

文章编号: 1000-6893(2001) 03-0253-03

一种窄带平稳随机过程功率谱的简化拟合方法

彭 兢, 金长江

(北京航空航天大学 509 教研室, 北京 100083)

SIMPLIFIED METHOD TO FIT THE POWER SPECTRUM OF NARROW-BAND STOCHASTIC PROCESS

PENG Jing, JIN Chang-jiang

(Dept. of Aircraft Design and Applied Mechanics, Beijing Univ. of Aero. and Astro., Beijing 100083, China)

摘要: 基于平稳随机过程的基本原理,建立了拟合窄带平稳随机过程的功率谱所需的成形滤波器的简化模型,推导了窄带平稳随机功率谱的峰值、峰值频率、带宽与成形滤波器相应参数之间的关系,给出了拟合窄带平稳随机过程功率谱的简化方法。应用此方法对美国海军 CVA 59 航空母舰海上运动的垂荡、纵摇和横荡运动分量的 3 个具体的功率谱实例进行了拟合,通过对将实测值与拟合结果进行比较,表明:这种方法能够很好地拟合典型的对称窄带平稳随机过程,对于对称性不好和带宽较大的功率谱,拟合的误差相对大一些。

关键词: 窄带平稳随机过程;成形滤波器;功率谱;舰船运动

中图分类号: V 212.12 文献标识码: A

Abstract: A simplified model of the shape model is established for fitting the power spectrum of a narrow-band stochastic process on the basis of principles of the stochastic process. And the relationship of the peak value, peak frequency, bandwidth of a narrow-band stochastic process with the corresponding parameters of the shape filter is deduced. Thus a simplified method to fit the power spectrum of the narrow-band stochastic process is established. The method is applied to fit the power spectrum of the heave, pitch and sway motion of the CVA 59 aircraft carrier at sea. The comparison between fitted results and measured data shows that the combination method works very well, while the fitting error is larger for the spectrum whose symmetry is not so good and bandwidth is larger.

Key words: narrow-band stochastic process; shape filter; power spectrum; ship motion

窄带平稳随机过程是随机现象中的一种,其功率谱表现为在某一频率附近呈现一定的尖峰,而其他频率范围内为零,同时带宽也很小。窄带平稳随机过程在控制系统、信号处理和通信等领域内是一个比较重要的研究内容。

工程中存在不少符合窄带随机过程特性的现象,处理这类现象时一般都是将其时间序列离散化,然后应用离散傅立叶变换求得频谱,很难得到频谱的解析形式。设法得到频谱的解析形式,具有十分重要的意义,例如模拟一个确定频谱的窄带平稳随机信号的时间序列,或者对其进行细致的频域分析等。

1 平稳随机过程相关理论

对于一个如图 1 的线性定常系统,如果输入 $x(t)$ 是一个平稳随机过程,则输出 $y(t)$ 也是一个平稳随机过程^[1]。二者的均值(即数学期望)满

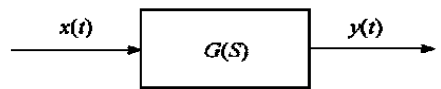


图 1 单入单出(SISO)线性系统

Fig. 1 Diagram for the Single-Input/Single-Output (SISO) linear system

足如下关系

$$E[y(t)] = E[x(t)] \int_0^\infty h(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

式中: $h(\lambda)$ ($\lambda \geq 0$) 为 $G(s)$ 的脉冲响应函数。同时二者的功率谱密度有如下的对应关系

$$S_y(\omega) = |G(i\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (2)$$

式中: $G(i\omega)$ 为传递函数 $G(s)$ 的频率响应。

工程中模拟平稳随机过程,如紊流、舰船的随机运动,都要使用功率谱。可将一个白色噪声信号 $x(t)$ 通过一个线性传递函数 $G(s)$,可得到一个有色噪声信号 $y(t)$,如图 1。根据式(2),因白色噪声的功率谱为常数,令它为 1,则

$$S_y(\omega) = |G(i\omega)|^2 = G^*(i\omega) G(i\omega) \quad (3)$$

式中: $G^*(i\omega)$ 为 $G(i\omega)$ 的复共轭。 $G(s)$ 被称为成形

滤波器。因此只要把给定过程的频谱按照式(3)分解,就可以得到成形滤波器的传递函数,从而模拟随机过程^[2]。

2 窄带平稳随机过程的简化模型分析

假定一个窄带平稳随机过程的简化成形滤波器如下

$$G_s(s) = \frac{as}{(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)} \quad (4)$$

根据式(3),输出信号的功率谱密度为

$$S_x(\omega) = |G_s(i\omega)G_s^*(i\omega)| = \frac{a^2\omega^2}{(\omega^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega)^2} \quad (5)$$

即

$$S_x(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2/\omega - \omega)^2 + (2\xi\omega)^2} \quad (6)$$

