第 23 卷 第 3 期 航 空 学 报 Vol.23 No.3
2002 年 5 月 ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA May 2002

文章编号: 1000-6893(2002)03-0241-04

基于 Stewart 平台的六维力/力矩传感器各向同性的解析研究

赵克定, 杨灏泉, 吴盛林, 袁立鹏
(哈尔滨工业大学 机电工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

ANALYSIS OF ISOTROPY FOR THE SIX-AXIS FORCE/TORQUE SENSOR BASED ON STEWART PLATFORM

ZHAO Ke-ding, YANG Hao-quan, WU Sheng-lin, YUAN Li-peng
(School of Mechatronic Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

摘 要: 对基于 Stewart 平台的六维力/力矩传感器的雅可比矩阵进行了解析推导,用解析的方式求出它的奇异值。并对基于矩阵谱范数的条件数进行了研究,得到传感器的各向同性与其结构尺寸间的解析关系,为传感器性能指标的评价及其结构优化设计提供了一种较好的借鉴方法。

关键词: 六维力/力矩传感器; 雅可比矩阵; 条件数; 各向同性
中图分类号: TP212.12 文献标识码: A

Abstract: Jacobian matrix of the six-axis force/torque sensor based on a Stewart platform is analyzed, and singular values are obtained by matrix transform. Relationship between isotropy and frame dimension is derived from analysis of the condition number based on the matrix spectral norm, which provides a better method for evaluation of the performance index and optimization of the framework for the force/torque sensor.

Key words: six-axis force/torque sensor; Jacobian matrix; condition number; isotropy

基于 Stewart 平台的并联结构六维力/力矩传感器,其测力信息丰富,能测量空间任意力螺旋(3个方向力和3个力矩)的大小,且测试精度高。因而近年来在航天器空间对接仿真[1]、风洞试验、火箭发动机推力试验[2]、跑跳运动员起动力测试、机械手及计算机输出终端绘笔[3]等方面均得到了广泛的应用研究。

在六维力/力矩传感器的设计中,结构设计是其中非常重要的环节,它极大程度上决定了传感器性能指标的优劣。因此结构性能的研究一直是六维力/力矩传感器中研究的热点。国外 Uchiyama 等提出了六维力/力矩传感器各向同性的评价系数,并研究了对称设计以使评价系数最小的问题[4]。Bicchi[5], Bayo[6] 等对结构的优化设计及传感器的条件数、刚度等作了一定的研究。国内,文献[7]作出了各向同性性能指标与其结构尺寸之间的关系图谱,从而使该类传感器更易实现优化设计。文献[8]以求取解析解的方式研究了基于矩阵 Frobenius 范数的条件数与传感器结构尺寸间的关系。在前人的这些研究基础上,本文拟用解析的方式求出该类传感器雅可比矩阵的奇异值,并对其奇异值的一些特性作出分析。最后对基于矩阵谱范数的条件数进行解析研究,得到传感器的各向同性与其结构尺寸间的解析关系,并对其进行评述,为六维力/力矩传感器结构性能的评价及其结构优化设计提供一种较好的方法。

1 雅可比矩阵的条件数

如图 1 所示, Stewart 六维力/力矩传感器的结构与传统的 Stewart 平台基本上是相同的,但由于可以用柔性铰链来代替万向铰(球铰),六维力/力矩传感器结构尺寸可以做得很小。

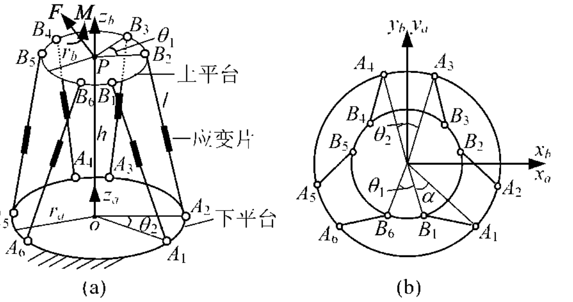

图 1 Stewart 六维力/力矩传感器结构原理简图
Fig.1 Stewart six-axis force/torque sensor structural diagram

