

文章编号: 1000-6893(2001) 04-0293-05

# 边界层中湍动能和耗散能最大的尺度分量特征研究

宫武旗, 黄淑娟, 徐 忠

(西安交通大学 能源与动力工程学院, 陕西 西安 710049)

## CHARACTERISTICS OF SCALE COMPONENTS HAVING MAXIMAL DYNAMIC ENERGY AND DISSIPATION ENERGY IN SMOOTH TURBULENT BOUNDARY LAYER

GONG Wu-qi, HUANG Shu-juan, XU Zhong

(Energy & Power Engineering School, Xi an Jiaotong University, Xi an 710049, China)

**摘 要:** 阐述了利用离散正交小波理论分析 1-D 湍流测试信号的方法,使用热线风速仪,在 3 个雷诺数下,分别测量了光滑壁面湍流边界层的速度和加速度信号。运用所述方法分析了边界层测试信号,给出了最大湍动能密度和最大耗散能密度及其对应尺度沿  $y^+$  的分布曲线,并且给出该尺度分量的发生频率沿  $y^+$  分布曲线。分析可见:两种最大能量密度的无量纲尺度沿  $y^+$  分布具有雷诺相似性,其发生频率随着雷诺数增加而增加,但是最大湍动能密度尺度的频率沿  $y^+$  基本是一常数;无量纲的最大湍动能密度沿  $y^+$  在边界层小部分区域具有雷诺相似性,而无量纲的最大耗散能密度沿  $y^+$  在整个边界层内具有雷诺相似性。

**关键词:** 湍流; 边界层; 小波分析; 正交分解; 湍动能; 耗散率

中图分类号: O357.4; O357.5 文献标识码: A

**Abstract:** A general processing method is set forth that the discrete orthogonal wavelet theory is used to analyze the 1-D turbulent signal, mainly including decomposition of the pulse velocity and pulse acceleration signals into different scale components. It is got about the profile curves of magnitude and frequency of the scale components having the max turbulent dynamic energy density, and it is also to do so for other scale components having max turbulent dissipation energy density. Under three Reynold numbers the instantaneous velocity and acceleration signals are measured using hot-wire anemometry in a smooth turbulent boundary layer, and then analyzed using the above method. It is concluded that the profile curves (along  $y^+$ ) of non-dimensional quantity of the two scale lengths have no relation with Reynold number in the boundary layer, that their occurring frequency increases with Reynold numbers, but the frequency of the scale component having the max turbulent dynamic energy density is a constant along  $y^+$ .

**Key words:** turbulence; wavelet; orthogonal analysis; turbulent dynamic energy; turbulent dissipation

一般认为,湍流是由各种尺度的涡叠加而成。但各种尺度的涡所起作用是不同的,具有最大湍动能和最大耗散能的尺度对湍流具有重要意义。近几年,湍流控制研究正在成为湍流应用研究的一个重要方面,这需要广泛而深入地了解湍流中各种尺度的结构特征,以便有效地控制流动。最典型的例子是湍流减阻方面的研究工作,如果能有效地控制边界层中的猝发现象,就可以减小固体壁面摩擦阻力。文献 [1] 给出了基于连续小波变换的最大能量法则提取猝发现象的一般方法,由于此方法在检测猝发时没有阈值约束,是一个很好的检测猝发现象的方法。本文在此基础上,给出了

利用离散正交小波变换,提取具有最大湍动能密度和最大耗散能密度的尺度分量,进而分析湍流测试信号的方法。此外,作为对该方法的应用扩展,还把它用于最大耗散能量尺度分量的检测。

### 1 小波变换

如果  $\Psi(t) \in L^2(R)$  满足允许性条件

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (1)$$

其中:  $\hat{\Psi}(\omega)$  是  $\Psi(t) \in L^2(R)$  的傅立叶变换,那么  $\Psi(t) \in L^2(R)$  被称为基小波。对于每一个基小波,小波函数族  $\Psi_{a,b}(t)$  是由  $\Psi(t)$  经过平移和伸缩变换而来,即

$$\Psi_{a,b}(t) = a^{-1/2} \Psi[(t-b)/a] \quad (2)$$

其中:  $a, b \in R$ , 且  $a > 0$ ,  $a, b$  分别被称为伸缩参数和平移参数。有关小波基函数的更多约束条件详见文献[2]。

一维函数  $f(t) \in L^2(R)$  在小波函数族  $\Psi_{a,b}(t)$  下的小波变换定义为

$$W_{\Psi} f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\Psi_{a,b}(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi_{a,b}(t) dt \quad (3)$$

