文章编号: 1000-6893(2002) 02-0158-04

一种通用的冲击分析模型及低速冲击响应计算

段世慧[1], 叶天麒[2]
(1. 中国飞机强度研究所, 陕西 西安　710065)
(2. 西北工业大学 飞机系, 陕西 西安　710072)

GENERAL IMPACT ANALYSIS MODEL AND LOW-VELOCITY IMPACT RESPONSE ALGORITHM

DUAN Shi-hui[1], YE Tian-qi[2]
(1. Aircraft Strength Research Institute of China, Xi'an　710065, China)
(2. Department of Aircraft, Northwestern Polytechnical University, Xi'an　710072, China)

摘　要: 提出了一种通用的冲击分析模型, 该模型采用连续介质理论描述, 用拖带坐标定义摩擦冲击约束, 用虚功原理定义冲击控制方程, 可以作为不可刺穿型冲击问题的有限元求解基础。在此模型基础上, 针对低速冲击问题, 给出了采用自适应罚函数增广 Lagrange 迭代处理接触力的有限元求解方法, 既保证计算精度, 又有效抑制算法震荡, 并用算例进行了验证。

关键词: 冲击模型; 摩擦接触; 有限元
中图分类号: O313.4; O242.21　　　文献标识码: A

Abstract: A general model for impact analysis is presented. Based on the continuum theory, the frictional impact constraint is considered with co-moving coordinates, and the virtual work principle is utilized to formulate the governing equations. The theory and algorithms can be used as the basis of impenetrable contact-impact analysis. A low-velocity impact analysis has been accomplished by using FEM algorithms developed in this paper. An augmented Lagrange iteration with adaptive penalty is proposed to ensure the accuracy and to depress the oscillation of the numerical algorithm. Some examples demonstrate the efficiency of the model and the analysis methods.

Key words: impact model; frictional contact; finite element method

在航空工程领域, 存在许多人们关心的冲击现象。由于其高度非线性及不连续性态, 冲击问题的求解具有独特的困难。根据不同的研究方向和目的, 已提出了多种冲击分析模型, 如准静力模型、Hertz 模型、接触- 冲击模型。近来, Lausen 等人提出了静接触问题的连续介质力学模型[1], 含接触约束的控制方程建立在连续介质力学基础上, 然后再推导成有限元格式。因此, 与其他模型相比, 该模型更加通用, 而且适用于任意离散形式。本文将在此基础上, 提出摩擦动接触- 冲击问题连续介质力学模型。

复合材料冲击响应分析是损伤容限设计的基础, 对于这类低速冲击问题, 常采用隐式有限元方法。但具有二阶精度的梯形规则产生很大的振荡, 且随时间步及空间离散的细化变得更糟[2]。对此人们提出了若干修正 Newmark 方法, 如基于线弹性材料的波动修正[3], 将新接触强迫等效为持续接触等[4]。也有人采取数值阻尼、高频耗散、以及能量守恒法[5]。本文提出了自适应增广 Lagrange 迭代法, 自动选择调整罚数, 使算法既能保证计算精度, 又能较快收敛; 以接触面之间的速度场描述接触条件, 与以往的以两冲击物接触面之间的位移场描述接触条件模型相比, 不仅更符合物理上不可刺穿条件, 而且可以减小冲击接触算法的振荡。

1　动接触- 冲击问题描述及符号说明

考虑 2 个空间三维弹性体的冲击情况。采用拉格朗日描述, 两弹性体初始所占空间表示为 $\Omega^{(1)}$ 和 $\Omega^{(2)}$ (如图 1 所示)。假设两弹性体在时间 $t = 0$ 时或没有接触, 或没有产生接触力。随后的构形由 $\varphi^{(1)}$ 和 $\varphi^{(2)}$ 表示, 在某个时间段内物理上接触并产生接触力。对任一时间 t 的这种构形表示为 $\varphi^{(i)}$, $i = 1, 2$。

包含所有可能接触的质点的物体边界用 Γ

收稿日期: 2001-05-21; 修订日期: 2001-08-05
基金项目: 航空科学基金资助项目
文章网址: http://www.hkxb.net.cn/hkxb/2002/02/0158/

