

文章编号: 1000-6893(2002) 02-0166-04

可压缩非平行流边界层稳定性研究

唐登斌, 马前容, 成国玮

(南京航空航天大学 空气动力学系, 江苏 南京 210016)

STUDY OF COMPRESSIBLE NONPARALLEL FLOW STABILITY FOR BOUNDARY LAYERS

TANG Deng-bin, MA Qian-rong, CHEN Guo-wei

(Department of Aerodynamics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

摘 要: 采用线性稳定性理论和多重尺度方法, 研究三维可压缩的非平行流边界层稳定性问题。分析了可解条件的特征, 导出精确计算所需的伴随问题方程渐近外边界条件的矩阵表达式, 给出有控制的重正化方法, 以有效地克服刚性方程在积分求解中的困难。探讨与非平行性作用相关的方程和影响因素, 特别是新的特征函数畸变对扰动增加率的作用。通过算例, 清楚地显示了流动的非平行性对边界层稳定性的影响。

关键词: 非平行流; 边界层稳定性; 三维; 可压缩流; 多重尺度法

中图分类号: O357.41; V211.18 **文献标识码:** A

Abstract: The compressible linear stability theory and the method of multiple scales are used to study the problem of three dimensional nonparallel flow stability for boundary layers. Solvability condition is analyzed. A matrix expression of the asymptotic edge boundary condition, which is used to exact numerical computation, is derived. A controlled renormalization method is used, in order to resolve the difficulty due to the stiff feature of these equations. The related equations and elements to nonparallelism are studied, including specifically the effect of new distortion of the eigenfunction on the disturbance growth rate which is important for boundary layer stability. The examples presented clearly show the effect of nonparallel flow on boundary layer stability.

Key words: nonparallel-flow; boundary layer stability; three dimensions; compressible flow; multiple scales method

对于三维可压缩流边界层稳定性研究, 通常采用平行流线性稳定性理论, 然而这种边界层基本流动是平行的近似假设有时不能确切表述实际现象, 与实验结果也存在差异, 从而影响到边界层稳定性和转捩问题的准确计算和研究。稳定性问题的深入研究表明, 需要考虑边界层流动的非平行性问题^[1](一般很弱, 又称“弱非平行性”), 所谓非平行性, 是指边界层内基本流垂直于物面的法向分速度与其它方向分速度相比是小量; 以及基本流的变量是沿流向(x)和展向(z)位置的弱函数。Bouthier 首先用多重尺度摄动技术在分析边界层线性稳定性时考虑了主流的非平行性, 其后 Gaster, Saric, Nayfeh 和 Morris 等人作了进一步的探讨和发展^[2]。文中采用多重尺度的有效方法, 导出非平行性对出现在稳定性研究中的特征值问题的修正, 将对扰动的发展给出一个更精确的数学模型, 其方法可直接用于研究飞机机翼流

动稳定性等类型的航空实际问题。

1 非平行流边界层稳定性方程组

采用多重尺度方法, 在流向和展向引进慢尺度 $x_1 = \epsilon x$ 和 $z_1 = \epsilon z$, 用来描述相对变化较慢的边界层增长、扰动的振幅和增长率等, 而扰动的相位变化则随快尺度 x, z 变化。这里: ϵ 是表征基本流动的弱非平行性的一个无量纲小参数; 为简便而不考虑基本流动随时间的变化。

把扰动量写成行进波形式

$$q(x_1, y, z_1, t; \epsilon) = [q_0(x_1, y, z_1) + \epsilon q_1(x_1, y, z_1) + \dots] e^{i[\alpha_0(x_1, z_1)x + \beta_0(x_1, z_1)z - \omega t]} \quad (1)$$

代入从 N-S 方程出发推得的扰动所满足的方程, 并按 ϵ 幂次方的系数展开整理, 分别得到平行流的、非平行流的稳定性方程组。在平行流稳定性问题研究的基础上^[3], 着重研究三维可压缩非平行流稳定性问题。其方程组可写成如下形式

$$\left. \begin{aligned} L_i(u_1, v_1, w_1, P_1, T_1) &= I_i \quad i = 1, \dots, 5 \\ u_1 = v_1 = w_1 = T_1 &= 0 \quad \text{在 } y = 0 \text{ 时} \\ u_1, v_1, w_1, T_1 &= 0 \quad \text{在 } y \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