由图 1 可看出,传感器呈对称结构布置,且主要有 5 个结构参数: 上平台半径 r_b, 下平台半径 r_a, 上平台定位角 θ_1, 下平台定位角 θ_2, 上平台高度 h。由图易于得到上平台的受力方程为

收稿日期: 2001-05-09; 修订日期: 2001-08-25
文章网址: http://www.hkxb.net.cn/hkxb/2002/03/0241/

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_6 \\ \boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{R}_2\times\boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{R}_6\times\boldsymbol{e}_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中: $\boldsymbol{e}_i$ 为第 i 分支的单位向量; $\boldsymbol{R}_i$ 为上平台中心 P 至 B_i 点的矢量; f_i 为第 i 分支受到的轴向力; $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$ 为平台上作用力对 P 点的力及力矩, 且

$$\boldsymbol{F} = [F_x \quad F_y \quad F_z],\ \boldsymbol{M} = [M_x \quad M_y \quad M_z]$$

式(1)又可简记为

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{F} \quad \boldsymbol{M}]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

式中: $\boldsymbol{J}$ 即为 Stewart 平台的雅可比矩阵, 且

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{e}_1)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{R}_2\times\boldsymbol{e}_2)^{\mathrm{T}} \\ \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{R}_6\times\boldsymbol{e}_6)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{f} = [f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_6]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的条件数可表示为[9]

$$C_n = \|\boldsymbol{J}\|\|\boldsymbol{J}^{-1}\| \tag{5}$$

当条件数的计算采用矩阵的谱范数时有

$$C_n = \sigma_{\mathrm{M}}/\sigma_{\mathrm{m}} \tag{6}$$

式中: σ_{M} 为雅可比矩阵的最大奇异值; σ_{m} 为雅可比矩阵的最小奇异值, 它们可分别表示出力映射的最大放大倍数和最小放大倍数。当二者的比值为 1, 即条件数等于 1 时, 力沿各方向进行的映射的放大倍数完全相等, 传感器的测量精度最好, 机构有最佳的运动传递性能, 这种情况称为各向同性。因此 C_n 可用来表示传感器的各向同性, 且 C_n 越小, 各向同性越好[9]。

2 雅可比矩阵奇异值的解析解

由图 1 可得上下平台各铰点 $\boldsymbol{B}_i$, $\boldsymbol{A}_i$ 在各自坐标系中的坐标为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B}_i &= r_b[\sin\alpha_{1i} \quad -\cos\alpha_{1i} \quad 0]^{\mathrm{T}},\ i = 1,3,5 \\ \boldsymbol{B}_i &= r_b[\cos\alpha_{2i} \quad \sin\alpha_{2i} \quad 0]^{\mathrm{T}},\ i = 2,4,6 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中: $\alpha_{1i} = \theta_1/2 + (i-1)\pi/3,\ i = 1,3,5$;

$\alpha_{2i} = \pi/6 - \theta_1/2 + (i-2)\pi/3,\ i = 2,4,6$。

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}_i &= r_a[\sin\beta_{1i} \quad -\cos\beta_{1i} \quad 0]^{\mathrm{T}},\ i = 1,3,5 \\ \boldsymbol{A}_i &= r_a[\cos\beta_{2i} \quad -\sin\beta_{2i} \quad 0]^{\mathrm{T}},\ i = 2,4,6 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

式中: $\beta_{1i} = \pi/3 - \theta_2/2 + (i-1)\pi/3,\ i = 1,3,5$;

$\beta_{2i} = \pi/6 + \theta_2/2 + (i-2)\pi/3,\ i = 2,4,6$。

设各分支的长度为 l, 因上下平台平行且无绕 z 轴的转动, 由平台的结构关系可得到

$$l = \sqrt{h^2 + r_a^2 + r_b^2 - 2r_ar_b\cos\alpha} \tag{9}$$

式中: α 定义为传感器的结构扭角, 且由平台的结构关系有 $\alpha = \pi/3 - (\theta_1 + \theta_2)/2$。

另由平台的结构尺寸关系可有 $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{B}_i$, $\boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{B}_i + \boldsymbol{H} - \boldsymbol{A}_i)/l_i$, 且 $\boldsymbol{H} = [0\ 0\ h]^{\mathrm{T}}$。

