

文章编号: 1000-6893(2001)06-0542-04

## 用蒙特卡罗法仿真生成三维空间大气紊流场

洪冠新, 肖业伦

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100083)

MONTE CARLO SIMULATION FOR 3-D-FIELD OF ATMOSPHERIC TURBULENCE

HONG Guan-xin, XIAO Ye-lun

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**摘要:** 基于三维紊流场相关函数矩阵用蒙特卡罗法仿真生成三维空间大气紊流场, 并用理论证明和紊流场数值检验的方法, 证明这样的空间大气紊流场较好地符合所选用的大气紊流模型(如Dryden模型), 且具有良好的均匀性和各向同性。三维空间大气紊流场可用于飞机飞行仿真, 尤其是多架飞机在大气紊流中飞行的仿真(如空中加油、编队飞行)。

**关键词:** 大气紊流; 蒙特卡罗法; 数值仿真; 飞行仿真

**中图分类号:** V321.2 **文献标识码:** A

**Abstract** This study is concerned with Monte Carlo simulation for three-dimensional-field of atmospheric turbulence, in view of correlation function matrix. This atmospheric turbulence field, which is homogeneous and isotropic, is identical with the Dryden model by theoretical proof and numerical test. This 3-D-field could be used for aircraft flights simulation, especially for simulation of several aircraft flights in atmospheric turbulence (such as air-refueling and formation flight).

**Key words:** atmospheric turbulence; Monte Carlo method; numerical simulation; flight simulation

B. Etkin<sup>[1]</sup>研究大气紊流对飞行的影响, 用随机紊流描述空气的连续不规则运动, 它包含了一些统计特性如均匀性、各向同性, 时间和空间尺度, 概率分布, 相关和频谱。用于飞行仿真的大气紊流模型被公认的是Dryden模型和von Karman模型<sup>[2]</sup>, 其中Dryden模型因其形式简单而广泛应用于工程计算中。大气紊流仿真最常用方法是滤波白噪声, 即用过滤高斯白噪声产生紊流, 选用成形滤波器的形式和参数去匹配所需要的频谱和强度。在一维紊流序列的仿真中可以用这种方法满足大气紊流的大多数特征, 生成一维紊流序列可适用于单个飞机的大气紊流飞行仿真。

多架飞机的大气紊流飞行仿真(如空中加油、编队飞行)应采用二维或三维大气紊流场, 因为不同飞机经历的大气紊流是具有相关性的。但是, 上述仿真紊流序列的方法在推广到二维场(平面场)和三维场(空间场)时, 在滤波器的选择上出现麻烦。文献[3]用一维紊流场的生成方法构造二维紊流场, 方法简单, 工程上有应用价值, 但是生成二维紊流场各向同性不满足, 理论上有所欠缺。文献[4]用一阶离散自递归模型, 基于已知的相关函数表达式, 生成二维紊流场。这种方法基于一步相

关, 在生成一维场时可以用理论证明纵向一维场完全满足, 横向一维场基本满足, 但是应用于生成二维和三维紊流场时同样出现各向不同性问题。

蒙特卡罗(Monte Carlo)方法<sup>[5]</sup>也称随机模拟(Random Simulation)、随机抽样(Random Sampling)或统计试验(Statistical Testing)方法, 它包括以概率统计理论为其主要理论, 以随机抽样为其主要手段的两个核心问题。蒙特卡罗方法可概括如下, 为求解数学、物理、工程技术以及生产管理等方面的问题, 首先建立一个概率模型或随机过程, 使它的参数等于问题的解; 然后通过对模型或过程的观察或抽样试验来计算所求参数的统计特征, 最后给出所求解的近似值。蒙特卡罗方法的基本特点是: 方法及程序结构简单, 大量简单重复抽样; 概率意义的收敛, 收敛速度慢; 方法适用性强。本文用蒙特卡罗法仿真生成三维空间大气紊流场可用于飞机飞行仿真, 尤其是多架飞机飞行仿真。

### 1 基本原理

随机场<sup>[6]</sup>是随机过程概念在空间域(场域)的自然推广, 通过对随机场所定义的空间区域 $D$ 进行划分(如矩形网格)的方法, 可将连续化的随机场 $\{U(x, y, z)\}$ 转化为离散的随机变量的集合 $\{u_i$

