

文章编号: 1000-6893(2002) 02-0097-05

# 轴对称构件疲劳寿命预测的损伤力学 —附加载荷—有限元法

唐雪松<sup>1,2</sup>, 杨继运<sup>1</sup>, 蒋持平<sup>1</sup>, 张 行<sup>1</sup>

(1. 北京航空航天大学 飞行器设计与应用力学系, 北京 100083)

(2. 长沙交通学院 桥梁与结构工程系, 湖南 长沙 410076)

## DAMAGE MECHANICS—ADDITIONAL LOAD—FINITE ELEMENT METHOD FOR FATIGUE LIFE PREDICTION OF AXISYMMETRICAL STRUCTURAL MEMBERS

TANG Xue-song<sup>1,2</sup>, YANG Ji-yun<sup>1</sup>, JIANG Chi-ping<sup>1</sup>, ZHANG Xing<sup>1</sup>

(1. Department of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

(2. Department of Bridge and Structure Engineering, Changsha Communications University, Changsha 410076, China)

**摘要:** 提出了一种实用有效的弹塑性损伤应力-应变本构方程与损伤演化方程。针对中高周疲劳问题, 发展了轴对称疲劳寿命预测的损伤力学-附加载荷-有限元法计算格式。通过引入塑性附加载荷, 考虑了构件应力集中区域塑性变形对构件疲劳寿命的影响。预估了 30CrMnSiNi2A 材料含沟槽轴对称试件的疲劳裂纹形成寿命, 并分析了疲劳裂纹的扩展情况。疲劳寿命理论预测结果与实验结果吻合良好。

**关键词:** 损伤力学; 有限元; 疲劳; 轴对称; 附加载荷法

中图分类号: V215.6; O242.21 文献标识码: A

**Abstract:** The practical and effective expressions of stress-strain constitutive relation and damage evolution for elastoplastic damage problems are proposed. For the intermediate and high cycle fatigue problems, a damage mechanics-additional load-finite element method is developed. By introducing the plastic additional loads, the influence of plasticity in the area of stress concentration on the fatigue life of the specimen is considered. The fatigue crack initiation lives for notched bar specimens of 30CrMnSiNi2A material, as well as the fatigue crack propagation, are calculated. The theoretical results by the present theory are in good agreement with the experimental results. It shows that the present method has important and practical values.

**Key words:** damage mechanics; finite element method; fatigue; axisymmetry; additional load method

螺栓、铆钉等航空结构连接件疲劳分析是飞机设计、定寿、延寿的重要工作<sup>[1]</sup>。本文利用损伤力学方法, 研究这类轴对称构件实用有效的疲劳寿命预测方法。损伤力学的发展, 为疲劳分析提供了新的概念与方法<sup>[2]</sup>。然而, 以往的各种损伤理论, 大多采用应变等效假设, 已发现这一假设具有理论局限性<sup>[3,4]</sup>。文献[5,6]从不可逆热力学基本定律出发, 研究了弹性各向同性与各向异性损伤本构关系的一般形式。本文在此基础上, 考虑局部塑性区问题, 提出一种实用有效的弹塑性损伤应力-应变本构方程与损伤演化方程。然后, 结合文献[2]中提出的损伤力学-附加载荷法, 建立轴对称构件疲劳寿命预测的损伤力学-附加载荷-有限元法计算格式。通过预估寿命与实验数据的比

较, 说明了所发展方法的优越性。

### 1 弹性损伤本构关系

对于各向同性弹性损伤问题, 根据热力学第二定律, 损伤本构方程与损伤应变能释放率  $Y$  的表达式为<sup>[5]</sup>

$$\sigma_{ij} = 2\mu M_{\mu}(D) \epsilon_{ij} + \lambda M_{\lambda}(D) \epsilon_{kk} \delta_{ij} = 2\tilde{\mu}(D) \epsilon_{ij} + \tilde{\lambda}(D) \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (1)$$

$$Y = -\frac{1}{2} \lambda M_{\lambda}(D) (\epsilon_{kk})^2 - \mu M_{\mu}(D) \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \quad (2)$$