式中:  $W_{\Psi} f(a, b)$  被称为小波系数, 它表示尺度为  $a$  的分量在点  $b$  邻域附近对函数  $f(t)$  的贡献; 减小  $a$ ,  $\Psi_{a,b}$  的有限支集在时域范围上缩小而在频域范围上增大, 反之, 增大  $a$ ,  $\Psi_{a,b}$  的有限支集在时域范围上增大而在频域范围上缩小, 因此,  $a$  是尺度的度量;  $1/a$  是频率的度量; 参数  $b$  表示小波窗在时间轴上的位置。所以, 通过改变  $a$  和  $b$ , 可以在整个时间-尺度平面上计算小波系数  $W_{\Psi} f(a, b)$ , 实现对函数  $f(t)$  的分解。

上面所述是连续小波变换, 依据一定法则, 可以得到离散正交小波变换。这时, 小波基函数成为完全正交基函数, 其基本形式为

$$\Psi_{m,i}(t) = a_0^{-m/2} \Psi[(t - ib_0 a_0^m) / a_0^m] \quad (4)$$

其中:  $m, i \in Z$ 。参数  $a_0$  表示伸缩基数,  $b_0$  表示平移长度,  $a_0$  和  $b_0$  值的选择不是任意的。作为最简单的情况, 取  $a_0 = 2, b_0 = 1$ , 则

$$\Psi_{m,i}(t) = 2^{-m/2} \Psi[(t - i2^m) / 2^m] \quad (5)$$

与式(2)比较,  $a = 2^m, b = i2^m$ , 不同的是式(5)所示函数满足正交性条件, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{m,i}(t) \Psi_{n,j}(t) dt = \delta_{mn} \delta_{ij} \quad (6)$$

只有特殊的函数才具有这种特性, 本文所用正交小波函数是 Daubechies 小波, 详见文献[3]。

函数  $f(t) \in L^2(R), t \in R$  的小波系数变为

$$w^{(m)}[i] = W_{\Psi} f(m, i) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi_{m,i}(t) dt \quad (7)$$

小波系数  $w^{(m)}[i]$  是尺度  $2^m$  在点  $i2^m$  邻域对函数  $f(t)$  贡献的度量。一维函数  $f(t) \in L^2(R), t \in R$  可依据下式分解

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} w^{(m)}[i] \Psi_{m,i}(t) \quad (8)$$

式(6)所示的正交性意味着函数  $f(t)$  的总能量满足下面关系式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (w^{(m)}[i])^2 \quad (9)$$

在实际中, 函数  $f(t)$  通常在一些离散点上采样得到, 记作:  $f(t_j) = f[j], t_j = jh, h$  是采样步长。在此, 引入离散函数  $g^{(m)}[i]$ , 它是小波函数  $\Psi_{m,i}(t)$  的离散形式, 该函数也满足正交性条件

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g^{(m)}\left[\frac{k-2^m l}{2^m i}\right] g^{(n)}\left[\frac{k-2^m j}{2^n}\right] = \delta_{ij} \delta_{mn} \quad (10)$$

那么, 小波系数由下式给出

$$w^{(m)}[i] = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g^{(m)}\left[\frac{j-2^m l}{2^m}\right] f[j] \quad (11)$$

式(8)的离散形式为

$$f[j] = \sum_{m=1-i}^{+\infty} w^{(m)}[i] g^{(m)}\left[\frac{j-2^m l}{2^m}\right] \quad (12)$$

同样, 式(9)变为

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (f[j])^2 = \sum_{m=1-i}^{+\infty} (w^{(m)}[i])^2 \quad (13)$$

实际分析中, 式(11)到式(13)中  $m, i, j$  取值并不是无穷多。用  $N$  表示采样点总数, 则有  $N = 2^M; j = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, M$ 。在每个尺度  $m$  的小波系数个数为  $N/2^m$ , 则  $i = 1, 2, \dots, N/2^m$ 。此时式(13)变为

$$\sum_{j=1}^N (f[j])^2 = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{N/2^m} (w^{(m)}[i])^2 \quad (14)$$

小波系数总数用下式计算

$$\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{N/2^m} 1 = \sum_{m=1}^M 2^{M-m} = N - 1 \quad (15)$$