( $i = 1, 2, \dots, n$ )。这一过程叫作随机场的离散化。

随机场若在空间坐标的任意平移下, 其有限维分布函数保持不变, 则称该随机场是均匀的。可以定义为沿某一直线均匀, 沿某一平面均匀, 以及沿整个空间均匀。随机场若其有限维分布函数在点组  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , 绕通过原点的轴的所有可能的旋转变换以及镜面反射变换下保持不变, 则称该随机场是各向同性的。

本文研究的用于飞行仿真的大气紊流场即为各向同性均匀随机场。

(1) 三维空间高斯白噪声场的生成 依据随机场离散化的概念, 将随机场定义空间划分为  $m \times n \times l$  个网格, 将  $(0, 1)$  上高斯分布白噪声随机变量  $Z_i$  按行排列, 充满空间网格, 形成如图 1 所示的三维场  $\{Z(x, y, z)\}$ , 其中  $x = 1, 2, \dots, m, y = 1, 2, \dots, n$  和  $z = 1, 2, \dots, l$ , 且  $Z(x, y, z) = Z_i$ , 其中  $i = (x - 1)nl + (y - 1)l + z$ 。可证明此三维场为各向同性、高斯分布白噪声场。

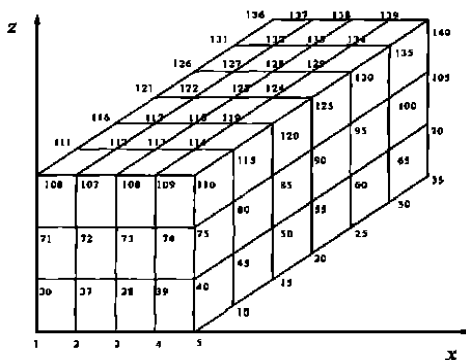


图 1 随机变量空间分布示意图

Fig 1 Sample of random variable distributed in 3-D block

(2) 建立离散的三维空间随机场相关系数矩阵 一般相关系数矩阵  $M_U$  为对称正定阵,

$$M_U = \{C_{ij}\} = \{R(i, j)\}$$

可采用 Cholesky 分解法, 将其分解为一个上三角阵和一个下三角阵的乘积, 即

$$M_U = AA^T$$

其中:  $A$  为下三角分解阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$A$  的元素  $a_{ij}$  按列递推计算公式为

$$a_{ij} = \left( m_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik}a_{jk} \right) / \sqrt{m_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}^2}$$

$$\text{对 } \sum_{k=1}^0 a_{ik}a_{jk} = 0, (1 \leq j < i \leq n)$$

(3) 产生满足相关函数矩阵的随机场 设  $\{U\}$  是需要产生的随机场, 取

$$U = AZ$$

其中:  $Z = [Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_n]^T$  为具有  $(0, 1)$  正态分布的白噪声随机变量, 有

$$U_1 = a_{11}Z_1$$

$$U_2 = a_{21}Z_1 + a_{22}Z_2$$

...

$$U_n = a_{n1}Z_1 + a_{n2}Z_2 + \dots + a_{nn}Z_n$$

(4) 证明  $\{U\}$  是满足相关系数矩阵要求的随机场 因为  $E[Z] = 0, U_i$  是  $Z_i$  的线性组合, 所以  $E[U] = 0$ , 均值为零。

因为

$$E[Z_i Z_j] = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

所以

$$E[U_i U_j] = E \left[ \sum_{k=1}^i a_{ik} Z_k \sum_{l=1}^j a_{jl} Z_l \right] = \sum_{k=1}^{\min(i, j)} a_{ik} a_{jk} = (AA^T)_{ij}$$

## 2 三维空间大气紊流场仿真算法

Dryden 给出了指数型的纵向和横向相关函数, 根据 Batchelor 公式, 得出 Dryden 空间相关函数<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned} R_{uu}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \sigma_u^2 e^{-\xi/L} \left\{ 1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2L\xi} \right\} \\ R_{vv}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \sigma_v^2 e^{-\xi/L} \left\{ 1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2L\xi} \right\} \\ R_{ww}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \sigma_w^2 e^{-\xi/L} \left\{ 1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2L\xi} \right\} \end{aligned}$$

其中:  $\xi = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$

将大气紊流随机场空间划分为  $p = m \times n \times l$  个网格, 依据图 1 所示分布规律, 按照点点相关构造相关系数矩阵的一般表达式为

$$M_U = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,j} & C_{1,p} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \dots & C_{2,j} & C_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{i,1} & \dots & \dots & C_{i,j} & C_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{p,1} & C_{p,2} & \dots & C_{p,j} & C_{p,p} \end{bmatrix}$$