式中:  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$  分别为 Cauchy 应力张量与应变张量;  $\lambda$ ,  $\mu$  为无损材料的 Lamé 弹性常数;  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$  为材料损伤后的有效 Lamé 弹性常数;  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 张量;  $D$  为各向同性标量损伤变量<sup>[7]</sup>; 撇号表示求导;  $M_{\lambda}(D)$ ,  $M_{\mu}(D)$  为 2 个损伤效应函数, 表征损伤对 2 个弹性常数的影响。

式(1)、式(2)的级数形式为

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} \left[ 1 - \sum_{n=1}^N \beta^{(n)} D^n \right] + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} \left[ 1 - \sum_{n=1}^N \alpha^{(n)} D^n \right] \quad (3)$$

$$Y = \frac{1}{2} \lambda (\epsilon_{kk})^2 \sum_{n=1}^N \alpha^{(n)} n D^{n-1} + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \sum_{n=1}^N \beta^{(n)} n D^{n-1} \quad (4)$$

式中:  $\alpha^{(n)}$ 、 $\beta^{(n)}$  为无因次非负系数。

令  $N = 1$ ,  $\alpha^{(1)} = \beta^{(1)} = 1$ , 则式(3)、式(4)就分别与由应变等效假设给出的经典损伤本构方程相同, 说明经典损伤本构方程是一阶近似形式<sup>[5, 6]</sup>。

损伤发展具有很强的局部化效应与加速现象。计算表明, 单元的疲劳寿命主要集中在  $D = 0.2$  的阶段, 而从  $D = 0.2 \sim 1.0$  段的疲劳寿命非常短。实际上,  $0 < D < D_c$ ,  $D_c$  为试件断裂时的损伤值。根据实验结果<sup>[7]</sup>, 对于多数材料,  $D_c = 0.2$ 。因此, 在实用计算中  $D$  可以看作是少量但不是无穷小量。取式(3)、式(4)的二阶近似形式, 可以给出一种实用有效的损伤本构方程与损伤演化方程。既能显著提高精度, 又能有效控制计算规模。取  $N = 2$ ,  $\alpha^{(1)} = \beta^{(1)}$ ,  $\alpha^{(2)} = \beta^{(2)}$ , 且  $\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} = 1$  (当  $D = 1$  时, 使有效模量为 0), 则式(3)、式(4)成为

$$\sigma_{ij} = [1 - \alpha^{(1)} D - \alpha^{(2)} D^2] [2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij}] \quad (5)$$

$$Y = [\alpha^{(1)} + 2\alpha^{(2)} D] (\epsilon_{eq})^2 \cdot \left[ \frac{3}{2}\mu + \left( 3\mu + \frac{9}{2}\lambda \right) \left( \frac{\epsilon_m}{\epsilon_{eq}} \right)^2 \right] \quad (6)$$

式中:  $\epsilon_m = \epsilon_{kk}/3$ ;  $\epsilon_{eq} = \frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}$ ,  $e_{ij}$  为应变偏量,  $\epsilon_{eq}$  为等效应变。

本文研究疲劳问题, 文中所有场量取每一载荷循环中的最大值。

## 2 损伤演化方程

材料的损伤演化与其损伤耗散功率密切相关, 可设损伤速率  $\dot{D}$  正比于  $Y$  的  $m$  次方<sup>[2]</sup>

$$\dot{D} = AY^m \quad (7)$$

将式(6)代入式(7)中, 得到

$$\dot{D} = \frac{\Delta D}{\Delta N} = A [\alpha^{(1)} + 2\alpha^{(2)} D]^m (\epsilon_{eq})^{2m} \cdot \left[ \frac{3}{2}\mu + \left( 3\mu + \frac{9}{2}\lambda \right) \left( \frac{\epsilon_m}{\epsilon_{eq}} \right)^2 \right]^m \quad (8)$$

式中:  $A$ ,  $m$  为表示材料损伤演化性质且与应力比  $R$  有关的参数;  $N$  为载荷循环次数。以往研究中<sup>[8]</sup>曾给出与式(8)相类似的关系式。另外, 式(8)中是将应变场与损伤场耦合。因此, 它适用于弹性损伤(高周疲劳)问题, 同时也适用于弹塑性损伤(中周疲劳)问题。