和 $\Gamma^{(2)}$ 表示(图 1)。本文将边界 $\Gamma^{(1)}$ 上的质点用 X 表示, 边界 $\Gamma^{(2)}$ 上的质点用 Y 表示, 其对应的空间位置由 $x=\varphi^{(1)}(x)$ 和 $y=\varphi^{(2)}(Y)$ 给出。

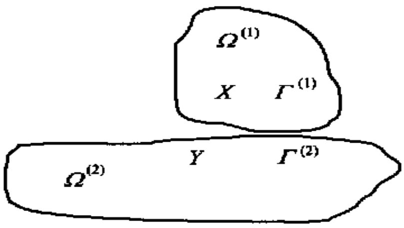

图 1　摩擦接触问题符号示意

Fig. 1　Frictional contact-impact problems

2　正接触及摩擦接触约束

在定义接触约束之前, 约定 $\Gamma^{(1)}$ 为辅表面而 $\Gamma^{(2)}$ 为主表面。对于一个给定主表面变形, $\gamma^{(2)}=\varphi^{(2)}(\Gamma^{(2)})$, 需要定义一个所有质点 $X\in\Gamma^{(1)}$ 都不会刺穿的面。

为了利用连续介质理论描述接触条件, 首先在主表面定义一个二维拖带坐标(α^1,α^2), 其中任意一点 ξ 在 t 时刻拖带坐标基可选为其空间基向量。

$$\tau_\alpha=\boldsymbol{b}_\alpha(\xi),\ \alpha=1,2 \tag{2}$$

其中: $\boldsymbol{b}_\alpha(\xi)$ 是与 ξ 点构形相关空间基向量。其对应空间法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\tau_1\times\tau_2)/\|\tau_1\times\tau_2\| \tag{3}$$

引入间隙函数的概念。顾名思义, 间隙函数就是定义接触面上两个接触(或将要接触)的点之间的位置关系函数。对于给定变形 $\varphi^{(1)}$ 和 $\varphi^{(2)}$, 对于所有质点 $X\in\Gamma^{(1)}$, 在任何时刻, 总可以找到一个点 $\bar{Y}\in\Gamma^{(2)}$, 使式 $\min\limits_{Y\in\Gamma^{(2)}}\|\varphi^{(1)}(X,t)-\varphi^{(2)}(Y,t)\|$ 成立。则称 X 与 $\bar{Y}$ 为该时刻的一个接触(或将要接触)点对。法向间隙函数 g 定义为

$$\boldsymbol{g}(X,t)=[\varphi^{(1)}(X,t)-\varphi^{(2)}(\bar{Y},t)]\boldsymbol{n} \tag{4}$$

切线方向用间隙率描述

$$\dot{g}_{\mathrm{T},\alpha}=[\boldsymbol{V}^{(1)}(X,t)-\boldsymbol{V}^{(2)}(\bar{Y}(X,t),t)]\tau_\alpha \tag{5}$$

其中: $\boldsymbol{V}^{(1)}$ 及 $\boldsymbol{V}^{(2)}$ 为质点速度; τ_α 为逆变基流动坐标。逆变基向量与协变基向量有如下关系式

$$\tau_\alpha=\boldsymbol{b}_{\alpha\beta}\tau_\beta \tag{6}$$

其中: $\boldsymbol{b}_{\alpha\beta}$是协变基的度量张量。

接触力可以分解为正接触力和切向接触力两部分, 切向力也用逆变基表示

$$\boldsymbol{T}^{(1)}(X,t)=T_{\mathrm{N}}(X,t)\boldsymbol{n}+T_{\mathrm{T}1}(X,t)\boldsymbol{\tau}^1+T_{\mathrm{T}2}(X,t)\boldsymbol{\tau}^2 \tag{7}$$

其中: $T_{\mathrm{N}}(X,t)$ 表示 X 点的接触压力, 定义其压力为正。同时定义 $\boldsymbol{g}(X,t)$ 刺穿方向为正。于是, 正接触的 Kuhn-Tucker 条件为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{g}(X,t)\le 0;\ T_{\mathrm{N}}(X,t)\ge 0\\&T_{\mathrm{N}}(X,t)g(X,t)=0;\\&T_{\mathrm{N}}(X,t)\dot{g}(X,t)=0;\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