## 2 湍动能和湍流耗散能计算公式的简化

### 2.1 湍动能

湍动能表达式为

$$q = 0.5(\overline{u_i u_i}) \quad (16)$$

其中:  $u_i$  是脉动速度,  $i = 1, 2, 3$ 。用通常的脉动速度记号  $(u, v, w)$  和坐标轴记号  $(x, y, z)$ , 上式变为

$$q = 0.5(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}) \quad (17)$$

一般, 三维脉动速度难于测量, 本文只测量一维脉动速度。据文献[4]可知, 在边界层中, 式(17)右边的3项是同阶的, 因此近似有  $q \sim \overline{u^2}$ ,  $\sim$  表示同阶, 作为近似, 可以用下式代替式(17)

$$q = \overline{u^2} \quad (18)$$

### 2.2 湍流耗散率

不可压缩流动的湍流耗散率为

$$\epsilon = \nu(\overline{\partial u_j / \partial x_i})(\overline{\partial u_j / \partial x_i}) \quad (19)$$

其中:  $\nu$  是流体运动粘性系数。

在各向同性假设下, 使用通常的脉动速度记号  $(u, v, w)$  和坐标轴记号  $(x, y, z)$ , 式(19)简化为

$$\epsilon = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \quad (20)$$

在平均速度  $U \gg u$  时, Taylor 假设成立, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u}{(1/U)} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \quad (21)$$

把式(21)代入式(20), 得

$$\epsilon = (15\sqrt{U}) \overline{(\partial u / \partial t)^2} \quad (22)$$

在边界层中的粘性底层和过渡层中, 各向同性假设很难满足, 使用式(22)计算湍流耗散率, 可能存在较大误差。而在完全湍流区, 使用式(22)能够准确计算湍流耗散率。本论文作为近似处理, 整个边界层内均使用式(22)计算湍流耗散率。

### 3 湍动能密度与耗散能密度

#### 3.1 湍动能密度

设  $u(t)$  表示一维湍流脉动速度信号,  $\hat{u}(k)$  是它的傅立叶变换, 则总能量有下式关系

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k) \overline{\hat{u}(k)} dk = \int_0^{+\infty} E(k) dk \quad (23)$$

其中:  $E(k)$  是傅立叶能谱; 波数  $k = 2\pi/r$ ;  $r$  为物理长度。设  $W_{\Psi u}(a, b)$  是  $u(t)$  的连续小波变换, 则由 Parseval 定理和式(23)得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt = \int_0^{+\infty} E_w(k) dk = \int_0^{+\infty} \frac{E(a)}{a^2} da \quad (24)$$

其中:

$$E_w(k) = \frac{1}{2\pi} C_{\Psi}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} [W_{\Psi u}(a(k), b)] db \quad (25a)$$

$$E(a) = C_{\Psi}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} [W_{\Psi u}(a, b)]^2 db \quad (25b)$$

式(24)和式(25)表示  $u(t)$  的能量可以按照尺度进行分解。对比式(14), 式(24)知, 应用正交小波, 离散化后, 信号在尺度  $r_m = 2^m h$  处能量为

$$\sum_{i=1}^{N/2^m} (w^{(m)}[i])^2$$

$u(t)$  在该尺度处的能量密度定义为

$$P_d = (N - 1)^{-1} \sum_{i=1}^{N/2^m} (w^{(m)}[i])^2 \quad (26)$$

$P_d$  是尺度的函数,  $N - 1$  是小波系数总数。

#### 3.2 湍流耗散密度

这一节与上节的处理方法相似, 只是把分析函数变为脉动速度梯度信号。

利用测量的脉动速度, 可以得到脉动速度梯度信号  $S$ , 即

$$S[j] = \partial u / \partial t = (u_{j+1} - u_j) / \Delta t \quad (27)$$

对  $S$  进行小波变换, 由式(14)、式(22)得

$$\sum_{j=1}^N (S[j])^2 = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{N/2^m} (w^{(m)}[i])^2 \quad (28)$$

对比式(14)、式(22)和式(24), 式(28)左端就是湍能耗散总能量,  $w^{(m)}[i]$  是  $S$  的小波系数。

所以, 定义尺度  $r_m = 2^m h$  处湍流耗散密度为

$$P_{\epsilon} = (N - 1)^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{N/2^m} (w^{(m)}[i])^2 \right] \quad (29)$$