## 3 弹塑性损伤本构关系

假设在第 1 个载荷循环内, 应力集中区域的材料产生屈服, 而材料的损伤可以忽略。必须考虑塑性变形对试件疲劳寿命的影响。通常这类构件承受拉伸循环应力作用。材料无损伤时的弹塑性应力-应变关系曲线见图 1(a)。图中  $A$  点为线弹性解,  $B$  点为弹塑性解, 线段  $BB^*$  为卸载曲线,  $A^*ABB^*$  为平行四边形。

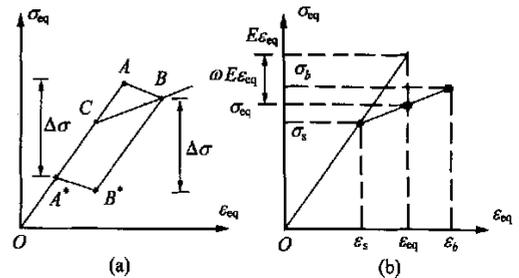


图1 无损弹塑性本构关系示意图

(a) 应力-应变曲线; (b) 参数  $\omega$  的几何解释

Fig. 1 Elastoplastic constitutive relation curve for undamaged materials

(a) Stress-strain curve;

(b) Geometric interpretation of the parameter  $\omega$

采用 von Mises 屈服准则, 材料无损伤时, 全量理论的弹塑性本构关系为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(e)} - \sigma_{ij}^{(p)} \quad (9)$$

$$\sigma_{ij}^{(e)} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (10)$$

$$\sigma_{ij}^{(p)} = 2\mu\omega(\epsilon_{ij} - \epsilon_{kk}\delta_{ij}/3) \quad (11)$$

$$\omega = 1 - \sigma_{eq}/(E\epsilon_{eq}) \quad (12)$$

式中:  $E$  为杨氏模量;  $\omega$  的几何解释见图 1(b)。

对于轴对称问题, 采用有限元分析时, 式(9)的矩阵形式为

$$\sigma = \sigma^{(e)} - \sigma^{(p)} = C_e \epsilon - \omega C_p \epsilon \quad (13)$$

式中:

$$\sigma = \{\sigma_r \quad \sigma_z \quad \tau_{rz} \quad \sigma_\theta\}^T \quad (14)$$

$$\epsilon = \{\epsilon_r \quad \epsilon_z \quad \gamma_{rz} \quad \epsilon_\theta\}^T \quad (15)$$

$$C_e = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \nu(1-\nu) & 0 & \nu(1-\nu) \\ \nu(1-\nu) & 1 & 0 & \nu(1-\nu) \\ 0 & 0 & (1-2\nu)[2(1-\nu)] & 0 \\ \nu(1-\nu) & \nu(1-\nu) & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$C_p = 2\mu \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

从第 2 个载荷循环开始, 材料将逐步损伤, 式 (10)、式 (11) 中的 Lamé 常数  $\lambda, \mu$  应为材料损伤后的有效值  $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$  所取代。则式 (13) 应修正为

$$\sigma = C_e \epsilon - (\alpha^{(1)} D + \alpha^{(2)} D^2) C_e \epsilon - \alpha(1 - \alpha^{(1)} D - \alpha^{(2)} D^2) C_p \epsilon \quad (18)$$

式 (18) 即为弹塑性损伤材料的本构方程。

#### 4 损伤附加载荷与塑性附加载荷

对任一单元  $i$ , 根据式 (18), 由虚功原理导出的单元刚度方程为<sup>[9, 10]</sup>

$$[K_e]_{(i)} \{\Delta\}_{(i)} = \{F\}_{(i)} + \{F\}_{(i)}^{(D)} + \{F\}_{(i)}^{(pD)} \quad (19)$$

$$\{F\}_{(i)}^{(D)} = (\alpha^{(1)} D + \alpha^{(2)} D^2) [K_e]_{(i)} \{\Delta\}_{(i)} \quad (20)$$

$$\{F\}_{(i)}^{(pD)} = \alpha [K_p] \{\Delta\}_{(i)} \quad (21)$$

$$\{F\}_{(i)}^{(pD)} = (1 - \alpha^{(1)} D - \alpha^{(2)} D^2) \{F\}_{(i)}^{(p)} \quad (22)$$

