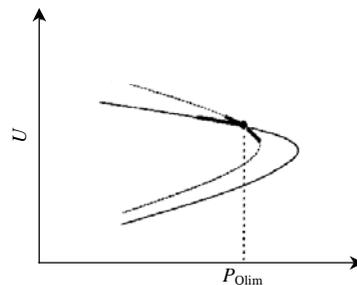


图 1 极限诱导转换过程

Fig. 1 The process of limit induced

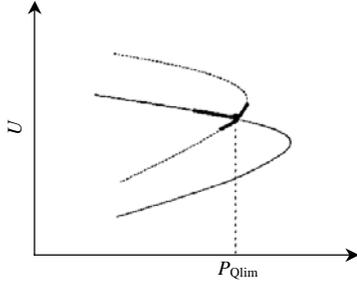


图2 极限诱导分岔

Fig. 2 Limit induced bifurcation

会恶化电压的稳定性。若发生极限诱导分岔，由于系统结构发生了变化，此时因某个状态量达到极限，将变为常值，微分系统将失去一个自由度，并且系统是非光滑的，其稳定性不能通过雅可比矩阵和特征值来判断，需要寻求新的方法。从图1可看到，达到输出极限时， $\partial U(\lambda)/\partial P(\lambda) < 0$ ，电压未发生失稳。从图2可看到，若达到输出极限时， $\partial U(\lambda)/\partial P(\lambda) > 0$ ，运行点位于极限后系统  $P-V$  稳定曲线的下半支，导致电压崩溃。电力系统静态代数方程  $0=g(x,y,\lambda)$  中，对于节点  $i$  有

$$P_i(\lambda) = e_i(\lambda) \sum_{j=1}^m [G_{ij} e_j(\lambda) - B_{ij} f_j(\lambda)] + f_i(\lambda) \cdot \sum_{j \in i} [G_{ij} f_j(\lambda) + B_{ij} e_j(\lambda)] = e_i(\lambda) g_{li} \cdot [e_j(\lambda), f_j(\lambda)] + f_i(\lambda) g_{2i} [e_j(\lambda), f_j(\lambda)] \quad (3)$$

$$U_i(\lambda) = \sqrt{e_i^2(\lambda) + f_i^2(\lambda)} \quad (4)$$

对式(3)(4)两边分别求关于  $\lambda$  的偏导，有

$$\frac{\partial P_i(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial e_i(\lambda)}{\partial \lambda} g_{li} + e_i \frac{\partial g_{li}}{\partial \lambda} + \frac{\partial f_i(\lambda)}{\partial \lambda} g_{2i} + f_i \frac{\partial g_{2i}}{\partial \lambda} \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_i(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{[e_i(\lambda) \frac{\partial e_i(\lambda)}{\partial \lambda} + f_i(\lambda) \frac{\partial f_i(\lambda)}{\partial \lambda}]}{\sqrt{e_i^2(\lambda) + f_i^2(\lambda)}} \quad (6)$$

由式(5)(6)可以得到  $\frac{\partial U_i(\lambda)}{\partial \lambda} / \frac{\partial P_i(\lambda)}{\partial \lambda}$ ，系统达到极限后是否稳定，决定于变量到达极值的点是否位于极限后系统  $P-V$  曲线稳定的上半支，若位于曲线的上半支则是稳定的；若位于下半支则失去稳定性。故若达到输出极限发生极限诱导分岔时，本文提出如下稳定性判别方法：若  $\frac{\partial U_i(\lambda)}{\partial \lambda} / \frac{\partial P_i(\lambda)}{\partial \lambda} > 0$ ，则引起电压崩溃；若  $\frac{\partial U_i(\lambda)}{\partial \lambda} / \frac{\partial P_i(\lambda)}{\partial \lambda} < 0$ ，则不会引起电压失稳，但会减小电压的稳定裕度。