### 3.3 最大能量密度的尺度分量频率

3.1, 3.2 节给出了 2 个能量密度的计算公式,  $P_d, P_{\epsilon}$  都是尺度的函数, 并且二者都存在最大值。找出能量密度最大值对应的尺度, 把其它尺度对应的小波系数设为零, 利用式(12)重构原信号, 重构信号相邻零交叉点之间的时间定义为该信号的周期, 其倒数就是频率  $f$ 。

## 4 湍流边界层试验研究

### 4.1 试验台

如图 1 所示为吸式风洞。气流依次经过进口收敛段、直管段、试验段、弯道、流量调节阀、风机, 然后由出口排出。直管段和试验段横截面为矩形, 宽 400mm, 高 100mm, 被测量的湍流边界层位于试验段的中间上壁面上, 用热线风速仪和单丝探头测量瞬时速度, 详见文献[5]。采样频率 50kHz, 采样时间 83.8861s。

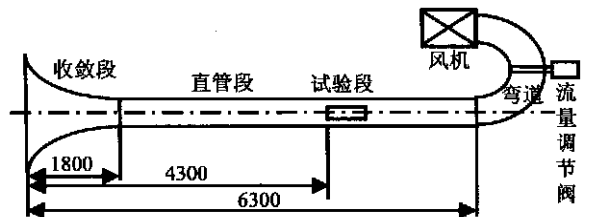


图 1 试验台位

Fig. 1 Test rig

### 4.2 平均速度

图 2 所示是湍流边界层无量纲时均速度分布,  $u^+ = u/u^*$ ,  $y^+ = yu^*/\nu$ ,  $u^*$  是壁面摩擦速度, 其确定详见文献[5],  $y$  是测量点到壁面的距离,  $\nu$  为空气运动粘性系数。图中直线由公式:  $u^+ = 5.75 \log(y^+) + 5.5$  计算所得。雷诺数由风洞中心流速和风洞水力直径确定,  $Re_1 = 2.21 \times 10^5$ ,  $Re_2 = 2.67 \times 10^5$ ,  $Re_3 = 2.73 \times 10^5$ , 以下各图中的雷诺数与此同。

与直线吻合较好区域为对数律区, 在壁面对数律区之间为粘性底层和过渡区。

### 4.3 湍流度

湍流度定义为

$P$  分布如图 3 所示, 在过渡区和对数律区之间有一个峰值区, 在此峰值区内湍流速度分布与试验雷诺数没有关系。

#### 4.4 最大湍动能密度

图 4 所示为按式(26)分解得到的最大湍动能密度。图 5 通过把图 4 中各条曲线之值与各自最大值求比来无量纲化湍动能密度。可以看到, 在过渡层和对数律层一部分区域, 无量纲最大湍动能密度的分布具有雷诺相似性。图 4 与图 3 的分布相似, 虽然不能由此推断湍动能主要由该尺度的贡献决定, 但是可以推测湍动能可能主要由该尺度及其邻域的贡献决定, 这须进一步研究。图 6 所示曲线沿  $y^+$  较为平坦, 基本是常数。但随着雷诺数增大而减小, 由于试验雷诺数范围较小, 此趋势不是非常显著, 但仍然可以辨别得出。在边界层外沿, 尺度突然增大, 笔者认为该处壁面对流动的作用减弱, 与风洞特性及边界层外流动特性有关, 本文对此区域暂不作探讨, 下同。图 7 所示通过把各尺度与当地 Kolmogorov 长度求比值所得。当地 Kolmogorov 长度分布如图 14 所示, Kolmogorov 长度计算见文献[6]。由图 7 可见, 无量纲尺度分

布具有雷诺相似性。  $a/\eta$  的值在 400 ~ 700 之间。图 8 所示为图 6 中的尺度发生频率。在边界层内, 随着雷诺数增加, 频率有增大的趋势。数据点较为分散, 主要是因为频率的确定需要很长时间的采样, 本实验虽然采样时间很长, 但仍显得不够。  $Re_2$ ,  $Re_3$  的两条频率分布曲线少部分交织在一起, 但总的来说,  $Re_3$  仍然较  $Re_2$  大。沿  $y^+$  曲线总体上比较平坦。

#### 4.5 最大耗散能密度

图 9 所示为按式(29)分解所得。由图 10 可见, 在过渡层和对数律层大部分区域, 无量纲最大耗散能的分布具有雷诺相似性。图 11 所示尺度随着雷诺数增大而减小, 在同一雷诺数下, 沿  $y^+$  分布成 S 形, 在对数律区内有最小值。图 12 所示无量纲尺度分布具有雷诺相似性。  $a/\eta$  的值在 60 ~ 80 之间。如图 13 所示, 在边界层内, 随着雷诺数增加, 频率增大。在同一雷诺数下, 频率沿  $y^+$  增大。对比图 9 和图 13, 在  $y^+ = 40 \sim 200$  之间, 耗散能密度及其发生频率均较大, 有理由认为该区域是边界层能量主要耗散区。