式(8)反映了不可刺穿条件、压接触力为正约束、当仅当 $g=0$ 时接触压力非零约束、及持续接触条件。持续接触条件式(8)要求, 仅当间隙随时间变化率为零时才有接触力存在。

利用 Coulomb 摩擦定律可给出摩擦接触约束的描述。当处于静止摩擦状态时

$$\dot{g}_{\mathrm{T}}=0 \tag{9}$$

当处于滑动摩擦状态时

$$\|\boldsymbol{T}_{\mathrm{T},b}\|-\mu T_N=0 \tag{10a}$$

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{T},b}-\zeta\frac{\boldsymbol{T}_{\mathrm{T},b}}{\|\boldsymbol{T}_{\mathrm{T},b}\|}=0 \tag{10b}$$

其中: μ 是 Coulomb 摩擦系数; ζ是一个正整数。$\boldsymbol{T}_{\mathrm{T},b}$和 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T},b}$是逆变基下摩擦力和相对速度矢量

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{T}_{\mathrm{T},b}(X,t)=T_{\mathrm{T}\alpha}(X,t)\tau_\alpha\\&\boldsymbol{V}_{\mathrm{T},b}(X,t)=\boldsymbol{b}_{\alpha\beta}\dot{g}_{\mathrm{T},\beta}\tau_\alpha\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

可以看出, 式(10a)定义了 Coulomb 摩擦力的大小, 式(10b)定义了 Coulomb 摩擦力的方向。注意到公式推导时, 接触力指 $\Gamma^{(1)}$ 上任一质点 X 对 $\Gamma^{(2)}$ 产生的接触力, 速度 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T},b}$是质点 X 在 $\Gamma^{(2)}$ 上滑动速度, 则 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T},b}$与 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{T},b}$同向, 定义了滑动时摩擦力与相对速度的方向关系。

3　控制方程

根据问题的 Lagrange 描述, 并考虑到接触面两物体的接触力大小相等, 方向相反, 可对两物体构成的系统写出总体虚功原理

$$\int_\Omega\rho_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2}\varphi\,\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega P_{\mathrm{t}}^{(i)}:\mathrm{grad}[\varphi]\,\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega f_{\mathrm{t}}\varphi\,\mathrm{d}\Omega-\int_\sigma\bar{T}_{\mathrm{t}}\varphi\,\mathrm{d}\Gamma_\sigma=\int_{\Gamma^{(1)}}T_{\mathrm{t}}^{(1)}\cdot(\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)})\,\mathrm{d}\Gamma^{(1)} \tag{12}$$

其中 grad 表示求梯度, 对于方程右端项, 即接触力虚功项, 可利用上节接触边界条件, 采用罚函数法或 Lagrange 乘子法施加。常规接触约束的罚函数法可表示为

$$\left.\begin{aligned}&T_{\mathrm{N}}=\epsilon_{\mathrm{N}}\langle g\rangle\\&\dot{T}_{\mathrm{T}\alpha}=\epsilon_{\mathrm{T}}[\boldsymbol{b}_{\alpha\beta}\dot{g}_{\mathrm{T},\beta}]\quad\text{未滑动时}\\&\|\boldsymbol{T}_{\mathrm{T},b}\|=\mu T_{\mathrm{N}}\quad\text{滑动时}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中: ϵ_N 为正接触罚数; $\langle g \rangle$表示取 g 为正的部分; ϵ_T 为切向罚数。式(12)及约束条件式(8),式(9),式(10)定义了一个连续介质力学描述的通用冲击分析模型。

4 线弹性冲击有限元公式

对于线弹性分析,若两冲击体系统无其他外力作用,则有限元方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{F}_c = 0 \tag{14}$$

其中: $\boldsymbol{M}$ 为系统质量矩阵; $\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵; $\boldsymbol{U}$ 为位移向量; $\boldsymbol{F}_c$ 为冲击力向量。对于接触面的任一个元素表面(即 $\Gamma^{(1)}$ 上的一个分片),冲击力矩阵为

$$\boldsymbol{f} = \oint \boldsymbol{T}_t^{(1)}\{N^{(1)}(X),\ -N^{(2)}(\bar{Y})\}\mathrm{d}s \tag{15}$$