### 3 数值仿真及机制分析

#### 3.1 单机无穷大系统仿真分析

图3为3节点系统，1为发电机节点，2接负

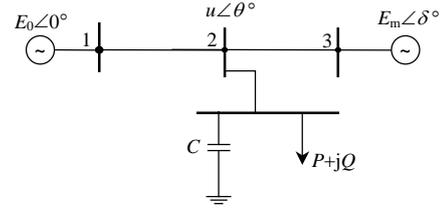


图3 系统简单接线

Fig. 3 Simple system diagram

荷，3为无穷大节点。考虑到机网接口方程及母线2处负荷平衡方程，系统为微分代数方程的形式。

发电机采用3阶模型为

$$T'_{d0} \dot{E}'_q = E_{fd} - E'_q - (x_d - x'_d) I_d$$

$$\dot{\delta} = 2\pi f_0 \omega$$

$$H \dot{\omega} = P_m - P_e - D \omega$$

励磁系统方程为

$$T_R \dot{U}_1 = U_t - U_1$$

式中： $E'_q$ 为发电机q轴暂态电动势； $T'_{d0}$ 为d轴开路暂态时间常数； $x_d$ 、 $x'_d$ 分别为d轴同步电抗和暂态电抗； $I_d$ 为d轴电流； $P_m$ 为输入机械功率； $P_e$ 为输出电磁功率； $E_{fd}$ 为励磁电压； $T_R$ 为励磁时间常数； $U_t$ 为系统电压。

设图3系统频率为50Hz，发电机电压参考值  $U_{ref}=1.021$ ，初始负荷时发电机节点电压为1.00，母线2处初始负荷  $P_0+jQ_0=1.9+j0.7$ ，发电机及励磁系统参数  $x_d=0.9$ 、 $x'_d=0.15$ 、 $x_q=0.8$ 、 $T'_{d0}=7$  s、 $H=3.5$  s、 $D=18.0$ 、 $T_R=0.05$  s。

当  $E_{fdmax}=2.85$ ，随着负荷增加，达到无功输出极限时， $\frac{\partial U}{\partial \lambda} / \frac{\partial P}{\partial \lambda} = -0.113$ ，在负荷不重的情况下，当达到无功输出极限时引起发电机状态变化，但不会立刻引起电压崩溃，发生极限诱导转换过程。

当  $E_{fdmax}=3.4$  时，发生分岔前稳定裕度较大，随着负荷增加达到无功输出极限，此时的  $\frac{\partial U}{\partial \lambda} / \frac{\partial P}{\partial \lambda} = 0.107$ ，当负荷较重时发电机无功达到输出极限，发电机状态变化，引起系统结构变化，电压立刻崩溃，发生极限诱导分岔。

#### 3.2 多机系统仿真分析

考虑多机系统，以图4所示EPRI-36节点系统为例，发电机4、5、6、8均受无功输出最大、最小值限制，1为平衡节点。

随着负荷增加，在  $\lambda=2.16$ ，首先达到无功极限，节点8处的  $\frac{\partial U}{\partial \lambda} / \frac{\partial P}{\partial \lambda} = 0.103$ ，节点6处的  $\frac{\partial U}{\partial \lambda} / \frac{\partial P}{\partial \lambda} = -0.108$ 。节点8处电压失稳，发生了极限诱导分岔，

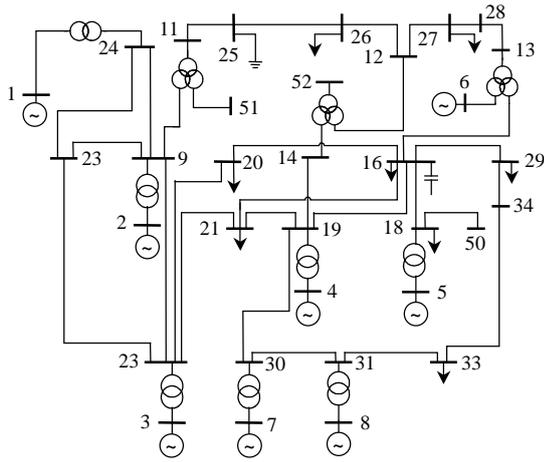


图 4 36 节点系统简单接线

Fig. 4 Thirty-six nodes system simple diagram

迅速恶化了系统电压稳定性。不同节点电压变化曲线如图 5 所示。

发电机首先达到无功越限，引起系统结构发生变化，电压立刻失稳，出现极限诱导分岔，随后引起系统发生电压崩溃。计算得到的稳定判据能正确反映稳定情况。

减小发电机的励磁极限，随负荷增加到 $\lambda=0.64$ ，发电机 8 尽管达到无功产生极限，节点 8 处的 $\frac{\partial U}{\partial \lambda} / \frac{\partial P}{\partial \lambda} = -0.094$ ，电压未发生失稳，其不同节点电压变化曲线如图 6 所示。