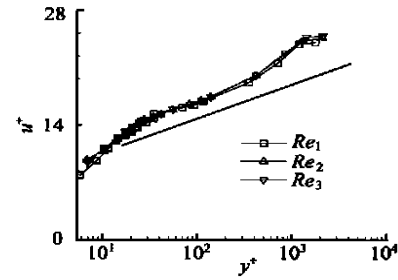


图 2 时均无量纲速度

Fig. 2 Time-mean dimensionless velocity

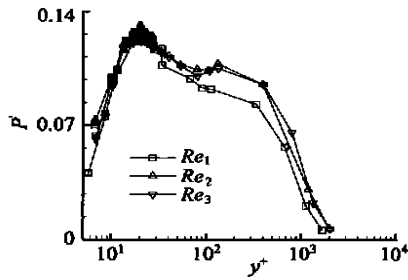


图 3 湍流度

Fig. 3 Turbulent intensity

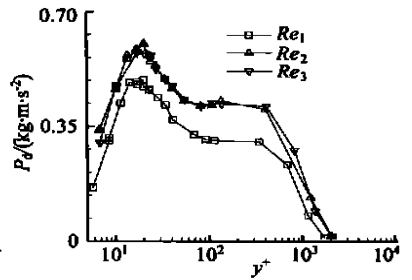


图 4 最大湍动能密度

Fig. 4 Maximal turbulent dynamic energy density in all turbulent components

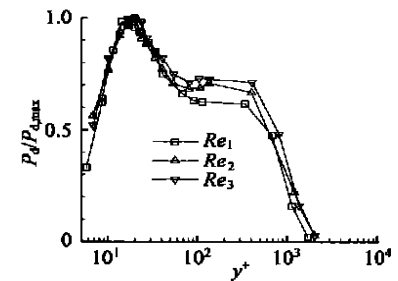


图 5 无量纲最大湍动能密度

Fig. 5 Maximal turbulent dynamic energy density dimensionless density in all turbulent components

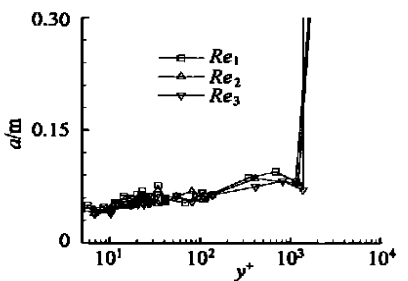


图 6 具有最大湍动能密度的尺度

Fig. 6 Scale with maximal turbulent dynamic energy density

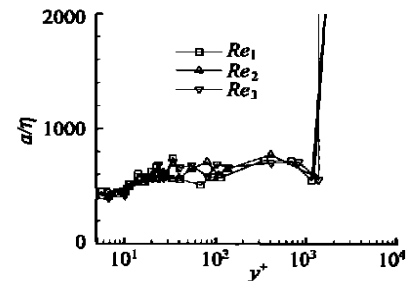


图 7 具有最大湍动能密度的无量纲尺度

Fig. 7 Dimensionless scale with maximal turbulent dynamic energy density

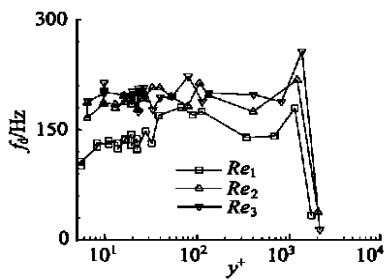


图 8 最大湍动能密度对应尺度分量的发生频率

Fig. 8 Occurring frequency corresponding to the scale component with maximal turbulent dynamic energy density

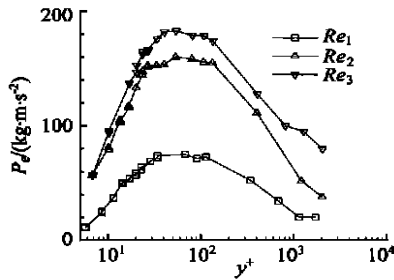


图 9 最大耗散能密度

Fig. 9 Maximal turbulent dissipation energy density in all turbulent components

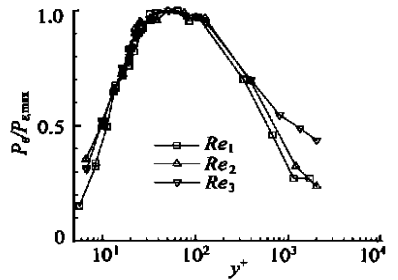


图 10 最大耗散能无量纲密度

Fig. 10 Maximal turbulent dissipation energy dimensionless density in all components