收稿日期: 2001-02-13; 修订日期: 2001-07-01

基金项目: 航空基础科学基金资助项目(94A52013)

文章网址: <http://www.cnki.net/acta/et/2002/02/0166/>

Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

这里的算子 L_i 同平行流稳定性问题研究的算子, 非齐次项 $I_1 \sim I_5$ 是非平行流边界层稳定性方程组中的连续方程、动量方程和能量方程中的非齐次项^[4]。这些非齐次项反映了扰动振幅、基本流法向分速以及波数的流向、展向变化而产生的影响。

式(2)中: u_1, v_1, w_1, p_1, T_1 (对应于式(1)中的 q_1) 分别为边界层的流向、法向和展向分速度和压强、温度; α, β 为波数在 x 向、 z 向分量; 引入振幅函数 A 、特征函数 ζ 和 q_0 的如下关系式

$$q_{0i}(x_1, y, z_1) = A(x_1, z_1)\zeta_i(x_1, y, z_1) \quad (3)$$

进一步把三维可压缩非平行流边界层稳定性方程推演为一阶微分方程组形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_{li}}{dy} - \sum_{j=1}^8 a_{ij}z_{lj} &= M_i & i &= 1, \dots, 8 \\ z_{11} = z_{13} = z_{15} = z_{17} &= 0 & \text{在 } y = 0 \text{ 处} \\ z_{11}, z_{13}, z_{15}, z_{17} &= 0 & \text{在 } y \text{ 处} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: z_{li} 的 8 个分量依次为 $u_1, \partial u_1 / \partial y, v_1, P_1, T_1, \partial T_1 / \partial y, w_1$ 和 $\partial w_1 / \partial y$; a_{ij} 是 (8×8) 阶变系数矩阵, 与平行流齐次问题所对应的系数相同; 非齐次项 M_i 和 I_i 等有关, 可分别导出。

2 数值计算方法

(1) 可解条件和伴随问题 非齐次方程组

(4) 有解的必要和充分条件是必须满足可解条件, 这对非平行稳定性问题研究至关重要。研究表明, 非平行流稳定性方程所对应的齐次方程和平行流的方程形式一样, 因而在平行流问题有非零解时, 则非平行流问题存在可解条件, 根据这一特征可导出与非平行影响紧密相关的波振幅方程和波数方程及其扰动空间增长率。满足该条件, 即方程非齐次项 M_i 和伴随问题的解 W_i^* 正交

$$\int_0^8 M_i W_i^* dy = 0 \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} W_i^*(x_1, y, z_1) \text{ 满足下列伴随方程} \\ \frac{\partial W_i^*}{\partial y} - \sum_{j=1}^8 \bar{a}_{ij} W_j^* &= 0 & i &= 1, \dots, 8 \\ W_2^* = W_4^* = W_6^* = W_8^* &= 0 & \text{在 } y = 0 \text{ 处} \\ W_2^*, W_4^*, W_6^*, W_8^* &= 0 & \text{在 } y \text{ 处} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: $\bar{a}_{ij} = -a_{ji}$ 。

在求解方程式(6)时, 不能从无穷远处渐近形式的外边界条件(见式(4))开始积分。根据在外边界上主流物理量与 y 无关及其相关导数为零的特点、求出特征向量矩阵及其逆矩阵, 并采用转置形式和系列推导, 得到了可用于精确数值计算的外边界条件的矩阵表达式

$$w_j = \sum_{j=1}^8 \Lambda_{ij}^* C_j^* \exp(\lambda_j y) \quad j = 1, 2, \dots, 8 \quad (7)$$