其中:  $C_{i,j}$  是任意两点  $i(x_i, y_i, z_i)$  和  $j(x_j, y_j, z_j)$  间由 Batchelor 公式得到的相关函数, 而且

$$i = (x_i - 1)nl + (y_i - 1)l + z_i$$

$$j = (x_j - 1)nl + (y_j - 1)l + z_j$$

或写成

$$\begin{cases} x_i = i - am & (1 \leq x_i \leq m, 0 \leq a \leq ln - 1) \\ y_i = a - bn + 1 & (1 \leq y_i \leq n, 0 \leq b \leq l - 1) \\ z_i = b + 1 & (1 \leq z_i \leq l) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x_j = j - cm & (1 \leq x_j \leq m, 0 \leq c \leq ln - 1) \\ y_j = c - dn + 1 & (1 \leq y_j \leq n, 0 \leq d \leq l - 1) \\ z_j = d + 1 & (1 \leq z_j \leq l) \end{cases}$$

可有

$$\begin{aligned} \xi_1^2 &= (x_i - x_j)^2 \\ \xi_2^2 &= (y_i - y_j)^2 \\ \xi_3^2 &= (z_i - z_j)^2 \end{aligned}$$

以  $10 \times 10 \times 10$  的空间随机场为例, 具体抽样方法如下:

产生均值为 0, 方差为 1 的 1000 个相互独立正态分布随机变量 (白噪声), 组成向量组  $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_{1000}\}$ ;

构造相关系数矩阵  $M_U$

$$M_U = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,1000} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \dots & C_{2,1000} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1000,1} & C_{1000,2} & \dots & C_{1000,1000} \end{bmatrix}$$

其中:

$$C_{1,1} = C_{2,2} = \dots = C_{1000,1000} = 1$$

$$C_{1,2} = C_{2,1} = e^{-\Delta h/L}$$

...

$$C_{1,1000} = C_{1000,1} = e^{-15.59\Delta h/L} \left\{ \begin{matrix} 1 - \frac{5.196\Delta h}{L} \\ 1 - \frac{5.273\Delta h}{L} \end{matrix} \right\}$$

...

式中:  $\Delta h$  为网格步长;  $L$  为大气紊流纵向尺度。

### 3 算例分析及结论

仿真三维大气紊流场剖面示意图如图 2 所示。一维 ( $2000 \times 1 \times 1$ ) 大气紊流场的相关性检验如图 3 所示; 二维 ( $1 \times 2 \times 1000$ ) 大气紊流场的相关性检验如图 4 所示; 三维 ( $2 \times 1000 \times 2$ ) 大气紊流场的相关性检验如图 5 所示。

为验证三维大气紊流场对角线的相关性, 本文采用单位立方体逐个叠加的方法。对角线方向紊流的理论值由基于 Batchelor 公式的 Dryden 空间相关函数式得出, 仿真检验结果如图 6 所示。

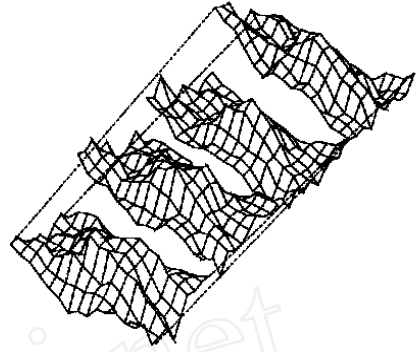


图 2 仿真三维空间大气紊流场剖面示意图

Fig 2 Cross section of 3-D block of atmospheric turbulence velocity

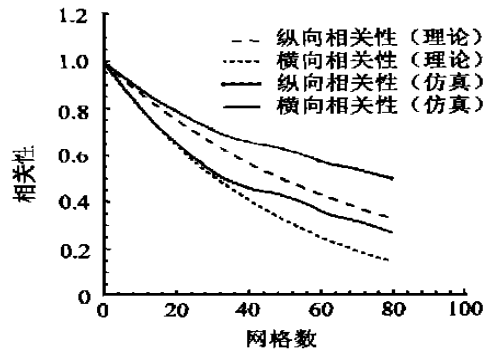


图 3 仿真一维 ( $2000 \times 1 \times 1$ ) 大气紊流场的相关性检验

Fig 3 Correlation test of 1-D atmospheric turbulence ( $2000 \times 1 \times 1$ )