其中: $N^{(1)}$ 和 $N^{(2)}$ 是两接触点对应的元素表面形函数。可用直接积分法Newmark求解方程(14)。注意到尽管为线弹性冲击,$\boldsymbol{F}_c$ 是位移的函数,方程仍是非线形方程。本文采用自适应增广Lagrange迭代法处理该非线形问题。

$$T_{N,(k+1)} = H(g_{(k+1)}) < T_{N(k)} + \epsilon_N \dot{g}_{(k+1)} >$$

$$T_{T,(k+1)} = \begin{cases} H(g_{(k+1)})(T_{T,(k)} + \epsilon_T \dot{g}_{T,(k+1)}) \\ \qquad\qquad 未滑动时 \\ \mu T_{N,(k+1)} \qquad 滑动时 \end{cases} \tag{16}$$

这里 k 是每个时间步内的Lagrange迭代次,函数 H 为

$$H(g) = \begin{cases} 0 & g < 0 \\ 1 & g \geq 0 \end{cases} \tag{17}$$

当两次迭代接触力相对误差小于某一个容许限时,迭代停止,转入下一个时间步计算。

可以看到,式(16)用间隙速度 $\dot{g}$ 替代了式(13)中的间隙函数,体现了冲击接触特点,也是与静接触边界的不同之处。同时,它满足不可刺穿条件及持续接触条件,可减小冲击接触Newmark算法振荡。

为了调整罚数 ϵ, 定义一个调整函数,使

$$\epsilon_{(k+1)} = f(R)\epsilon_{(k)} \tag{18}$$

其中: k 是与Lagrange迭代相同的迭代次。调整函数 $f(R)$ 设计为 R 取整数后的幂函数,即

$$f(R) = 10^{\mathrm{INT}(R)} \tag{19}$$

其中: $\mathrm{INT}(R)$ 表示对 R 取整,自变量 R 定义为与间隙率 $\dot{g}$ 及 $\dot{g}_T$ 相关的函数。对于法向罚数 ϵ_N,其对应自变量 R_N 定义为

$$R_N = \frac{\lfloor \dot{g}_{(k+1)} \rfloor}{M_{AR}} \qquad 若 |\dot{g}| > M_{AR} \tag{20a}$$

$$R_N = \frac{T_{MAX}}{|(T_{N,(k+1)} - T_{N,(k)})/T_{N,(k)})|}$$
$$若 \left|\frac{(T_{N,(k+1)} - T_{N(k)}}{T_{N,(k)}}\right| > M_{AR} \tag{20b}$$

其中: M_{AR}是间隙率最大允许值,若$|\dot{g}| > M_{AR}$,表明计算精度不够,需要增大罚数; T_{MAX}是相邻迭代次法向接触力振荡容许限,式(20b)表明在迭代过程中,接触力振荡,有可能导致算法不稳定甚至发散,需要减小罚数。

对于切向罚数 ϵ_T,其对应自变量 R_T 可类似式(20)定义。

5 算 例

用本文方法开发了接触-冲击软件IMPACT/CPS,计算了两个弹性杆撞击问题。杆 A 以初速度1撞击初始静止状态的杆 B,其材料及几何特性为:材料密度 $\rho= 0.01$,杆截面积 $S= 1$,杆长 $l= 10$,弹性模量 $E= 100$,波松比 $\nu= 0$。各量的单位是协调的,故未写出。时间步长选为0.01。

这个例子可以根据波动理论得到精确解。图2给出了本文计算出的冲击面接触力随时间变化历程,并与精确解比较。从图中可以看到,接触力与精确解吻合良好。在冲击离开时刻比精确解滞后一个时间步,可以通过减小冲击结束时刻的时间步长加以解决。

为了检验本文方法解决带摩擦的滑动冲击问题能力,计算了一个如图3所示的立方块斜冲击板例子。立方块初速度为 $V_x = 5\mathrm{cm/s}$, $V_z = -5\mathrm{cm/s}$,板为两端简支,初始处于静止状态。材料及几何特性为:弹性模量 $E = 1\mathrm{N/cm^2}$,波松比 $\nu = 0$,材料密度 $\rho = 0.01\mathrm{kg/cm^3}$,摩擦系数 $\mu = 0.3$,立方块边长 $l = 1\mathrm{cm}$,时间步长 $\Delta t= 0.002\mathrm{s}$。初始冲击位置为立方块前沿($X$ 方向)恰位于板长的中线处。