随着负荷增加，发电机无功越限后，尽管系统结构发生了变化，并未发生电压失稳，发生了极限诱导转换过程，减小了系统电压稳定裕度，仿真分

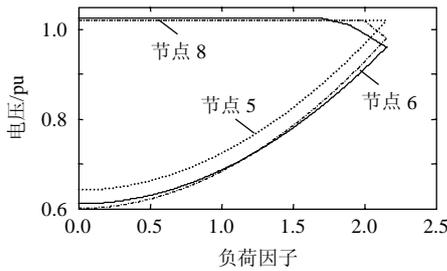


图 5  $\lambda=2.16$  时不同节点处电压变化曲线

Fig. 5 Voltage curves at different buses under  $\lambda=2.16$

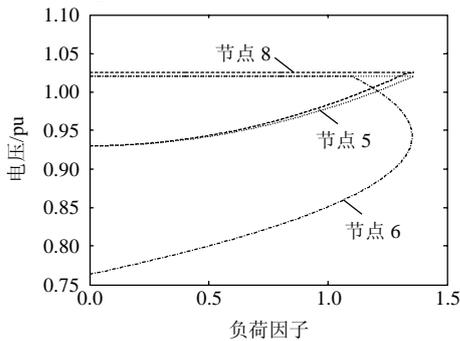


图 6  $\lambda=0.64$  时不同节点处电压变化曲线

Fig. 6 Voltage curves at different buses under  $\lambda=0.64$

析曲线也验证了这一结果。

### 3.3 稳定机制分析

极限诱导分岔实际反映了系统电压稳定性对动态无功源的依赖程度。发电机是电力系统中的重要动态无功源，能快速连续的对电压进行调节，在维持系统电压稳定方面起着重要作用。若某个动态无功源达到输出极限，失去了调节稳定电压的作用，极易发生极限诱导分岔。若相邻动态无功源有充足裕度，能减缓失稳性分岔的出现，有助于电压稳定。系统中一台发电机的重要性会随其无功输出极限的大小而改变，但不同的发电机之间不存在这样的性质，即无功极限大的发电机其重要性不一定强。若满足 $\frac{\partial U_i(\lambda)}{\partial \lambda} / \frac{\partial P_i(\lambda)}{\partial \lambda} < 0$ ，到达无功极限时，位于极限后系统电压稳定曲线的上半支，仍不会发生电压失稳，但会减小电压稳定裕度；相反若满足 $\frac{\partial U_i(\lambda)}{\partial \lambda} / \frac{\partial P_i(\lambda)}{\partial \lambda} > 0$ ，达到无功极限后位于电压稳定曲线的下半支，会发生电压崩溃。若达到无功极限的发电机仍有充足的动态无功支持，尽管该发电机遇到无功极限变为静态无功源，此时会减小电压稳定裕度，但系统不会立刻发生电压失稳。

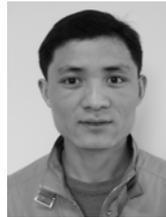
### 4 结语

本文着重分析引起电压失稳的极限诱导分岔。在实际系统中，随着负荷的增加，系统电压降低，系统无功需求增加，随之发电机无功越限或其他动态无功源(如 SVC)无功输出达到极限引起电压立即失稳。本文采用小扰动分析方法研究电力系统出现的极限诱导分岔对电压稳定的影响，提出了系统发生极限诱导分岔的发生条件及引起电压失稳的稳定判据，并给出了因极限诱导分岔发生电压失稳的机制解释。经数字仿真分析检验，文中提出的极限诱导分岔稳定性判据能正确反映稳定情况。

### 参考文献

- [1] Venkatasubramanian V, Schattler H, Zaborszky J. Dynamic of large constrained nonlinear systems-a taxonomy theory[J]. Proceedings of the IEEE, 1995, 83(1): 1530-1561.
- [2] Jiang X, Venkatasubramanian V, Schattler H. Hardlimit related stability phenomena in the power system[C]//Proceedings of IEEE Conference on Control Applications. USA: IEEE, 1995: 63-72.
- [3] Ma Youjie, Wen Hulong, Zhou Xuesong, et al. Bifurcation analysis on power system voltage stability[C]//Second International Conference on ICTA. Zhangjiajie: IEEE, 2009: 26-29.
- [4] 彭志炜. 基于分叉理论的电力系统电压稳定性的研究[D]. 杭州: 浙江大学, 1998.