将以上关系式代入式(3)中可推出传感器的雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 为

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} & -J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{13} & J_{24} & J_{25} & J_{16} \\ J_{31} & J_{32} & J_{13} & J_{34} & J_{35} & -J_{16} \\ -J_{31} & J_{32} & J_{13} & J_{34} & -J_{35} & J_{16} \\ -J_{21} & J_{22} & J_{13} & J_{24} & -J_{25} & -J_{16} \\ -J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & -J_{15} & J_{16} \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} J_{11} &= r_b\sin(\theta_1/2) - r_a\cos(\pi/6 + \theta_2/2) \\ J_{12} &= -r_b\cos(\theta_1/2) + r_a\sin(\pi/3 + \theta_2/2) \\ J_{13} &= h \\ J_{14} &= -hr_b\cos(\theta_1/2) \\ J_{15} &= -hr_b\sin(\theta_1/2) \\ J_{16} &= r_ar_b\sin\alpha \\ J_{21} &= r_b\sin(\pi/3 + \theta_1/2) - r_a\sin(\pi/3 + \theta_2/2) \\ J_{22} &= r_b\cos(\pi/3 + \theta_1/2) + r_a\cos(\pi/3 + \theta_2/2) \\ J_{24} &= hr_b\cos(\pi/3 + \theta_1/2) \\ J_{25} &= -hr_b\sin(\pi/3 + \theta_1/2) \\ J_{31} &= r_b\cos(\pi/6 + \theta_1/2) - r_a\sin(\theta_2/2) \\ J_{32} &= r_b\sin(\pi/6 + \theta_1/6) - r_a\cos(\theta_2/2) \\ J_{34} &= hr_b\sin(\pi/6 + \theta_1/2) \\ J_{35} &= -hr_b\cos(\pi/6 + \theta_1/2) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

可设

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \cdots & \boldsymbol{g}_6 \\ \boldsymbol{g}_{01} & \boldsymbol{g}_{02} & \cdots & \boldsymbol{g}_{06} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

式中: $\boldsymbol{g}_i = [J_{i1} \quad J_{i2} \quad J_{i3}]/l$;

$\boldsymbol{g}_{0i} = [J_{i4} \quad J_{i5} \quad J_{i6}]/l,\ i = 1,2,\cdots 6$。

此时有

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{6}\boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_i & \sum_{i=1}^{6}\boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{0i} \\ \sum_{i=1}^{6}\boldsymbol{g}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_i & \sum_{i=1}^{6}\boldsymbol{g}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{0i} \end{bmatrix}$$

式(11)代入式(12)、式(13)中, 化简后可得稀疏矩阵

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}=\frac{3}{l^2}\begin{bmatrix} l^2-h^2 & 0 & 0 & 0 & -D & 0\\ 0 & l^2-h^2 & 0 & D & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & D & 0 & h^2r_b^2 & 0 & 0\\ -D & 0 & 0 & 0 & h^2r_b^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2r_a^2r_b^2\sin^2\alpha \end{bmatrix} \tag{14}$$

式中: $D=3hr_b(r_b-r_a\cos\alpha)$。

设 σ_i 为雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的第 i 个奇异值, λ_i 为 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$ 第 i 个特征值, 因此有 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$。现将式(9) 代入式(14) 中, 并设 $\eta=r_b/r_a$。经行列式初等变换可求出 λ_i, 并由此可求得各奇异值为

$$\sigma_1=\sigma_2=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{n_1}{n_{c1}}+\frac{\sqrt{n_1^2-4h^2\eta^2\sin^2\alpha}}{n_{c1}^2}\right)^{1/2} \tag{15}$$

$$\sigma_3=\sqrt{6}\,\frac{\eta r_a\sin\alpha}{\sqrt{n_{c1}}} \tag{16}$$

$$\sigma_4=\sqrt{6}\,\frac{h}{r_a\sqrt{n_{c1}}} \tag{17}$$

$$\sigma_5=\sigma_6=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{n_1}{n_{c1}}-\frac{\sqrt{n_1^2-4h^2\eta^2\sin^2\alpha}}{n_{c1}^2}\right)^{1/2} \tag{18}$$