图4给出了立方块底面中心点处的位移分量 U_x 和 U_z 随时间变化曲线,并与文献[6]结果加以比较,可以看出,本文结果与文献[6]基本一致,由于滑动摩擦,x 向的速度很快减小并在 $t= 0.026\mathrm{s}$ 时停止滑动,整个冲击接触过程在 $t= 0.06\mathrm{s}$ 时结束。

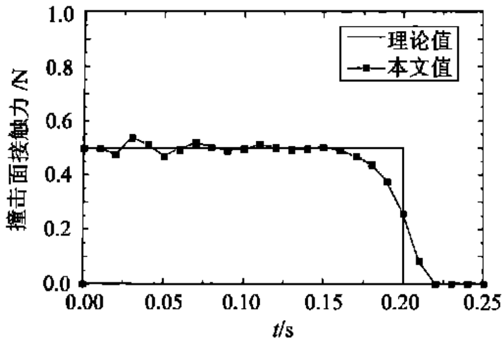

图 2　撞击面接触力时间历程

Fig. 2　The time history of contact traction

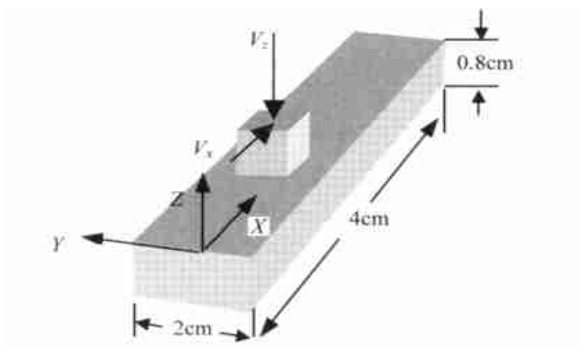

图 3　立方块与厚板斜冲击

Fig. 3　The oblique impact between a cubic block and a thick plate

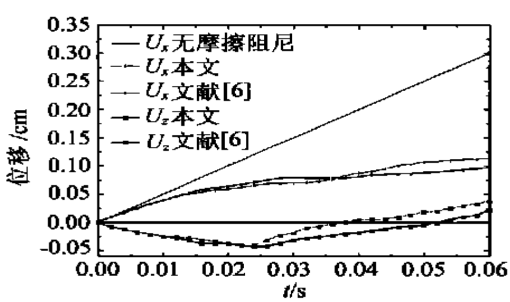

图 4　立方块底面中心点位移时间历程

Fig. 4　The time history of the displacement at the center point of the block bottom surface

参 考 文 献

[1] Laursen T A, Simo J C. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems [J]. Int J Numer Methods Eng 1993, 36(20): 3451- 3485.

[2] Capenter N J, Taylor R L, Katona M G. Lagrange and constraints for transient finite element surface contact[J]. Int J Numer, Methods Eng, 1991, 32(1), 103- 128.

[3] Hughes T J R, Taylor R L, *et al*. A finite element method for a class of contact-impact problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1976 (8): 249- 276.

[4] Taylor R L, Papadopoulos P. On a finite element method for dynamic contact/impact problems[J]. Int J Numer Methods Eng, 1993, 36(12): 2123- 2140.

[5] Laursen T A, Chawla V. Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems[J]. Int J Numer Methods Eng, 1997, 40: (5), 863- 886.

[6] Chen W H, Yen J T. Three dimensional finite element analysis of static and dynamic contact problems with friction[J]. Computer & Structures. 1990, 35(5): 541- 552.

作者简介:

段世慧(1963-)　男, 陕西扶风人, 中国飞机强度研究所研究员, 西北工业大学在读博士生, 主要从事计算力学、结构优化设计、飞机结构强度等方面研究, 获部级科技进步奖 4 项。Email: duansh@pub.xaonline.com。

(责任编辑: 李铁柏)