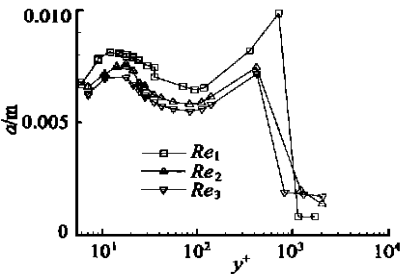


图 11 最大耗散能密度的尺度

Fig. 11 Scale with maximal turbulent dissipation energy density

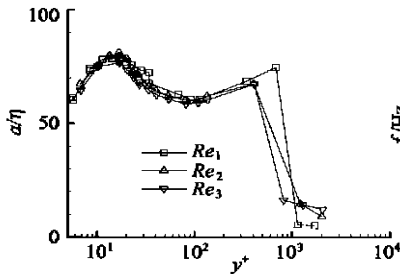


图 12 最大耗散能密度的无量纲尺度

Fig. 12 Dimensionless scale with maximal turbulent dissipation energy density

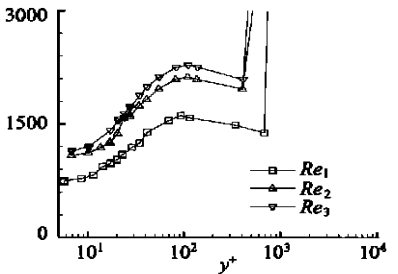


图 13 最大耗散能密度对应尺度发生频率

Fig. 13 Occurring frequency corresponding to the scale component with maximal turbulent dissipation energy density

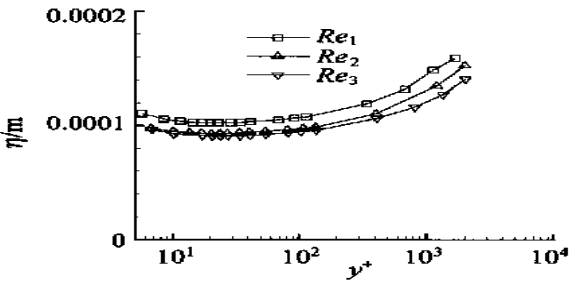


图 14 Kolmogorov 长度

Fig. 14 Kolmogorov length

### 参 考 文 献

[1] 姜楠, 王振东, 舒伟. 子波分析辨识壁湍流猝发事件的能量最大准则[J]. 力学学报, 1997, 29(4): 406-412.

[2] 崔锦泰[美]著. 小波分析导论[M]. 程正兴译. 西安: 西安交通大学出版社, 1995. 161-229.

[3] Goswami J C, Chan A K. Fundamentals of wavelets: theory, algorithms, and application[M]. New York: John Wiley & sons, 1999. 210-218.

[4] Hinze J O. Turbulence[M]. New York: McGraw-Hill, 1975. 637-641.

[5] 宫武旗, 徐忠, 黄淑娟. 一种改进的阻力天平仪校准方法[J]. 西安交通大学学报, 2000, 34(1): 104-105.

[6] Meneau C, Sreenivasan K R. The multifractal nature of turbulent energy dissipation[J]. J. of Fluid Mech, 1991, 224: 429-484.

作者简介:



宫武旗(1968-) 男, 1992年毕业于西安交通大学动力系流体机械专业, 1995年取得硕士学位后留校任教, 1996年至2000年攻读博士学位。主要从事对流体流动使用近代仪器进行测试分析工作等。

### 5 总 结

本文阐述了利用离散正交小波分析湍动能和湍流耗散能的一般方法和过程。对湍流边界层试验信号进行正交小波分解, 分别计算了湍动能和湍流耗散能中最大能量尺度分量及其该尺度结构的发生频率。分析表明, 二者的发生频率随着雷诺数增大而增大; 具有最大湍动能和耗散能的尺度无量纲量沿  $y^+$  分布具有雷诺相似性; 无量纲耗散能密度沿  $y^+$  分布也具有雷诺相似性。