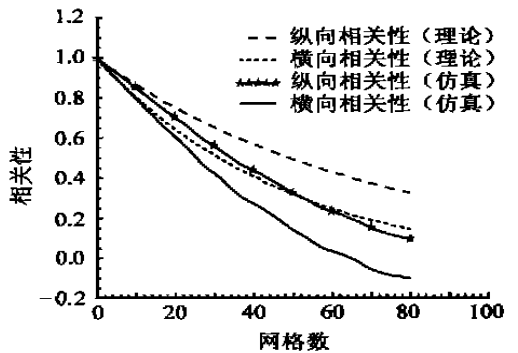


图 4 仿真二维 ( $1 \times 2 \times 1000$ ) 大气紊流场的相关性检验

Fig 4 Correlation test of 2-D atmospheric turbulence ( $1 \times 2 \times 1000$ )

通过大量计算分析, 可见仿真结果趋势合理, 由于采用样本数量不够大, 验证精度不很满意; 生成三维大气紊流场的均值和方差是满足要求的, 该仿真方法与数据分配方案无关; 该方法可应用于一维、二维及三维大气紊流场的仿真; 三维紊流场的对角线方向检验也具有可接受的相关性检验

结果。

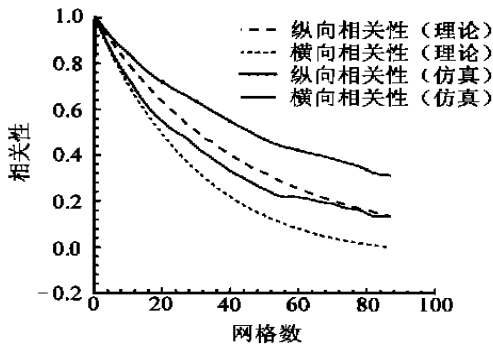


图5 仿真三维(2×1000×2)大气紊流场的相关性检验

Fig 5 Correlation test of 3-D atmospheric turbulence (2×1000×2)

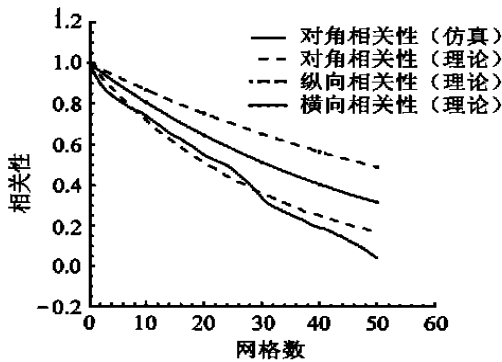


图6 仿真三维大气紊流场对角线的相关性检验

Fig 6 Diagonal correlation test of 3-D atmospheric turbulence

蒙特卡罗方法需要大量重复计算, 占用大量内存空间。若空间网格分布为  $m \times n \times l$ , 则  $M_U$  矩阵为  $(m \times n \times l) (m \times n \times l)$ , 分解后的下三角矩阵

A 也为  $(m \times n \times l) (m \times n \times l)$ 。如 6000 个网格的计算约占内存 256M, 10000 个网格的计算约占内存 1G。可见, 由于受计算机容量的限制, 计算结果的精度只能达到基本满意。今后可以进行算法上的改进, 使仿真结果更符合工程需要。同时, 也欢迎有兴趣的同仁共同探讨。

### 参 考 文 献

- [1] Etkin B. Turbulent wind and its effect on flight[J]. Journal of Aircraft, 1984, 21(3): 175- 182
- [2] Chalk C R, et al. Background information and users guide for M L-F-8785B[R]. AFFDL-TR-69-72 1969
- [3] 肖业伦 用于飞行仿真的二维紊流场的数字生成法[J]. 航空学报, 1990, 11(4):B124- B129
- [4] 陆宇平, 胡亚海 基于空间相关函数的二维紊流场数值生成法[J]. 南京航空航天大学学报, 1999, 31(2): 139- 145
- [5] 徐钟济 蒙特卡罗方法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1985 5- 47.
- [6] 李杰 随机结构系统- 分析与建模[M]. 北京: 科学出版社, 1996 38- 44
- [7] 肖业伦, 金长江 大气扰动中的飞行原理[M]. 北京: 国防工业出版社, 1992 61- 65

作者简介:



洪冠新 女, 34岁, 北京航空航天大学五系飞行力学教研室副教授, 硕士。研究方向为飞行动力学, 大气扰动, 飞行控制。

(责任编辑: 吴小勇)