式中:  $[K_e]_{(i)}$  为单元刚度矩阵;  $\{\Delta\}_{(i)}$  为单元结点位移矢量;  $\{F\}_{(i)}$  为单元等效结点载荷矢量;  $\{F\}_{(i)}^{(D)}$  为损伤附加载荷, 随损伤的增大而增加;  $\{F\}_{(i)}^{(pD)}$  为材料损伤后的塑性附加载荷;  $\{F\}_{(i)}^{(p)}$  为初始无损伤时的塑性附加载荷。式 (22) 表明塑性附加载荷随材料损伤度的增加逐步减小至 0。

构件整体有限元方程组为

$$K_e \Delta = F + F^{(D)} + F^{(pD)} \quad (23)$$

#### 5 损伤力学- 附加载荷- 有限元法计算格式

下面以  $X^*$  表示当前危险单元, 以  $X$  表示其余各单元。疲劳分析的损伤力学- 附加载荷- 有限元法计算格式如下:

(1) 假设材料初始无损伤, 即取  $D_0(X^*) = D_0(X) = 0$ , 及  $F_0^{(D)} = 0, \{F\}_0^{(pD)} = \{F\}_0^{(p)}$ , 求解有限元方程组 (23), 解出  $u_i^{(0)}$  与  $\epsilon_i^{(0)}$ 。

(2): 按式 (8) 计算各单元的  $D$ , 取其中最大者作为当前危险单元  $X^*$ 。设定当前危险单元的损伤度增长步长  $\Delta D_1(X^*)$ , 由式 (8) 计算出相应的

载荷循环次数  $\Delta N_1$ 。再由式 (8) 算出经历了  $\Delta N_1$  次载荷循环后其余各单元相应的损伤度增量  $\Delta D_1(X)$  及当前各单元的损伤度。

(3) 由式 (20)、式 (22) 算出当前损伤场分布下的损伤附加载荷  $\{F\}^{(D)}$  与塑性附加载荷  $\{F\}^{(pD)}$ 。求解有限元方程组 (23), 解出位移场  $u_i^{(1)}$  与应变场  $\epsilon_i^{(1)}$ 。

(4) 重复步骤 (2), (3) 直至当前危险单元的损伤度达到 1, 该单元完全破裂, 随后其损伤度一直保持为 1, 不再变化。

(5) 重复步骤 (2), (3), (4) 直至整个构件失效。可以算出疲劳裂纹的起裂位置, 疲劳裂纹形成寿命, 以及疲劳裂纹的扩展。可以对构件的整个疲劳过程进行动态数值模拟计算。

实例计算表明, 附加载荷法与每一损伤步中都修改总刚矩阵的常规方法所得结果完全相同。其优点在于, 整个计算过程中, 每一步计算修改的只是有限元方程组的右端项, 而总刚矩阵始终保持不变。计算效率大为提高。

#### 6 算例

对 30CrMnSiNi2A 材料含沟槽轴对称试件 (应力集中系数分别为  $K_t = 3.0, 5.0$ ) 的疲劳过程进行了计算。试件为轴向加载, 有关材料参数、试件尺寸及试件疲劳寿命的实验数据见文献 [11]。材料参数为:  $E = 210\text{GPa}, \nu = 0.3, \sigma_s = 1274\text{MPa}, \sigma_b = 1568\text{MPa}, \epsilon_b = 0.08$ 。取危险单元的损伤步长  $\Delta D = 0.01, K_t = 5.0$  试件疲劳裂纹扩展的计算结果见图 2。