式中: λ_j 为代入外边界值后的方程系数矩阵的特征值; Λ_{ij} 为其相应的特征向量; C_j^* 可由无穷远处扰动量为零的条件而定出的系数。

采用重正化(Renormalization)方法, 是求解刚性方程式(6)的一个关键性问题。文中采用与积分算法 GERK 有关的综合误差法来有效地克服该刚性方程在积分求解中的困难, 它将边界条件转化成积分每一步都能满足的近似条件, 既减少计算量, 又能灵活地控制正交化的次数和位置。与改进后的 Gram-Schmidt 方法相一致, 本文从平衡效率和精度出发, 以满足如下两个不等式之一为正交化条件, 即

$$\left. \begin{aligned} u_j^{(i-1)} &< \tilde{\epsilon} y_j \\ v_{\text{new}} &< \tilde{\epsilon} v_{\text{old}} \end{aligned} \right\} \quad j = 2, \dots, r \quad (8)$$

式中: $\tilde{\epsilon}$ 为确定解向量是否线性相关的参数, 若 $\tilde{\epsilon}$ 较大则对应着线性相关。并由此可进一步导出并设定与 $\tilde{\epsilon}$ 相关的不等式判据。

在积分过程中只要不等式判据得到满足, 则积分中断, 进行正交化, 并自动修正误差值 $\tilde{\epsilon}$, 然后重新从边界开始积分, 直到解向量在整个积分区域都满足预定的精度要求为止。

考虑到方程式(6)与方程式(4)对应的齐次问题(即平行流稳定性方程组)有相同特征值, 进而求得该伴随问题的解 W_i^* 。

(2) 波振幅方程 将求解伴随问题的中的有关量代入可解条件式(5), 可以得到波振幅的微分方程

$$Q_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} + Q_2 \frac{\partial A}{\partial x_2} + H_1 A = 0 \quad (9)$$

式中: Q_1 和 Q_2 是正比于群速度 $(\partial w / \partial \alpha, \partial w / \partial \beta)$ 的分量; H_1 反映了非平行性的影响, 包括基本流参数的导数、特征函数 ζ 的导数以及波数 α, β 的导数。

对应于方程式(4)的齐次问题, 用 ζ 代替式中 z_{li} , 并对 x_1 求导, 可得如下方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \right] - \sum_{j=1}^8 a_{ij} \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_1} - \sum_{j=1}^8 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_1} \zeta_j &= 0 \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_1} = \frac{\partial \zeta_4}{\partial x_1} &= 0 & \text{在 } y = 0 \text{ 处} \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \zeta_4}{\partial x_1} &= 0 & \text{在 } y \text{ 处} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

类似地, 可以得到 $\partial \zeta_j / \partial x_1$ 所满足的微分方程。对

于上述特征函数导数的非齐次方程, 通过可解条件, 还可以导出波数(α_0, β_0) 所满足的方程。

(3) 扰动空间增长率 在流动稳定性研究中, 扰动空间增长率的确定极为重要, 直接关系到边界层的流态和转捩, 其增长方向有不同计算方法, 这里用射线方程

$$\frac{dz}{dx} = \frac{Q_2}{Q_1} = \text{—实数} \quad (11)$$

来定义扰动波振幅的增长方向^[1], 式中: $Q_1 = dx_1/d\xi$, $Q_2 = dz_1/d\xi$

非平行流扰动增长率比平行流的复杂得多^[2], 这里用下式表达

$$\sigma_n = -\text{Imag}(\sigma_0 + \epsilon\sigma_1 + \epsilon^2\sigma_2) + o(\epsilon^2) \quad n = 1, \dots, 8 \quad (12)$$

式中: $-\text{Imag}(\sigma_0)$ 是平行流的扰动空间增长率; σ_1, σ_2 反映非平行性对扰动增长率的影响, 由下式给出

$$\left. \begin{aligned} \epsilon\sigma_1 &= -i \left\{ \frac{1}{A} \frac{dA}{d\xi} \right\} \\ \epsilon^2\sigma_2 &= -i \left\{ \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\xi} \right\}, n = 1, \dots, 8 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

利用式(9), 则扰动空间增长率式(12)可进一步写成

$$\sigma_n = -\sigma_{0i} - \epsilon\sigma_{1i} + \epsilon^2\sigma_{2i} \quad n = 1, \dots, 8 \quad (14)$$