式中:

$$n_1=1+\eta^2-2\eta\cos\alpha+h^2\eta^2 \tag{19}$$

$$n_{c1}=h^2/r_a^2+1+\eta^2-2\eta\cos\alpha \tag{20}$$

3　各向同性解析结果

对雅可比矩阵的各奇异值进行分析比较, 可得其最大、最小奇异值分别为

$$\sigma_M=\begin{cases}\sigma_1=\sigma_2 & h/r_a\geq\sqrt{2}\sin\alpha\\ \sigma_3 & h/r_a<\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases} \tag{21}$$

$$\sigma_m=\sigma_5=\sigma_6 \tag{22}$$

因此, 由式(6) 可得传感器的雅可比矩阵条件数(各向同性指标) 为

$$C_n=\begin{cases}\dfrac{n_1+\sqrt{n_1^2-4h^2\eta^2\sin^2\alpha}}{2h\mu\sin\alpha}, & h/r_a\geq\sqrt{2}\sin\alpha\\[2ex] \dfrac{2r_a\eta\sin\alpha}{\sqrt{n_1-\sqrt{n_1^2-4h^2\eta^2\sin^2\alpha}}}, & h/r_a<\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases} \tag{23}$$

将上式展开, 并忽略微小量, 可化简得

$$C_n=\begin{cases}\dfrac{h\eta}{\sin\alpha} & h/r_a\geq\sqrt{2}\sin\alpha\\ \sqrt{2}\,r_a\eta & h/r_a<\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases} \tag{24}$$

与式(23) 的精确结果相比, 式(24) 的最大误差小于 0.1, 因此完全可以用式(24) 来衡量传感器的各向同性。且由式中可看出, 传感器的各向同性仅与平台的高度 h, 上下平台的半径 r_a, r_b, 结构扭角 α(或上下平台的定位角的和) 有关, 而与上下平台各自具体的定位角无关, 这与文献[8] 中的结论是相一致的。且当满足 $h/r_a\geq\sqrt{2}\sin\alpha$ 时, 传感器的条件数仅与平台的高度, 上下平台的半径比及平台的结构扭角有关, 且随着 α 的增大(即上下平台定位角减小) , 传感器的各向同性逐渐变好, 当上下平台的定位角均为零时, 传感器的各向同性取得最佳, 条件数仅与平台的高度及上下平台半径的比值有关, 且与它们成正比的关系。而当满足 $h/r_a<\sqrt{2}\sin\alpha$ 时, 传感器的条件数仅与上下平台的半径有关, 且与上下平台的半径比成正比关系, 而与结构扭角和高度无关。即相对固定的结构扭角和高度而言, 条件数为一恒值。

图 2 所示为某一下平台半径为 100mm, 上平台定位角为 10°, 下平台定位角为 5 的六维测力传感器其条件数与上下平台的半径比、平台的高度之间的关系曲线, 由图中可看出, 其条件数为一条在 $h/r_a=\sqrt{2}\sin\alpha$ 处有拐点的连续曲线, 且减小上下平台的半径比可使传感器的各向同性明显变优。同时从优化各向同性的角度出发, 应尽量使传感器的结构参数满足 $h/r_a<\sqrt{2}\sin\alpha$, 此时可获得最佳的各向同性性能。这与以上的分析结果是相一致的。

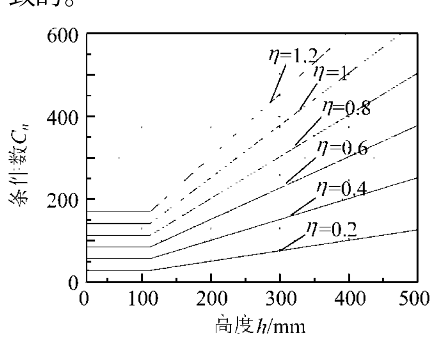

图 2　条件数与平台高度、半径比的关系

Fig. 2　Relationship between condition number and height, radius ratio of platform

4　结　论

本文对基于 Stewart 平台的六维力/ 力矩传

感器的雅可比矩阵作了解析推导,求出了雅可比矩阵的各奇异值,用矩阵谱范数的形式构造了各向同性的解析形式,得到如下结论:

(1) Stewart 平台六维力/力矩传感器雅可比矩阵与其转置的乘积为一稀疏矩阵,利用这一性质可求出矩阵的各奇异值,且用各奇异值可构造出传感器各向同性的评价指标。此外,各奇异值还可用来构造平台的行列式指标等。

(2) 传感器的各向同性与上下平台具体的定位角 θ_1, θ_2 大小无关,而只与两定位角之和以及平台的高度 h、上下平台各自的半径 r_b, r_a 有关。

(3) 当采用矩阵谱范数计算的条件数来衡量传感器的各向同性时,传感器的各向同性在 $h/r_a=\sqrt{2}\sin\alpha$ 处有突变。为使传感器有较好的各向同性,应尽量使传感器的结构尺寸满足 $h/r_a<\sqrt{2}\sin\alpha$,此时传感器的各向同性仅与上下平台的半径有关,同时为获得较好的各向同性,应尽可能地减小下平台的半径以及上下平台的半径比。

(4) 当由于具体的使用结构限制,使得传感器的 $h/r_a\geq\sqrt{2}\sin\alpha$ 时,传感器的各向同性仅与其高度、上下平台的半径比及结构扭角有关。此时为获得获得较好的各向同性,应尽可能减小平台的高度及上下平台半径比,或增大平台的结构扭角。

(5) 以上结论同样适用于 Stewart 并联机器人,飞行模拟器六自由度运动系统等并联机构局部灵活度的解析研究。

参 考 文 献

[1] 张崇峰. 空间对接六自由度半物理仿真的研究[J]. 航天控制, 1999(1): 70- 74.
(Zhang C F. Study on six-degree-of-freedom simulation for docking[J]. Spaceflight Control, 1999(1): 70- 74.)

[2] Doebelin E O. Measurement system applications and design [M]. New York: McGraw Hill, 1985. 25- 28.

[3] Diddens D, Reynaerts D, Rrussel H B. Design of a ring-shaped three-axis micro force/torque sensor[J]. Sensors and Actuators A, 1995, 46-47: 225- 231.

[4] Uchiyama M, Bayo E, Palma-Villalon E. A systematic design procedure to minimize a performance index for robot force sensors[J]. Trans ASME Journal of Dynamic System, Measurement, and Control, 1991, 113: 194- 388.

[5] Bicchi A. A criterion for optimal design of multi-axis force sensors[J]. Robotics and Autonomous Systems, 1992, 10(4): 269- 286.

[6] Bayo E, Stubbe J R. Six-axis force sensor evaluation and a new type of optimal frame truss design for robotic applications[J]. Journal of Robotic Systems, 1989, 6(2): 191- 208.

[7] Wang H R, Cao F, Huang Z. Design of 6-axis force/torque sensor based on Stewart platform related to isotropy[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1998, 11(3): 217- 222.

[8] 王洪瑞, 陈贵林, 高峰, 等. 基于 Stewart 平台的六维力传感器各向同性的进一步分析[J]. 机械工程学报, 2000, 36(4): 49- 52.
(Wang H R, Chen G L, Gao F, *et al*. Analysis of 6-axis force/torque sensor based on Stewart platform related to isotropy[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2000, 36(4): 49- 52.)

[9] 黄真, 孔令富, 方跃法. 并联机器人机构学理论及控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997: 183- 186.
(Huang Z, Kong L F, Fang Y F. Theory and control of mechanism on parallel robot[M]. Beijing: Machine Engineering Press, 1997. 183- 186.)

作者简介:

赵克定(1941-) 男,天津人,哈尔滨工业大学机电学院教授,博士生导师,主要从事液压、气动元件及其控制系统和高性能仿真设备的研究,曾获部科技进步一等奖一项,二等奖两项,三等奖一项,省优秀教学成果一等奖一项,二等奖两项。已发表科研论文一百余篇。

杨灏泉(1974-) 男,云南人,哈尔滨工业大学机电学院博士研究生,主要从事流体传动及控制、六自由度并联机构等方面的研究。已发表科研论文九篇。

吴盛林(1938-) 男,辽宁大连人,哈尔滨工业大学机电学院教授,博士生导师,主要从事液压、气动元件及其控制系统和高性能仿真设备研究。