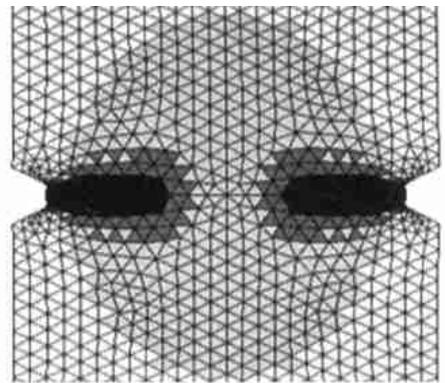


图 2  $K_t = 5.0$  试件疲劳裂纹扩展计算结果

Fig. 2 The fatigue crack propagation of  $K_t = 5.0$  specimen

计算到试件形成约 0.5mm 长的疲劳裂纹, 取此时的载荷循环次数为疲劳裂纹形成寿命。利用  $K_t = 3.0$  试件、循环特征  $R = 0.1$  下的疲劳裂纹形成寿命实验数据, 拟合出式 (8) 中的材料损伤

参数。注意到  $\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} = 1$ , 拟合结果为:  $A = 5.95 \times 10^{-8}$ ,  $m = 3.10$ ,  $\alpha^{(1)} = 0.8$ ,  $\alpha^{(2)} = 0.2$ 。拟合结果与拟合误差见表 1 与图 3。

表 1  $K_t = 3.0$  试件 ( $R = 0.1$ ) 疲劳裂纹形成寿命拟合结果

Table 1 The fit results of fatigue crack initiation lives for  $K_t = 3.0$  specimens ( $R = 0.1$ )

序号	最大名义应力 $\sigma_{max}/MPa$	$N_{f, test}$	$N_{f, cal}$	误差 / %
1	705.6	28 900	27 909	- 3.43
2	646.8	45 700	48 596	+ 6.34
3	597.8	87 400	80 440	- 7.96
4	568.4	118 000	111 123	- 5.86
5	529.2	275 000	176 731	- 35.73

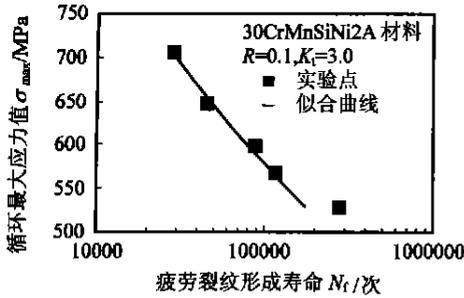


图 3  $K_t = 3.0$  试件的疲劳裂纹形成寿命拟合曲线图

Fig. 3 The fit curve of fatigue crack initiation lives for  $K_t = 3.0$  specimens

利用拟合出的材料损伤参数, 对  $K_t = 5.0$  试件、 $R = 0.1$  下的疲劳裂纹形成寿命进行理论预估。预估结果及与实验结果的对比见表 2 与图 4, 预测结果与实验结果吻合良好。

表 2  $K_t = 5.0$  试件 ( $R = 0.1$ ) 疲劳裂纹形成寿命预测结果

Table 2 The predicting results of fatigue crack initiation lives for  $K_t = 5.0$  specimens ( $R = 0.1$ )

序号	最大名义应力 $\sigma_{max}/MPa$	$N_{f, test}$	$N_{f, cal}$	误差 / %
1	444.92	65600	65326	- 0.42
2	411.60	105200	115886	+ 10.16
3	388.08	160000	171761	+ 7.29

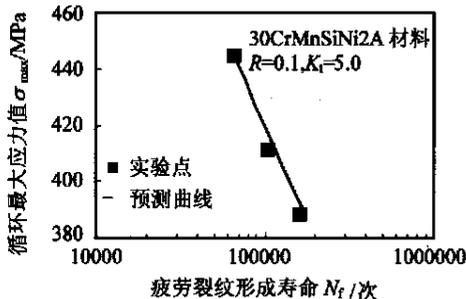


图 4  $K_t = 5.0$  试件的疲劳裂纹形成寿命预测曲线图

Fig. 4 The predicting curve of fatigue crack initiation lives for  $K_t = 5.0$  specimens

## 7 结论

基于不可逆热力学基本定律导出的弹性损伤本构关系的一般表达式, 能作为工程应用的重要参考。本文在此基础上, 结合损伤的局部化效应并考虑了局部塑性区问题, 提出了一种实用有效的弹塑性损伤本构方程与损伤演化方程。与有限元法相结合, 建立了轴对称构件疲劳分析的损伤力学- 附加载荷- 有限元法计算格式。由于每一步计算中, 只是修改有限元方程组的右端项, 整体刚度矩阵保持不变, 计算效率大为提高。