- [5] 赵兴勇, 张秀彬, 苏小林. 电力系统电压稳定性研究与分岔理论[J]. 电工技术学报, 2008, 23(2): 87-94.  
Zhao Xingyong, Zhang Xiubin, Su Xiaolin. Voltage stability studies and bifurcation theory in power system[J]. Transactions of China Elerotechnical Society, 2008, 23(2): 87-94(in Chinese).
- [6] 王庆红, 周双喜, 胡国根. 电力系统静态分岔及其控制[J]. 电网技术, 2004, 28(13): 6-13.  
Wang Qinghong, Zhou Shuangxi, Hu Guogen. Steady state bifurcation of electric power system and its control[J]. Power System Technology, 2004, 28(13): 6-13(in Chinese).
- [7] Kataoka Y, Shinoda Y. Voltage stability limit of electric power system with generator reactive power constraints considered[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2005, 20(2): 951-962.
- [8] Feng Zhihong, Ajjarapu V, Long B. Identification of voltage collapse through direct equilibrium tracing[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2000, 15(1): 342-350.
- [9] 李华强, 刘亚梅, Yorino N. 鞍结分岔与极限诱导分岔的电压稳定性评估[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(24): 56-60.  
Li Huaqiang, Liu Yamei, Yorino N. Voltage stability assessment for saddle node bifurcation and limit induced bifurcation[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(24): 56-60(in Chinese).
- [10] Kundur P. Power system stability and control[M]. New York: McGraw Hill, 1994: 73-90.
- [11] 孙华东, 汤涌, 马世英. 电力系统稳定的定义与分类述评[J]. 电网技术, 2006, 30(17): 31-35.  
Sun Huadong, Tang Yong, Ma Shiyong. A commentary on definition and classification of power system stability[J]. Power System Technology, 2006, 30(17): 31-35(in Chinese).
- [12] 李少华. 结构诱导分岔和改进的连续潮流在电压稳定分析中的发展及应用[D]. 上海: 上海交通大学, 2008.
- [13] 庄慧敏, 肖建. AC/DC 系统电压稳定性的鞍结分岔分析[J]. 电网技术, 2008, 32(8): 29-34.  
Zhuang Huimin, Xiao Jian. Saddle-node bifurcation analysis of voltage stability of AC/DC power systems[J]. Power System Technology, 2008, 32(8): 29-34(in Chinese).
- [14] 熊宁, 和大春, 程浩忠, 等. 基于主导节点法的极限诱导分岔检测方法[J]. 电网技术, 2010, 34(9): 48-53.  
Xiong Ning, He Dachun, Cheng Haozhong, et al. A partial approach to detect limit induced bifurcation based on key node method[J]. Power System Technology, 2010, 34(9): 48-53(in Chinese).
- [15] Lerm A A P, Canizares C A, Mithulananthan N. Effects of limits in small signal stability analysis of power systems[C]//IEEE Power Engineering Society Summer Meeting. Vancouver, Canada: IEEE, 2001: 1805-1810.
- [16] Ji W, Venkatasubramanian V. Hard-limit induced chaos in a fundamental power system model[J]. Electrical Power & Energy System, 1996, 18(5): 279-295.
- [17] 傅旭, 王锡凡. 一种新的节点静态电压稳定指标及切负荷算法[J]. 电网技术, 2006, 30(10): 8-12.  
Fu Xu, Wang Xifan. A new index of nodal static voltage stability and load shedding method[J]. Power System Technology, 2006, 30(10): 8-12(in Chinese).
- [18] 马世英, 印永华, 汤涌, 等. 短期和中长期电压稳定仿真及评价[J]. 电网技术, 2006, 30(19): 14-20.  
Ma Shiyong, Yin Yonghua, Tang Yong, et al. Simulation and evaluation for short term and mid/long term voltage stability[J]. Power System Technology, 2006, 30(19): 14-20(in Chinese).



马兆兴

收稿日期: 2011-03-30.

作者简介:

马兆兴(1982), 男, 博士研究生, 主要研究方向为电力系统电压稳定性分析及无功控制,  
E-mail: mazhaoxingapple@126.com;

万秋兰(1961), 女, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为电力系统稳定分析、运行与控制。

(责任编辑 王晔)