因此,功率谱密度的峰值频率为

$$\omega = \omega \quad (7)$$

并且,峰值功率为

$$(S_x)_{\max} = (a/(2\xi\omega))^2 \quad (8)$$

对于窄带过程,带宽 W 的定义是功率为峰值功率 1/2 的 2 个频率之差,即所谓半功率带宽。设 $\omega = \omega$ 时功率为峰值功率的 1/2,则针对式(6),有

$$\left(\frac{a}{2\xi\omega}\right)^2 = 2 \frac{(a\omega)^2}{(\omega^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega)^2} \quad (9)$$

将式(6)展开后解方程,并取 $\omega > 0$,可求得

$$\left. \begin{aligned} \omega_{h1} &= \omega \sqrt{\frac{1 + 2\xi^2 - 2\xi}{1 + \xi^2}} \\ \omega_{h2} &= \omega \sqrt{\frac{1 + 2\xi^2 + 2\xi}{1 + \xi^2}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

对于窄带过程, $\xi \rightarrow 0$,取如下近似

$$\xi^2 \rightarrow 0, \quad \sqrt{1 + \xi^2} \rightarrow 1 \quad (11)$$

则带宽为

$$W = \omega_{h2} - \omega_{h1} = \omega \left(\sqrt{1 + 2\xi^2 + 2\xi} - \sqrt{1 + 2\xi^2 - 2\xi} \right) \quad (12)$$

这与窄带过程带宽的经验公式一致^[3]。

仔细考查式(10),可以发现

$$\left. \begin{aligned} 1 + 2\xi^2 + 2\xi \sqrt{1 + \xi^2} &= (\xi + \sqrt{1 + \xi^2})^2 \\ 1 + 2\xi^2 - 2\xi \sqrt{1 + \xi^2} &= (\xi - \sqrt{1 + \xi^2})^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

又因为窄带过程的 $\xi \rightarrow 0$,因此有

$$\left. \begin{aligned} \omega_{h1} &= \omega(\sqrt{1 + \xi^2} - \xi) \\ \omega_{h2} &= \omega(\sqrt{1 + \xi^2} + \xi) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

所以,带宽为

$$W = \omega_{h2} - \omega_{h1} = 2\xi\omega \quad (15)$$

可以证明 $\xi \rightarrow 0$ 时,式(15)为式(12)的极限

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} (\sqrt{1 + 2\xi} - \sqrt{1 - 2\xi}) = 2\xi \quad (16)$$

因此,当 $\xi \rightarrow 0$ 时,式(15)和式(12)是一致的。

将式(15)代回式(4),可得

$$G_s(s) = \frac{as}{(s^2 + Ws + \omega^2)} \quad (17)$$

根据式(8),又可得

$$a = W \sqrt{(S_x)_{\max}} \quad (18)$$

3 算例

航空母舰在海上的运动可以用平稳随机过程来描述。文献[3]中指出:通过对大量的实测频谱进行分析,认为航空母舰的海上运动是典型的窄带平稳随机过程。

以下针对美国海军 CV A59(FORRESTAL 级)航空母舰海上运动的 DTMB(David Taylor Model Basin)模型^[4]的实测功率谱进行拟合。文献[4]中给出的频谱模型是在如下情况下测得的:4 级海况,风速 9.77m/s,航空母舰的航速为 12.86m/s,海浪的相对方位为 120°。该模型包括航空母舰的 6 个运动自由度的频谱,本文选取了其中的垂荡、纵摇和横荡运动的频谱进行研究。

(1) 垂荡运动频谱 实测的垂荡功率谱如图 2 中的虚线所示。

首先确定峰值频率 ω 。从图 2 中可以看出 $\omega = 0.725\text{rad/s}$ 。然后确定参数 ξ :从图 2 可估算出带宽 $W = 0.13$,代入式(15)可求得 $\xi = 0.09$ 。最后可根据频谱的峰值求得参数 a :根据图 2 估计峰值为 0.6,把带宽 W 和峰值功率 $(S_x)_{\max}$ 的值代入式(18),可求得 $a = 0.10$ 。

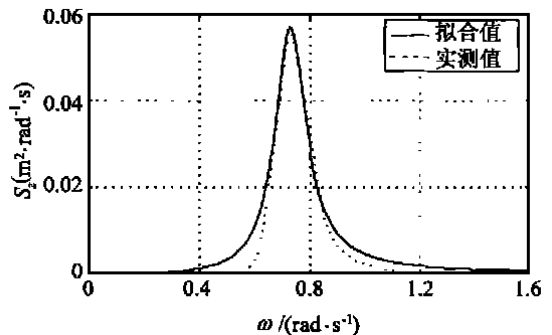


图 2 垂荡频谱的拟合值与实测值比较

Fig. 2 Comparison of heave PSD simulated data with measured

于是求得图 2 中虚线所对应频谱的拟合传递函数为

$$G_z(s) = 0.039/(s^2 + 0.13s + 0.53) \quad (19)$$

将根据式(19)得到的频谱的拟合值实测值进行对比,如图 2。

按照文献[4]中频谱与均方根关系的定义,求得式(19)形成的功率谱对应的均方根理论值为

$$\sigma_x = 0.112m \quad (20)$$

与实测值的误差为

$$(0.112 - 0.098)/0.098 \times 100\% = 13.9\% \quad (21)$$

(2) 纵摇和横荡运动频谱 纵摇运动的实测功率谱如图 3 中的虚线所示。采用同(1)节中相同的方法,可得:峰值频率 $\omega = 0.78\text{rad/s}$;带宽 $W = 0.24$, $\xi = 0.154$, 拟合传递函数为