式中: $\sigma_{0i} = i(H_1)$; $\sigma_{ni} = \left[\frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\xi} \right]_r$, 下标 i, r 分别为虚部和实部。

若不考虑基本流的展向变化, 即只与 x_1 有关, 则有关方程得到简化。需要指出的是: 式(14)的第 2, 3 项一起给出了对平行流扰动增长率的非平行修正, 第 2 项不依赖于 y , 而第 3 项, 即由特征函数畸变而引起的, 不仅与 x, y 相关, 而且也是流动的物理量的函数, 文中选用 x 向质量流扰动 ζ 作这样的一个物理量

$$\zeta(x_1, y) = \frac{u_0}{T_0} [rMa^2 \zeta - \frac{\zeta_1}{T_0}] + \frac{\zeta_2}{T_0} \quad (15)$$

3 结果与讨论

通过算例, 着重研究非平行性对边界层稳定性影响。算例 1 为平板绕流问题, $Ma = 0.8, T = 288.15K, P = 1.01 \times 10^5 Pa_0$ 。

图 1 给了不可压缩平行流的扰动空间增长率(σ) 随频率(无量纲量 f) 的变化, 并给出了非平行性的影响, 这个影响是很明显的, 且随扰动频率不同而变化, 在某个频率下, 这个差值可达最大值。可压缩流稳定性计算结果显示在图 2 中, 与对应

的不可压缩流结果(图 1) 相比可见, 压缩性的作用使得扰动增长率减弱, 尽管这时的非平行性对增长率的影响仍然是显著的。

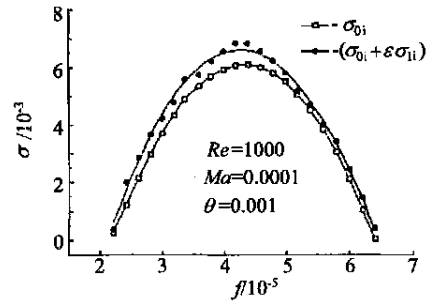


图 1 不可压缩流的空间增长率随频率的变化
Fig. 1 Variation of the spatial growth rate with frequency at incompressible flow

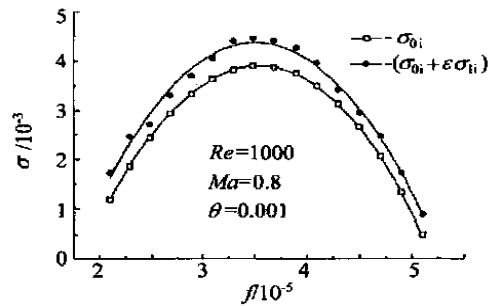


图 2 可压缩流的空间增长率随频率的变化
Fig. 2 Variation of the spatial growth rate with frequency at compressible flow

由图 3 可以看到边界层内特征函数随法向位置的变化: 在离壁面不远处存在一个峰值, 并在其附近有急剧变化, 其后又随离壁面距离增加而迅速衰减, 在不远处后扰动趋于 0。在图中还显示了质量流特征函数的峰值是随雷诺数 Re (特征长度为边界层位移厚度) 不同而异的, 当雷诺数增加时, 逐渐向壁面靠近。包括特征函数畸变影响在内的不同扰动空间增长率随雷诺数的变化曲线在图 4 中, 曲线 1, 2, 3 分别为平行流的、平行流加第 1 项非平行性修正以及再加第 2 项非平行性修正的结果。由图

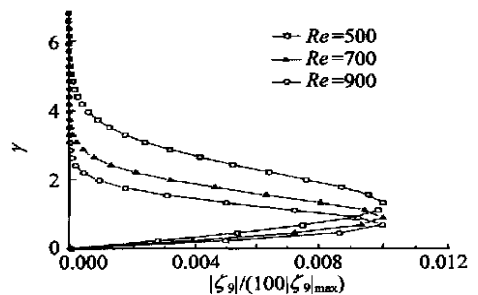


图 3 边界层质量流特征函数随法向坐标的变化
Fig. 3 Variation with the normal coordinate of the mass flow amplitude in the boundary layer