本文方法即可以用于疲劳裂纹形成寿命的计算, 也可以用于疲劳裂纹扩展的分析。可对构件整个疲劳过程中的力学行为进行数值模拟计算。计算表明, 本文方法具有较高的预测精度。

## 参考文献

- [1] 飞机结构强度研究所. 航空结构连接件疲劳分析手册 [M]. 北京: 飞机强度结构研究所出版, 1985. (Institute of Aircraft Structural Strength. The fatigue analysis manual of the joint members of the aeronautic structures [M]. Beijing: Institute of Aircraft Structural Strength, 1985.)
- [2] 张行, 赵军. 金属构件应用疲劳损伤力学 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1998. (Zhang X, Zhao J. Applied fatigue damage mechanics of metallic structural members [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1988.)
- [3] Rabier P J. Some remarks on damage mechanics [J]. Int J Engng Sci, 1989, 27(1): 29- 54.
- [4] 高蕴初, 郑泉水, 余寿文. 弹性各向同性损伤的双标量描述 [J]. 力学学报, 1996, 28(5): 542- 549. (Gao Y X, Zheng Q S, Yu S W. Double-scalar formulation of isotropic elastic damage [J]. Acta Mechanica Sinica, 1996, 28(5): 542- 549.)
- [5] 唐雪松, 蒋持平, 郑键龙. 弹性损伤材料的应力- 应变本构关系与损伤演化方程 [J]. 长沙交通学院学报, 1999, 15(4): 8- 14. (Tang X S, Jiang C P, Zheng J L. Stress-strain constitutive relation and damage evolution equation for elastic damaged materials [J]. J Changsha Communications University, 1999, 15(4): 8- 14.)
- [6] 唐雪松, 蒋持平, 郑键龙. 弹性损伤的一般理论 [J]. 北京航空航天大学学报, 2001, 27(1): 69- 72. (Tang X S, Jiang C P, Zheng J L. General theory for elastic damaged [J]. J Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2001, 27(1): 69- 72.)
- [7] Lemaitre J. A course on damage mechanics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [8] 余寿文, 冯西桥. 损伤力学 [M]. 北京: 清华大学出版社,

1997, 55- 56.

(Yu S W, Feng X Q. Damage mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997, 55- 56.)

- [9] 王辉. 轴对称构件中高周疲劳寿命预测的损伤力学方法[D]. 北京: 北京航空航天大学, 1996.

(Wang H. The damage mechanics method for the intermediate and high cycle fatigue life predictions of the axisymmetrical structural members[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1996.)

- [10] Iqbal R. 三维疲劳问题的损伤力学计算方法[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2000.

(Iqbal R. The computing methods of damage mechanics for the three-dimensional fatigue problems[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2000.)

- [11] 高镇同主编. 航空金属材料疲劳性能手册[M]. 北京: 北京航空材料研究所, 1981.

(Gao Z T ed. The fatigue property manual of the aeronautics metallic materials[M]. Beijing: Institute of Aeronautic Materials, 1981.)

作者简介:



唐雪松(1964-) 男, 副教授。2001年北京航空航天大学固体力学专业博士毕业, 师从蒋持平教授。研究方向为损伤力学及其工程应用。已发表论文约20篇。工作单位: 湖南长沙交通学院桥梁与结构工程系, 邮编: 410076。



杨继运(1975-) 男, 北京航空航天大学固体力学专业博士生, 师从张行教授。研究方向为断裂力学、损伤力学。目前已发表论文2篇。



蒋持平(1948-) 男, 北京航空航天大学教授, 博士生导师。研究领域为复合材料细观力学, 断裂与损伤力学等。在国内外学术期刊上发表论文80余篇。获国家级教学成果二等奖, 北京市教学成果一等奖, 国家教委科技进步二等奖各1项。



张行(1932-) 男, 北京航空航天大学教授, 博士生导师。研究领域为断裂力学、损伤力学、复合材料力学、弹塑性力学与飞机结构力学等。在国内外学术期刊上发表论文约130篇, 出版学术专著与教材共7种。获国家科技进步三等奖2项, 部委级科技进步一、二等奖5项。

(责任编辑: 李铁柏)