$$G_{\theta}(s) = 0.045s/(s^2 + 0.24s + 0.62) \quad (22)$$

频谱的拟合值实测值的对比如图 3。

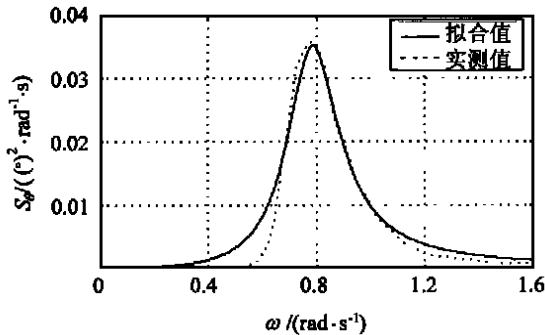


图 3 纵摇频谱的拟合值与实测值比较

Fig. 3 Comparison of pitch PSD simulated data with measured

相应的均方根及与理论值的误差分别为

$$\sigma_{\theta} = 0.115^{\circ} \quad (23)$$

$$(0.115 - 0.102)/0.102 \times 100\% = 12.7\% \quad (24)$$

横荡运动的实测功率谱如图 4 中的虚线所示。采用(1)节相同的方法,可得:峰值频率 $\omega = 0.675\text{rad/s}$;带宽 $W = 0.2$, $\xi = 0.143$, 拟合传递函数

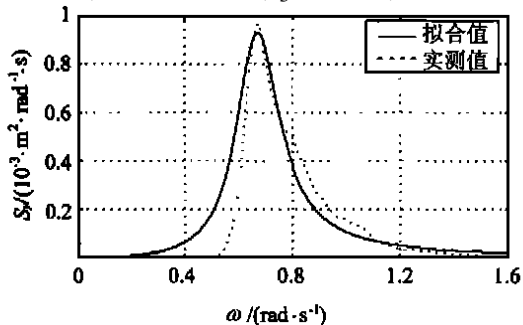


图 4 横荡频谱的拟合值与实测值比较

Fig. 4 Comparison of sway PSD simulated data

数为

$$G_Y(s) = 0.006s/(s^2 + 0.2s + 0.45) \quad (25)$$

频谱的拟合值实测值的对比如图 4。

相应的均方根及与理论值的误差分别为

$$\sigma_Y = 0.017m \quad (26)$$

$$(0.017 - 0.015)/0.015 \times 100\% = 15.5\% \quad (27)$$

4 结 论

经图 2~图 4 中拟合功率谱与实测功率谱的比较,表明:二者的数量级一致,形式非常接近,通过选取合适的参数,得到的均方根也是合理的。由于本文中的方法使用起来非常直观,涉及的计算过程很简单,计算量很小,因此是拟合窄带平稳随机过程频谱的一种非常实用、有效的工程化方法。应用本方法时需要注意:①在拟合窄带平稳随机过程的功率谱时,频谱的对称性越好,拟合结果越好,如图 2,对称性稍差的频谱,如图 4,拟合的结果稍差一些;②要拟合的窄带平稳随机过程的带宽不能太大,否则拟合频谱的误差会大一些;③峰值频率附近拟合效果最好,在距离峰值频率较远、频谱趋于零的频段误差较大。

参 考 文 献

[1] 汪荣鑫. 随机过程[M]. 西安:西安交通大学出版社,1987. 91~103.
 [2] 肖业伦,金长江. 大气扰动中的飞行原理[M]. 北京:国防工业出版社,1993. 166~173.
 [3] Sidr M M, Doolin B F. On the feasibility of real-time prediction of aircraft carrier motion at sea[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1983, AC-28(3): 350~352.
 [4] Powell F D, Theoclitus T. Study of an automatic carrier landing environment with the AN/SPN-10 landing control central[R]. AD462348, New York: Electromagnetic Systems Section, Bell Aerospace Systems Company, 1965. 42~60.

作者简介:



彭 兢 男,1972 年出生,北京航空航天大学飞行器设计与应用力学系在读博士生,研究方向:飞行力学与控制。博士论文题目:舰载飞机自动进舰着舰控制系统研究。

金长江 北京航空航天大学教授、博士生导师。