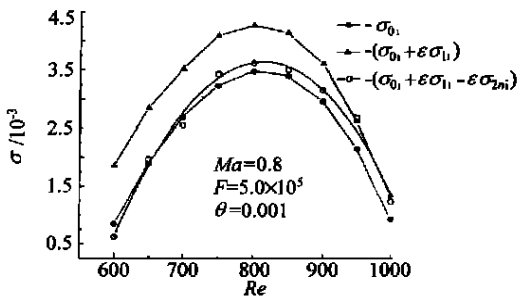


图 4 空间增长率随雷诺数的变化

Fig. 4 Variation of the spatial growth rate with Reynolds number

可见, 有关非平行性的第 2 项修正(特征函数畸变影响) 常常会减少第 1 项的过度修正量。

对于一个带超临界翼型的无限翼展机翼的算例^[5] (后掠角 35°; $Ma = 0.891$), 由图 5 给出了空间增长率随波数 (K) 变化的二项非平行修正情况, 所示结果同样证实了非平行性影响的第 2 项能改变第 1 项的过度修正。最后, 在图 6 中给出了本文计算结果与考虑非平行影响的有关文献^[6] 的数据比较, 两者符合甚好。

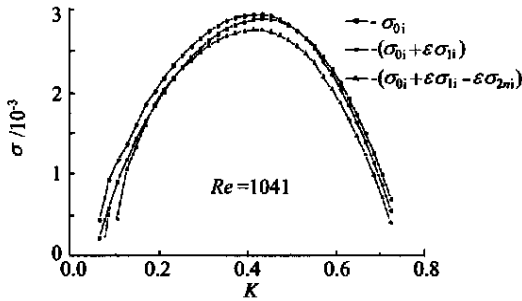


图 5 空间增长率随波数的变化

Fig. 5 Variation of the spatial growth rate with wave number

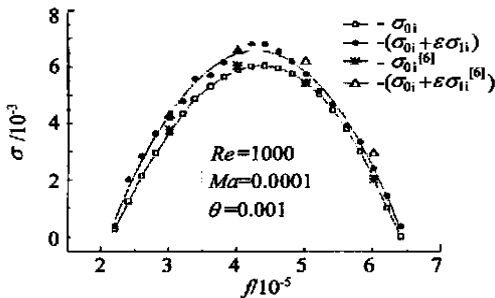


图 6 空间增长率随频率的变化

Fig. 6 Variation of the spatial growth rate with frequency

参 考 文 献

[1] El-Hady N M. On the stability of three dimensional compressible nonparallel boundary layers [R]. NASA CR-3247, 1980

[2] Singer B A, Choudhari M. Multiple scales approach to weakly nonparallel and curvature effects: details for the Novice [R]. NASA CR-198199, 1995

[3] Nayfeh A H. Stability of three dimensional boundary layers [J]. AIAA J, 1980, 18(4): 406- 416.

[4] 马前容. 三维可压缩非平行流边界层稳定性问题研究 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 1998.
(Ma Q B. The nonparallel stability of three dimensional compressible boundary layer flow [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 1998.)

[5] 唐登斌. 后掠翼可压缩三维边界层稳定性计算 [J]. 航空学报, 1992, 13(1): A1- A7.
(Tang D B. The calculation of three dimensional compressible boundary layer stability on swept wings [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica. 1992, 13 (1): A1 - A7.)

[6] El-Hady N M. Nonparallel instability of supersonic and hypersonic boundary layers [R]. NASA CR 4373, 1991.

作者简介:



唐登斌 南京航空航天大学空气动力学系教授, 博士生导师, 研究方向: 边界层及稳定性, 非定常动失速, 飞机减阻技术等。



马前容 硕士, 现工作单位: 中国燃气涡轮研究院。研究方向: 流动稳定性, 叶轮机械内流场计算。

成国玮 硕士, 现工作单位: 上海航空公司。研究方向: 流动稳定性, 非定常空气动力学。

(责任编辑: 吴小勇)